4 Elementarni zadaci - Trapez i pravougli trougao

Elementarna pitanja:

1. Kako glasi definicija trapeza?
2. Ako je dat trougao $\triangle ABC$ u kome vrjedi da je $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = \alpha$, kako bi dokazali da je $AC \cong BC$?
3. Ako je $\triangle ABC$ pravougli trougao i tačka M sredina hipotenuzom AC, kako bi dokazali da je $AM \cong CM \cong BM$?
4. Na koji način bi dokazali da je ugao nad prečnikom prav? (sl)

1. Definicija trapeza: Trapez je četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica. Obrazložiti odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu trapeza ($P = \frac{1}{2}(a+c)h$ gdje su a i c dužine dvije paralelne stranice, a h udaljenost između njih).

2. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

3. Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

4. U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5\,cm$, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

5. Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$, a M i N su redom sredine duži CD i BD. Dokazati da $p(A, M) \perp p(C, N)$.

Geometrija u prostoru (nastavak)

Neke teoreme i njihove posljedice:

11. Moguće je nacrtati pravu koja je okomita na datu ravan iz date tačke van te ravni.

12. Također je moguće nacrtati pravu koja je okomita na datu ravan, iz date tačke koja joj pripada.

13. Samo jedna okomita prava se može nacrtati na datu ravan iz date tačke, bez obzira da li tačka pripadala ili ne toj ravni.

14. Ravni na koje je ista prava okomita su međusobno paralelne.

15. Ako su dvije prave koje se sijeku u jednoj ravni, redom paralelne na dvije prave koje se sijeku u nekoj drugoj ravni, dvije date ravni su paralelne.

16. Ako dvije paralelne ravni siječe neka ravan, njihovi zajednički presjeci su međusobno paralelni.

17. Ako dvije paralelne ravni sijeku dvije prave, njihovi presjeci su u istom omjeru.

18. Ako je prava okomita na ravan, tada je svaka ravan koja prolazi kroz tu pravu okomita na tu ravan.

19. Ako su dvije ravni koje se sijeku okomite na neku ravan, tada je njihov presjek također okomit na tu ravan.

Dieadar je skup od dvije poluravni čija je ivica zajednička prava. Ta prava se zove ivica diedra a poluravni su strane diedra.

Treidar (ili trostrani poliedarski ugao) je ugao u prostoru napravljeno od tri poluprave koje imaju početak u istoj tački i ne leže u jednoj ravni. Uglovi koje obrazuju po dvije od ovih polupravih nazivaju se ivični uglovi ili strane tridera.

20. Ako je ugao u prostoru sadržan (okružen, ograničen) sa tri ugra iz ravni, bilo koja dva od njih su zajedno veći od trećeg.

Poliedar je geometrisko tijelo trodimenzionalnog Euklidskog prostora ograničeno površima ravnih mnogouglova.

21. Svaki ugao u prostoru je sadržan unutar uglova iz ravni (ivičnih uglova) čiji ukupan zbir je manji od četri prava ugla.

Korolar Postoji samo pet pravilnih (regularnih) poliedara.

(i) Najmanje tri strane se moraju sijeći da bi formirale ugao u prostoru bilo kojeg regularnog poliedra.

(ii) Suma ivičnih uglova (uglova iz ravni) koji formiraju bilo koji ugao u prostoru je manja od četri prava ugla.

Sad primjetimo da je zbir tri ugla pravilnog šestougla jednak zbiru četri prava ugla, a da je zbir tri ugla bilo kojeg pravilnog mnogougla sa više od šest uglova, veći od zbira četri prava ugla. Time stranice pravilnih poliedara moraju biti istostranični trouglovi, kvadrati, ili pravilni petouglovi.

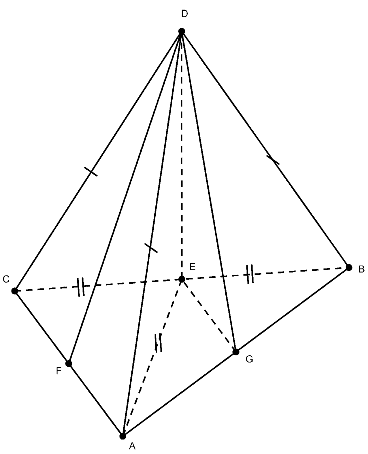
21.1. Ako su strane istostranični trouglovi, svaki ugao u prostoru (poliedarski ugao) se može formirati sa: (i) Tri istostranična trougla. Tijelo tako dobijeno nazivamo tetraedar. (ii) Četri istostranična trougla. Tijelo tako dobijeno nazivamo oktaedar. (iii) Pet istostraničnih trouglova. Tijelo tako dobijeno je ikosaedar. Zbir uglova šest istostraničnih trouglova je četri prava ugla i time nemogu formirati ugao u prostoru.

