5 Elementarni zadaci: Centralni i periferiski ugao. Pravilni mnogouglovi.

Elementarna pitanja:

1. Kako glase definicije centralnog ugla nad tetivom, centralnog ugla nad lukom, periferiskog ugla nad tetivom, periferiskog ugla nad lukom?
(centralni ugao nad tetivom je ugao čiji se vrh nalazi na centru kruga a njegovi kraci prolaze kroz krajnje tačke tetive...)
2. U kakvom su odnosu centralni i periferiski ugao nad tetivom?
3. Zbir oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom iznosi...
4. Kakvu osobinu imaju odsjčci tangenti na krug? Kako bi to dokazali?

1. Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom 180°.

2. Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

3. U dati pravilni šestougao upisati 8 podudarnih četverouglova (Prisjetimo se osobina pravilnog šestougla: pravilan šestougao ima $ABCDEF$ ima šest podudarnih stranica, šest podudarnih uglova, tri para paralelnih suprotnih stranica ($AB||ED$, $BC||EF$, $CD||AF$) i dijagonale AD, BE i CF se polove). Obrazložiti ideju koja vas je dovela do rješenja.

4. Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu pravilnog šestougla $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, gdje je a dužina stranice.

5. Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Polazeći od definicije pravilnog šestougla (pretpostavljajući da više ništa ne znamo o pravilnom šestouglu) dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Geometrija u prostoru (nastavak)

Neke teoreme i njihove posljedice:

20. Ako je ugao u prostoru sadržan (okružen, ograničen) sa tri ugra iz ravni, bilo koja dva od njih su zajedno veći od trećeg.

Poliedar je geometrisko tijelo trodimenzionalnog Euklidskog prostora ograničeno površima ravnih mnogouglova.

21. Svaki ugao u prostoru je sadržan unutar uglova iz ravni (ivičnih uglova) čiji ukupan zbir je manji od četri prava ugla.

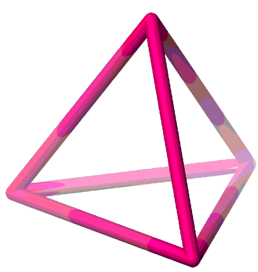
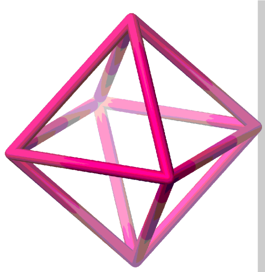
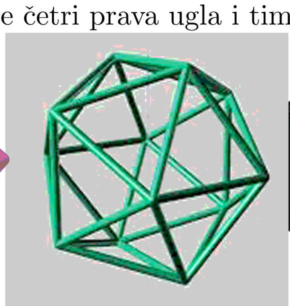
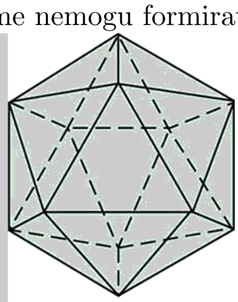
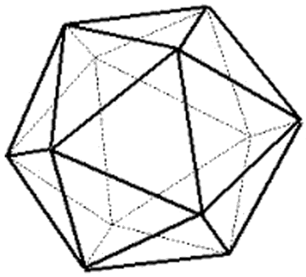
Korolar Postoji samo pet pravilnih (regularnih) poliedara.

(i) Najmanje tri strane se moraju sijeći da bi formirale ugao u prostoru bilo kojeg regularnog poliedra.

(ii) Suma ivičnih uglova (uglova iz ravni) koji formiraju bilo koji ugao u prostoru je manja od četri prava ugla.

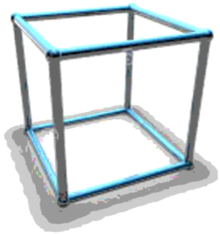
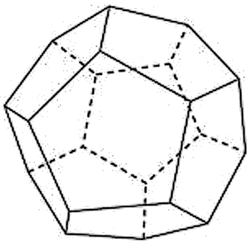
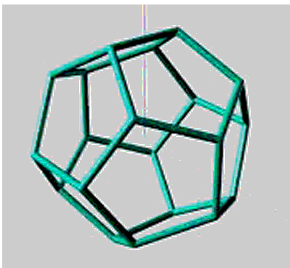
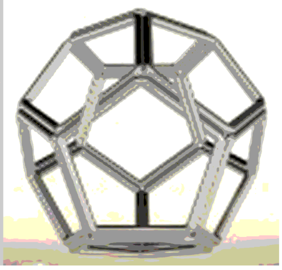
Sad primjetimo da je zbir tri ugla pravilnog šestougla jednak zbiru četri prava ugla, a da je zbir tri ugla bilo kojeg pravilnog mnogougla sa više od šest uglova, veći od zbira četri prava ugla. Time stranice pravilnih poliedara moraju biti istostranični trouglovi, kvadrati, ili pravilni petouglovi.

