

4 Elementarni zadaci - Trapez i pravougli trougao

Elementarna pitanja:

1. Kako glasi definicija trapeza?
2. Ako je dat trougao $\triangle ABC$ u kome vrijedi da je $\angle CAB = \angle ABC = \alpha$, kako bi dokazali da je $AC \cong BC$?
3. Ako je $\triangle ABC$ pravougli trougao i tačka M sredina hipotenuzom AC , kako bi dokazali da je $AM \cong CM \cong BM$?
4. Na koji način bi dokazali da je ugao nad prečnikom prav? (sl)

1. Definicija trapeza: Trapez je četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica. Obrazložiti odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu trapeza ($P = \frac{1}{2}(a + c)h$ gdje su a i c dužine dvije paralelne stranice, a h udaljenost između njih).

2. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

3. Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

4. U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm , a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

5. Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$, a M i N su redom sredine duži CD i BD . Dokazati da $p(A, M) \perp p(C, N)$.

Geometrija u prostoru (nastavak)

Neke teoreme i njihove posljedice:

11. Moguće je nacrtati pravu koja je okomita na datu ravan iz date tačke van te ravni.
12. Također je moguće nacrtati pravu koja je okomita na datu ravan, iz date tačke koja joj pripada.
13. Samo jedna okomita prava se može nacrtati na datu ravan iz date tačke, bez obzira da li tačka pripadala ili ne toj ravni.
14. Ravni na koje je ista prava okomita su međusobno paralelne.
15. Ako su dvije prave koje se sijeku u jednoj ravni, redom paralelne na dvije prave koje se sijeku u nekoj drugoj ravni, dvije date ravni su paralelne.
16. Ako dvije paralelne ravni siječe neka ravan, njihovi zajednički presjeci su međusobno paralelni.
17. Ako dvije paralelne ravni sijeku dvije prave, njihovi presjeci su u istom omjeru.
18. Ako je prava okomita na ravan, tada je svaka ravan koja prolazi kroz tu pravu okomita na tu ravan.
19. Ako su dvije ravni koje se sijeku okomite na neku ravan, tada je njihov presjek također okomit na tu ravan.

Dieadar je skup od dvije poluravni čija je ivica zajednička prava. Ta prava se zove ivica diedra a poluravni su strane diedra.

Treidar (ili trostrani poliedarski ugao) je ugao u prostoru napravljen od tri poluprave koje imaju početak u istoj tački i ne leže u jednoj ravni. Uglovi koje obrazuju po dvije od ovih polupravih nazivaju se ivični uglovi ili strane tridera.

20. Ako je ugao u prostoru sadržan (okružen, ograničen) sa tri ugra iz ravni, bilo koja dva od njih su zajedno veći od trećeg.

Poliedar je geometrijsko tijelo trodimenzionalnog Euklidskog prostora ograničeno površima ravnih mnogouglova.

21. Svaki ugao u prostoru je sadržan unutar uglova iz ravni (ivičnih uglova) čiji ukupan zbir je manji od četiri prava ugla.

Korolar Postoji samo pet pravilnih (regularnih) poliedara.

(i) Najmanje tri strane se moraju sijeci da bi formirale ugao u prostoru bilo kojeg regularnog poliedra.

(ii) Suma ivičnih uglova (uglova iz ravni) koji formiraju bilo koji ugao u prostoru je manja od četiri prava ugla.

Sad primjetimo da je zbir tri ugla pravilnog šestougla jednak zbiru četiri prava ugla, a da je zbir tri ugla bilo kojeg pravilnog mnogougla sa više od šest uglova, veći od zbira četiri prava ugla. Time stranice pravilnih poliedara moraju biti istostranični trouglovi, kvadrati, ili pravilni petouglovi.

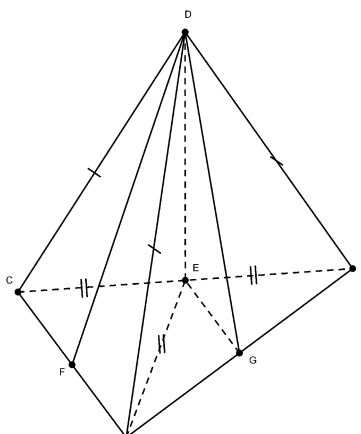
21.1. Ako su strane istostranični trouglovi, svaki ugao u prostoru (poliedarski ugao) se može formirati sa: (i) Tri istostranična trougla. Tijelo tako dobijeno nazivamo tetraedar. (ii) Četri istostranična trougla. Tijelo tako dobijeno nazivamo oktaedar. (iii) Pet istostraničnih trouglova. Tijelo tako dobijeno je ikosaedar. Zbir uglova šest istostraničnih trouglova je četiri prava ugla i time nemogu formirati ugao u prostoru.

6. $DABC$ je tetraedar sa bazom ABC i vrhom D . Neka su E, F, G sredine duži BC, CA i AB redom. Ako su DF, DG okomice na AC, AB i ako je $\angle BAC$ pravi ugao, pokazati da je DE okomito na bazu ABC .