6. $DABC$ je tetraedar sa bazom ABC i vrhom D. Neka su E, F, G sredine duži BC, CA i AB redom. Ako su DF, DG okomice na AC, AB i ako je $\measuredangle BAC$ pravi ugao, pokazati da je DE okomito na bazu ABC.

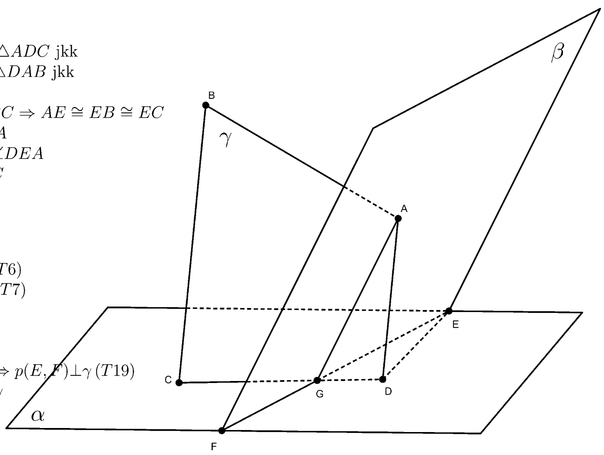
7. AD i BC su dvije okomice iz tački A, B na datu ravan α. Neka je β ravan koja sadrži tačku A, okomita je na AB i neka siječe ravan α po pravoj $p(E, F)$. Dokazati da je $CD \perp EF$.

8. Neka je $\square ABCD$ kvadrat i neka je a dužina njegove stranice. Iz A i C date su dvije okomice AE i CF na ravan $ABCD$ takve da $AE \cong AC$ i $CF = \frac{3}{2}AC$. Prvo dužine BE, EF i BF izraziti preko stranice a, a poslije toga pokazati da je trougao $\triangle BEF$ pravougli sa pravim uglom kod vrha E, kao i da je FE okomito na ravan BDE.

9. $ABCD$ je tetraedar u kome su $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ADC$ pravi uglovi. Ako su M i N redom sredine stranica BD i AC, i ako je $AM \cong MC$, pokazati da je MN najkraća udaljenost između AC i BD.

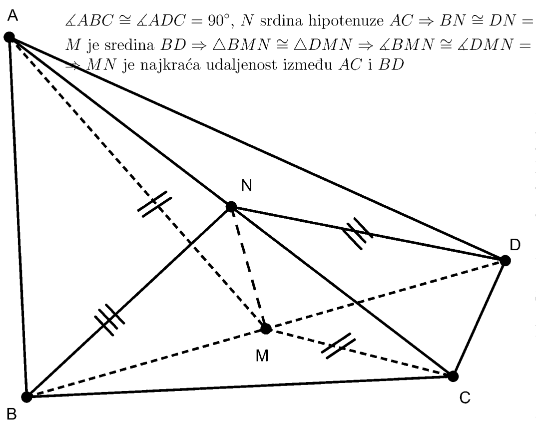


F sredina $AC, DF \perp AC \Rightarrow \triangle ADC$ jkk
G sredina$AB, DG \perp AB \Rightarrow \triangle DAB$ jkk
$DA \cong DB \cong DC$
$\square CAB = 90^\circ \wedge E$ sredina $BC \Rightarrow AE \cong EB \cong EC$
$\triangle DEB \cong \triangle DEC \cong \triangle DEA$
$\measuredangle DEC \cong \measuredangle DEB = 90^\circ = \measuredangle DEA$
Prema T4 $DE \perp$ ravan BAC