21.1. Ako su strane istostranični trouglovi, svaki ugao u prostoru (poliedarski ugao) se može formirati sa: (i) Tri istostranična trougla. Tijelo tako dobijeno nazivamo tetraedar. (ii) Četri istostranična trougla. Tijelo tako dobijeno nazivamo oktaedar. (iii) Pet istostraničnih trouglova. Tijelo tako dobijeno je ikosaedar. Zbir uglova šest istostraničnih trouglova je četri prava ugla i time nemogu formirati ugao u prostoru.

21.2. Ako su strane kvadrati, svaki ugao u prostoru će biti formiran pomoću tri kvadrata. Tijelo tako formirano se naziva kocka. Zbir uglova četri kvadrata je jednak zbiru četri prava ugla i time ne može formirati ugao u prostoru.

21.3. Slično, ako posmatramo stranice pravilnog petougla, svaki ugao u prostoru će biti formiran sa tri takva petougla. Tijelo tako formirano se naziva dodekaedar.

22. Presjek sfere i ravn je krug.

23. Kriva nastala presjekom dvije sfere je krug.

24. Osobine radikalne ravni (radikalna ravan je ravan koja sadrži krug dobijen presjekom dvije sfere), koaksalnih krugova (koaksalni krugovi su krugovi čiji su centari kolinearani i koji djele jednu zajednički radikalnu pravu) i centara sličnosti dvije sfere slijedi iz prirodnog poopštenja odgovarajućih tvrdnji koje se odnose na krugove iz ravni.

25. Ako je radius (poluprečnik) sfere r, tada se površina i zapremina sfere računa, redom, prema sljedećim formulama $4\pi r^2$ i $\frac{4}{3}\pi r^3$.

26. Samo se jedna sfera može nacrtati kroz četri tačke koje ne pripadaju ravni, i koje imaju osobinu da se ni jedne tri ne nalaze na pravoj.

27. U opštem slučaju može se nactrati osam sfera koje će dodirivati stranice tetraedra.

28. Ako se vrhovi A, B, C, D tetraedra spoje sa centroidama A', B', C', D' suprotnih strana, prave AA', BB', CC', DD' se sijeku u tački G, koja se naziva centroid tetraedra, takvoj da $AG = 3GA'$, i tako dalje.

29. Ako radius (poluprečnik) baze (kruga) kupe iznosi r, a njezina generatrisa i visina iz vrha do baze su l i h, tada površina omotača i zapremina kupe su, redom, πrl i $\frac{\pi}{3}r^2h$.

6. Skup pravih ima osobinu da se svake dvije prave iz tog skupa sijeku. Ako sve prave iz tog skupa ne prolaze kroz istu tačku dokazati da sve one pripadaju istoj ravni.

7. Prava a siječe ravan α u tački O i pri tome obrazuje podudarne uglove sa tri prave koje prolaze kroz tačku O i leže u ravni α. Dokazati da je prava a normalna na ravan α.

8. Prava a je normalna na ravan α i siječe je u tački N. Neka je b proizvoljna prava ravni α incidentna sa tačkom N. Ako je M $(M \neq N)$ tačka prave b, i c prava ravni α koja sadrži tačku M i normalna je na pravu b, tada je prava c normalna na pravu $p(M, A)$, gdje je A proizvoljna tačka prave a. Dokazati.

Napomena: ova tvrdnja je poznata pod imenom Teorema o tri normale.

9. Neka je ℓ prava koja nije normalna na ravan α i siječe je u tački L. Od svih pravih ravni α koje prolaze kroz tačku L, najmanji ugao sa pravom ℓ obrazuje njena ortogonalna projekcija na ravan α. Dokazati.

10. Pravougli trougao $\triangle ABC$, sa pravim uglom kod tjemena C, naslanja se katetom BC na ravan α i nagnut je prema ravni pod uglom od $\frac{\pi}{4}$. Odrediti odstojanje tjemena A od ravni α, ako je $BC = 2$ cm i $AB : AC = 3 : 1$.

11. Nastavak Zadatka broj 10. Odrediti ugao φ između hipotenuze i ravni α.

12. Jedna od kateta jednakokrakog pravouglog trougla $\triangle ABC$ (AC i BC su katete, AB hipotenuza) nalazi se u ravni α, a druga je nagnuta prema ravni pod uglom od $45°$. Ako je A_1 ortogonalna projekcija tačke A na ravan α, a stranica BC ima dužinu a, izračunati dužine stranica trougla $\triangle ACA_1$.

13. Duž AB je nagnuta prema ravni π pod uglom od $45°$. Druga duž, duž AC, leži u ravni π i sa projekcijom duži AB određuje ugao od $45°$. Izračunati ugao $\measuredangle BAC$.

14. Na papiru je nacrtan paralelogram $\square ABCD$ takav da je $AD \cong 2AB = 20$ cm i ugao $\measuredangle A = 60°$. Neka su E, F, G, redom sredine duži AD, BC, DC i neka se prave AF, BE sijeku u M. Papir je savijen oko prave BE tako da je ravan ABE okomita na ravan $BCDE$. Odrediti površinu trougla $\triangle AMG$. $[37,5\sqrt{3}\text{ cm}^2]$