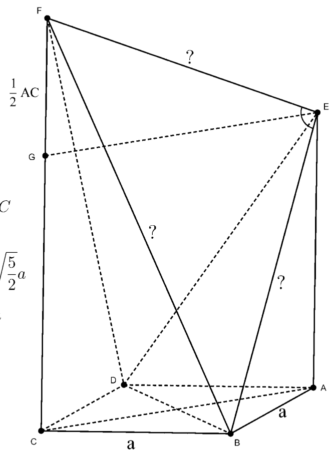


α data ravan
$AD \perp \alpha, BC \perp \alpha \Rightarrow AD \| BC\,(T6)$
A, B, C, D formiraju rvan $\gamma\,(T7)$
β je ravan takva da $AB \perp \beta$
$AB \perp \beta \Rightarrow \gamma \perp \beta\,(T18)$
$AD \perp \alpha \Rightarrow \gamma \perp \alpha\,(T18)$
$\alpha \cap \beta = p(E, F), \gamma \perp \alpha, \gamma \perp \beta \Rightarrow p(E, F) \perp \gamma\,(T19)$
$EF \perp$ na svaku pravu ravni γ
$CD \subseteq \gamma \Rightarrow EF \perp CD$

$AM \cong MC \Rightarrow \triangle AMN \cong \triangle MCN \Rightarrow \measuredangle ANM \cong \measuredangle CNM = 90^\circ \Rightarrow MN \perp AC$
$\measuredangle ABC \cong \measuredangle ADC = 90^\circ$, N srdina hipotenuze $AC \Rightarrow BN \cong DN = \frac{1}{2}AC$
M je sredina $BD \Rightarrow \triangle BMN \cong \triangle DMN \Rightarrow \measuredangle BMN \cong \measuredangle DMN = 90^\circ \Rightarrow MN \perp BD$
$\Rightarrow MN$ je najkraća udaljenost između AC i BD



$EA \perp$ravan $ABCD \Rightarrow EA \perp AB \Rightarrow BE^2 = AE^2 + AB^2$
$AE^2 = AC^2 = 2a^2 \Rightarrow BE^2 = 3a^2 \Rightarrow BE = \sqrt{3}a$
$CF \perp$ravan $ABCD \Rightarrow CF \perp CA$
Neka je $G \in CF$ t.d $EG \perp CF$
$CF \perp CA \wedge EG \perp CF \Rightarrow \square AEGC$ kvadrat $\measuredangle EG \cong AC \wedge EG \| AC$
$CF = \frac{3}{2}AC \wedge CG = AE \Rightarrow GF = \frac{1}{2}AC$
$EF^2 = FG^2 + GE^2 = \frac{1}{2}AC^2 + AC^2 = \frac{5}{4}AC^2 = \frac{5}{2}a^2 \Rightarrow EF = \sqrt{\frac{5}{2}}a$
Slično, $FC \perp BC \Rightarrow BF^2 = \frac{9}{4} \cdot 2a^2 + a^2 = \frac{11}{2}a^2 \Rightarrow BF = \sqrt{\frac{11}{2}}a$
Ponovo $BE^2 + EF^2 = 3a^2 + \frac{5}{2}a^2 = \frac{11}{2}a^2 = BF^2$
$\Rightarrow \triangle BEF$je pravougli sa pravim uglom kod vrha E
$\triangle EAB \cong \triangle EAD \Rightarrow EB \cong ED$
$\triangle FCB \cong \triangle FCD \Rightarrow FB \cong FD$
$\Rightarrow \triangle EBF \cong \triangle EDF \Rightarrow \measuredangle BEF \cong \measuredangle DEF = 90^\circ$
$FE \perp ED \wedge FE \perp EB \Rightarrow FE \perp$ravan BDE (T4)

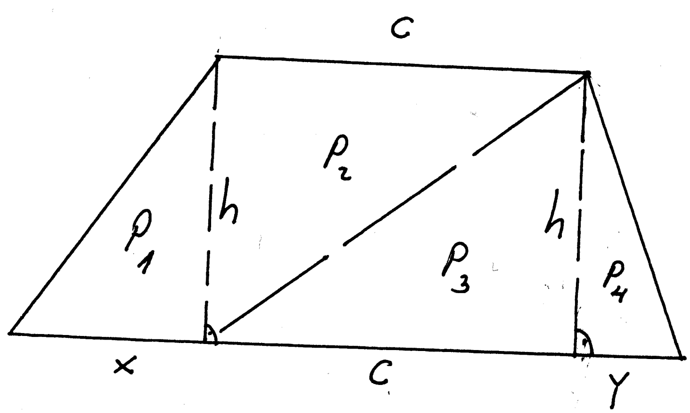


10. M je vrh piramide čija je baza paralelogram $\square ABCD$. Na strani BCM nacrtana je prava $p(E, F)$ paralelno sa pravom $p(B, C)$ tako da siječe ivice piramide MB, MC, redom, u tačkama E i F. Pokazati da postoji presjek polupravih $pp[A, E)$ i $pp[D, F)$, recimo u tački N, i da je $p(M, N) \| p(C, D)$. Da li je $p(M, N)$ paralelna i sa ravni $ABCD$ (objasniti zašto)?

11. AB, BC i CD su tri ivice kocke čija je glavna dijagonala AD. Pokazati da je ugao između ravni ABD i ACD dvije trećine ($\frac{2}{3}$) pravog ugla.

(#) Definicija trapeza: Trapez je četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica. Obrazložiti odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$) izvesti formulu za površinu trapeza ($P = \frac{1}{2}(a+c)h$ gdje su a i c dužine dvije paralelne stranice, a h udaljenost između njih).

Rj. Odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? ostavljamo za vježbu. (uputa: nije).



Uvedimo oznake kao na slici ($a = x + c + y$).

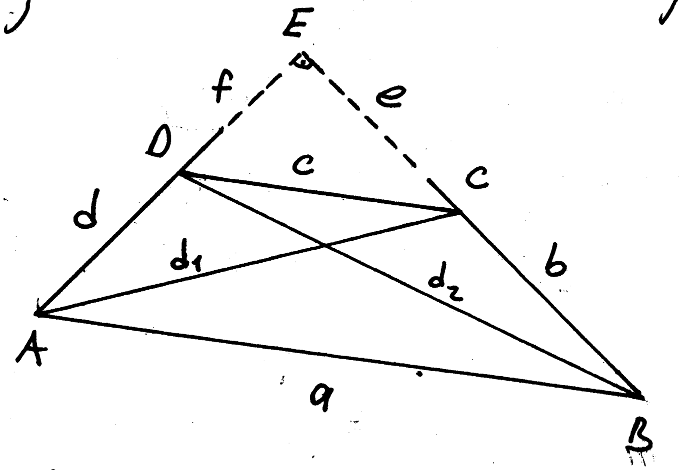
$$P_{trapeza} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{x \cdot h}{2} + \frac{h \cdot c}{2} + \frac{c \cdot h}{2} + \frac{h \cdot y}{2}$$

$$= \frac{(x+c+y)h + c \cdot h}{2} = \frac{ah + ch}{2}$$

Prema tome $P = \frac{1}{2}(a+c)h$.

Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj:



Uvedimo oznake kao na slici.

$\triangle ACE$ je pravougli sa hipotenuzom AC

$$d_1^2 = (d+f)^2 + e^2 \quad \dots (1)$$

$\triangle BDE$ je pravougli sa hipotenuzom BD

$$d_2^2 = (b+e)^2 + f^2 \quad \dots (2)$$

$\triangle ABE$ je pravougli sa hipotenuzom $AB \Rightarrow a^2 = (d+f)^2 + (e+b)^2$

$\triangle DCE$ je pravougli sa hipotenuzom $CD \Rightarrow c^2 = e^2 + f^2$

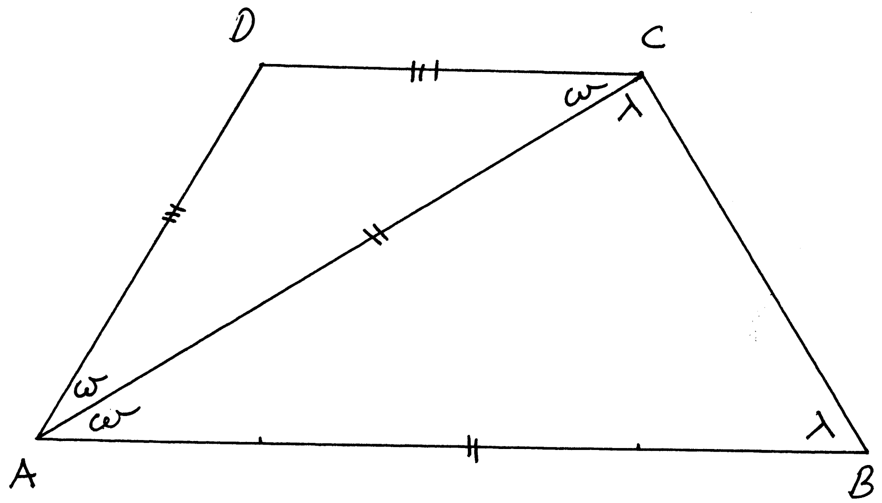
$(1)+(2) \Rightarrow \quad d_1^2 + d_2^2 = (d+f)^2 + e^2 + (b+e)^2 + f^2 = a^2 + c^2$

tj. $\quad d_1^2 + d_2^2 = a^2 + c^2$

q.e.d.

(#) Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

R:



jkk trapez $\square ABCD$ ima podudarne stranice AD i BC, kao i uglove $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ABC$ i $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BCD$.

AB je najveća stranica

Kako dijagonala razbija trapez na dva jkk trougla to $\triangle ABC$ jkk sa $AB \cong AC$ i $\triangle ADC$ jkk sa $AD \cong DC$

$\Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle ABC = \lambda$ i $\measuredangle DAC \cong \measuredangle DCA \cong \omega$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB = \omega$

Sad imamo

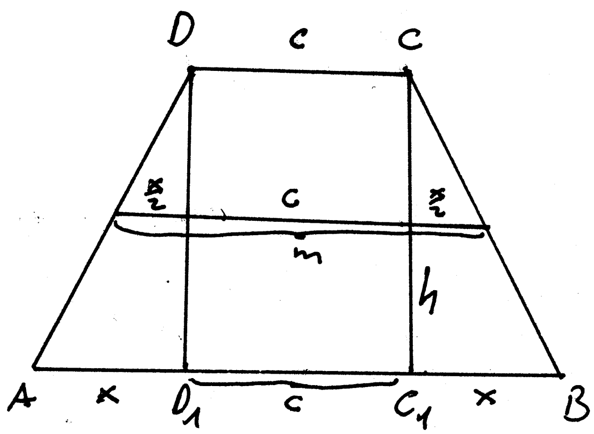
$$2\omega = \lambda$$
$$2\lambda + \omega = 180^\circ \quad /\cdot 2$$

$$4\lambda + 2\omega = 360^\circ$$
$$5\lambda = 360^\circ$$
$$\lambda = 72^\circ \Rightarrow \omega = 36^\circ$$

$\Rightarrow \measuredangle A = 72^\circ, \measuredangle B = 72^\circ, \measuredangle C = 108^\circ, \measuredangle D = 108^\circ$

(#) U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Rj. Koristim oznake sa slike.



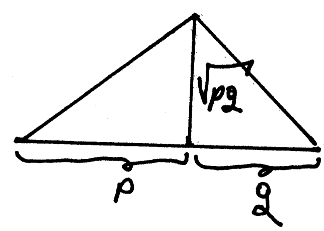
I način:

$P = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$

$m = 5$ cm

$AC = 10$ cm

Iskoristiću poznatu činjenicu da je



$\Rightarrow \quad h = \sqrt{(x+c) \cdot x}$

$m = 5 \Rightarrow x + c = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5x}$

$AC^2 = 10^2 = 100$

$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = (x+c)^2 + h^2 = 25 + 5x \Rightarrow$

$\Downarrow$

$5x = 75$

$x = 15$

$h = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$

$P = 25\sqrt{3}$ cm^2

II način:

$m = \frac{a+c}{2} = 5$ cm

$a + c = 10$ cm

$x = \frac{a-c}{2}$

$AC_1 = a - x = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5$

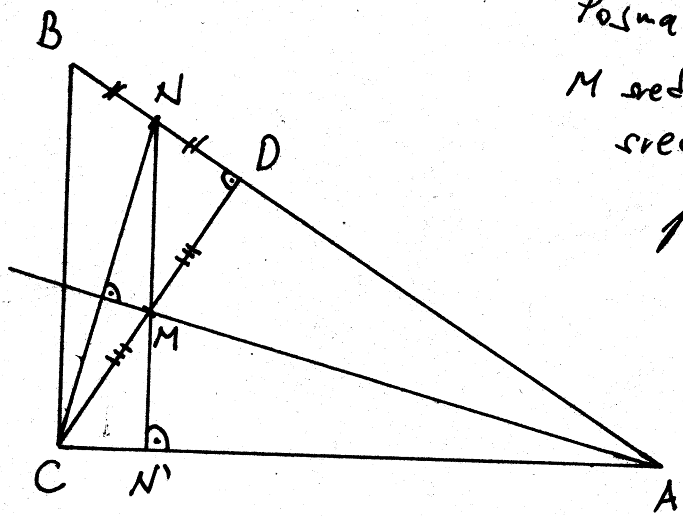
$h^2 = AC^2 - h^2 = 100 - 25 = 75$

$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$P = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$ cm^2

(#) Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla ΔABC, a M i N su redom sredine duži CD i BD. Dokazati da $p(A,M) \perp p(C,N)$.

Rj.



Posmatrajmo ΔCDB.

M sredina CD, N sredina BD $\Rightarrow$ MN je srednja linija ΔCDB $\Rightarrow$ $MN \parallel CB$ tj. $p(M,N) \parallel p(C,B) \Rightarrow p(M,N) \perp AC$

Posmatrajmo ΔACN (Neka je $\{N'\} = p(M,N) \cap AC$)

CD visina na AN, NN' visina na AC

$\Rightarrow$ M ortocentar trougla ΔACN.

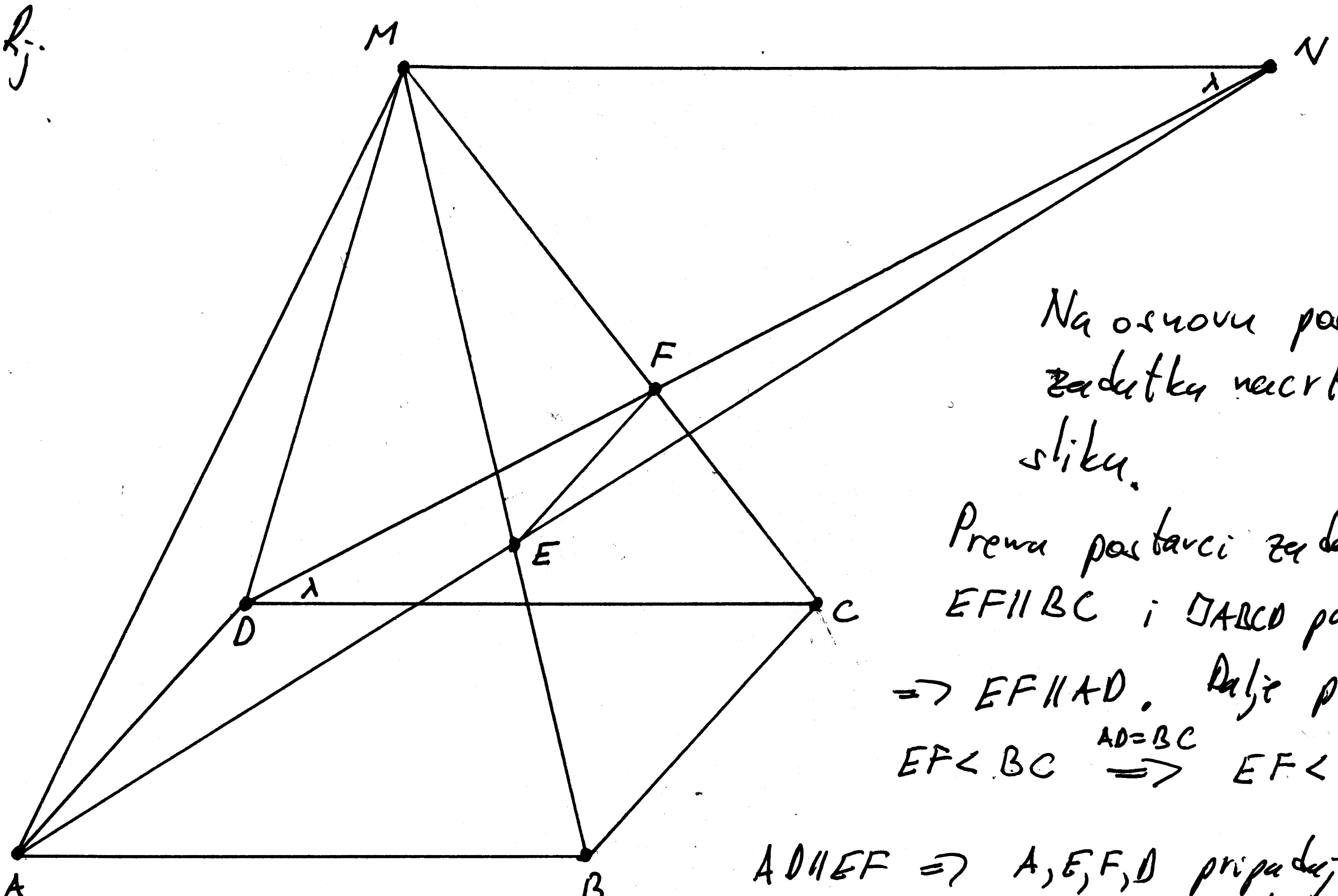
Kako se visine sijeku u istoj tački

$\Rightarrow$ $p(A,M) \perp p(C,N)$

q.e.d.

(#) M je vrh piramide čija je baza paralelogram $\square ABCD$. Na strani BCM nacrtana je prava $p(E,F)$ paralelno sa pravom $p(B,C)$ tako da siječe ivice piramide MB, MC redom u tačkama E i F. Pokazati da postoji presjek polupravih $pp[A,E)$ i $pp[D,F)$, recimo u tački N, i da je $p(M,N) \parallel p(C,D)$. Da li je $p(M,N)$ paralelna i sa ravni $ABCD$ (objasniti zašto)?

Rj:



Na osnovu postavke zadatka nacrtajmo sliku.

Prema postavci zadatka $EF \parallel BC$ i $\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow EF \parallel AD$. Dalje primjetimo $EF < BC \xRightarrow{AD=BC} EF < AD$

$AD \parallel EF \Rightarrow A, E, F, D$ pripadaju istoj ravni, a kako je $\square AEFD$ trapez to postoji presjek polupravih $pp[A,E)$ i $pp[D,F)$

Posmatrajmo $\triangle AND \Rightarrow \dfrac{NF}{ND} = \dfrac{FE}{AD} \xRightarrow{AD=BC} \dfrac{NF}{ND} = \dfrac{FE}{CB} = \dfrac{MF}{MC} \xRightarrow{\frac{ND}{NF}-1=\frac{MC}{MF}-1}$

$\Rightarrow \dfrac{NF}{FD} = \dfrac{MF}{FC}$

Kako je $\sphericalangle MFN \cong \sphericalangle DFC$ unakrsni uglovi $\Big\} \xrightarrow{\text{slič. SUS}} \triangle MFN \sim \triangle CFD$

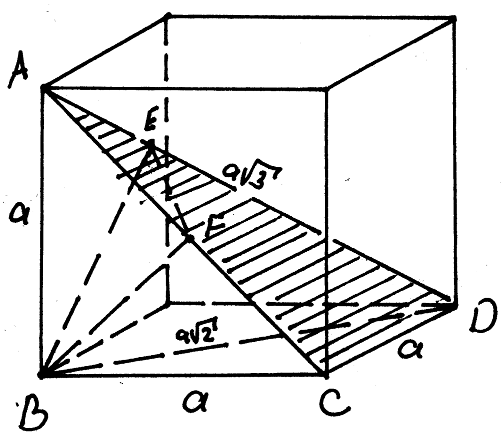
$\Downarrow$

$\sphericalangle FDC \cong \sphericalangle FNM = \lambda \Rightarrow p(M,N) \parallel p(C,D)$.

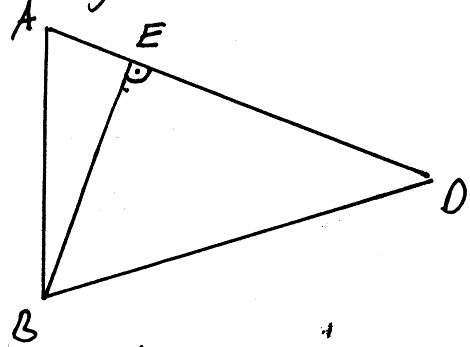
$p(C,D) \parallel p(M,N) \wedge p(C,D) \subseteq$ ravni $ABCD \Rightarrow p(M,N) \parallel$ ravni $ABCD$.

(#) AB, BC i CD su tri strane kocke čija je glavna dijagonala AD. Pokazati da je ugao između ravni ABD i ACD $\frac{2}{3}$ pravog ugla.

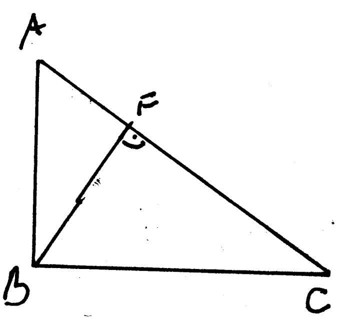
Rj.



Neka je data kocka u kome su AB, BC i CD tri strane kocke tako da je AD glavna dijagonala.
U ravni ABD izaberimo tačku E tako da je $E \in AD$ i $BE \perp AD$



U ravni ABC izaberimo tačku F takvu da je $F \in AC$ i $BF \perp AC$.



Spojimo tačke E i F. Ono što u stvari želimo da pokažemo je da je

$$\measuredangle BEF = \frac{2}{3} 90^\circ = 60^\circ$$

Zbog lakšeg razumijevanja zadatak možemo podijeliti u 5 koraka:

1. prvo ćemo pokazati da je $BF \perp EF$
2. pa ćemo pokazati da je $\Delta ABD \sim \Delta AEB$
3. iz čega slijedi da je $BE = a\sqrt{\frac{2}{3}}$
4. slično kao u drugom i trećem koraku pokazati ćemo $BF = \frac{a}{\sqrt{2}}$
5. iz prvog, trećeg i četvrtog koraka ćemo dobiti $\sin\measuredangle BEF = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Na osnovu petog koraka rezultat slijedi. Pa krenimo redom:

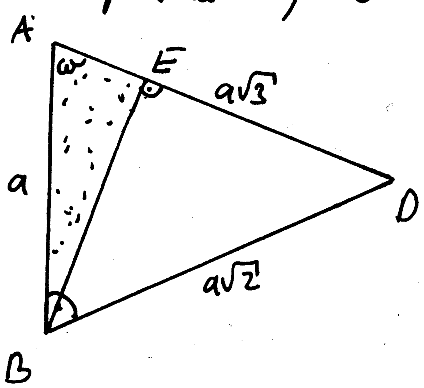
$CD \perp BC \wedge AC \perp CD \Rightarrow$ ravan $ABC \perp$ ravan ACD

Prisjetimo se teoreme: Ako je prava okomita na dvije date prave u presječnoj tački u kojoj se one sijeku, ona je okomita na ravan kojoj ove dvije prave pripadaju 

$BF \perp$ ravan $ACD \wedge BF \perp AC \xRightarrow{\text{posljedica teoreme}} BF \perp EF$

Sa a označimo stranice kocke AB, BC i CD. Na osnovu Pitagorine teoreme slijedi $BD = a\sqrt{2}$ i $AD = a\sqrt{3}$.

Sad posmatrajmo ravan ABD i pravougle trouglove ΔABD i AEB.



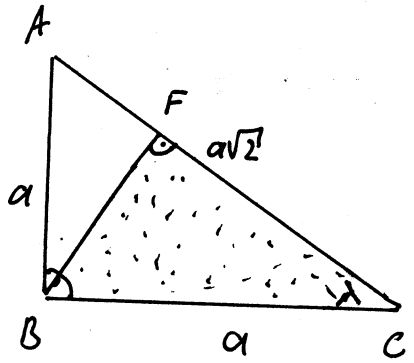
Na osnovu sličnosti UUU ova dva trougla su slična, tj. $\Delta ABD \sim \Delta AEB$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{BD}$$

$$\Rightarrow \quad BE \cdot AD = AB \cdot BD \Rightarrow a\sqrt{3}\, BE = a^2\sqrt{2} \Rightarrow BE = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Slično, posmatrajmo ravan ABC i pravougle trouglove ΔABC i ΔBCF



Na osnovu sličnosti UUU

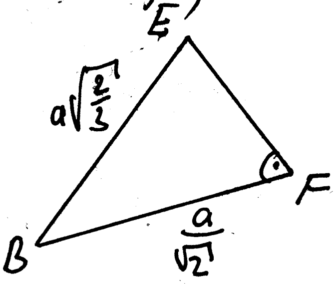
$$\Delta ABC \sim \Delta BFC$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BF} \Rightarrow a\sqrt{2}\, BF = a^2$$

$$BF = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Na kraju, kako je $BF \perp EF$ posmatrajmo pravougli trougao ΔBEF.



$$\sin\angle BEF = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BEF = 60^\circ$$

q.e.d.