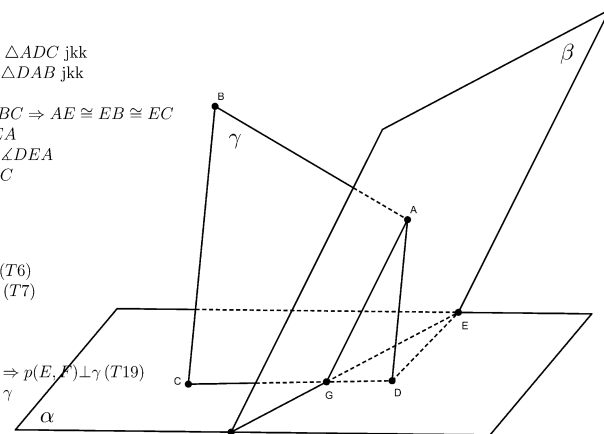
7. AD i BC su dvije okomice iz tački A, B na datu ravan α . Neka je β ravan koja sadrži tačku A , okomita je na AB i neka siječe ravan α po pravoj $p(E, F)$. Dokazati da je $CD \perp EF$.

8. Neka je $\square ABCD$ kvadrat i neka je a dužina njegove stranice. Iz A i C date su dvije okomice AE i CF na ravan $ABCD$ takve da $AE \cong AC$ i $CF = \frac{3}{2}AC$. Prvo dužine BE, EF i BF izraziti preko stranice a , a poslije toga pokazati da je trougao $\triangle BEF$ pravougli sa pravim uglom kod vrha E , kao i da je FE okomito na ravan BDE .

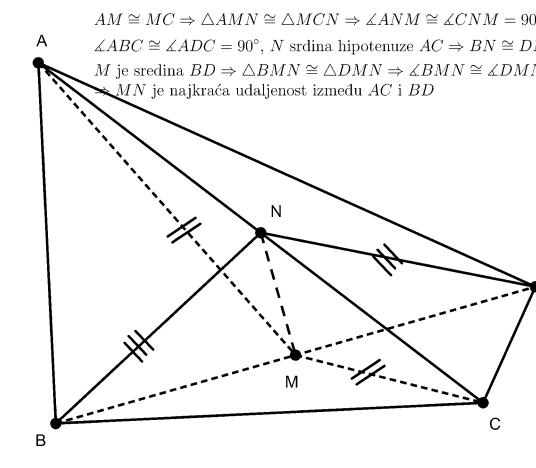
9. $ABCD$ je tetraedar u kome su $\angle ABC, \angle ADC$ pravi uglovi. Ako su M i N redom sredine stranica BD i AC , i ako je $AM \cong MC$, pokazati da je MN najkraća udaljenost između AC i BD .



F sredina $AC, DF \perp AC \Rightarrow \triangle ADC$ jkk
 G sredina $AB, DG \perp AB \Rightarrow \triangle DAB$ jkk
 $DA \cong DB \cong DC$
 $\square CAB = 90^\circ \wedge E$ sredina $BC \Rightarrow AE \cong EB \cong EC$
 $\triangle DEB \cong \triangle DEC \cong \triangle DEA$
 $\angle DEC \cong \angle DEB = 90^\circ = \angle DEA$
 Prema T4 $DE \perp$ ravan BAC



α data ravan
 $AD \perp \alpha, BC \perp \alpha \Rightarrow AD \parallel BC$ (T6)
 A, B, C, D formiraju rvan γ (T7)
 β je ravan takva da $AB \perp \beta$
 $AB \perp \beta \Rightarrow \gamma \perp \beta$ (T18)
 $AD \perp \alpha \Rightarrow \gamma \perp \alpha$ (T18)
 $\alpha \cap \beta = p(E, F), \gamma \perp \alpha, \gamma \perp \beta \Rightarrow p(E, F) \perp \gamma$ (T19)
 $EF \perp$ na svaku pravu ravni γ
 $CD \subseteq \gamma \Rightarrow EF \perp CD$



$AM \cong MC \Rightarrow \triangle AMN \cong \triangle CMN \Rightarrow \angle ANM \cong \angle CNM = 90^\circ \Rightarrow MN \perp AC$
 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, N$ sredina hipotenuze $AC \Rightarrow BN \cong DN = \frac{1}{2}AC$
 M je sredina $BD \Rightarrow \triangle BMN \cong \triangle DMN \Rightarrow \angle BMN \cong \angle DMN = 90^\circ \Rightarrow MN \perp BD$
 $\Rightarrow MN$ je najkraća udaljenost između AC i BD

$EA \perp$ ravan $ABCD \Rightarrow EA \perp AB \Rightarrow BE^2 = AE^2 + AB^2$
 $AE^2 = AC^2 = 2a^2 \Rightarrow BE^2 = 3a^2 \Rightarrow BE = \sqrt{3}a$
 $CF \perp$ ravan $ABCD \Rightarrow CF \perp CA$
 Neka je $G \in CF$ t.d $EG \perp CF$
 $CF \perp CA \wedge EG \perp CF \Rightarrow \square AEGC$ kvadrat $\angle EGC \cong \angle AC \wedge EG \parallel AC$
 $CF = \frac{3}{2}AC \wedge CG = AE \Rightarrow GF = \frac{1}{2}AC$
 $EF^2 = FC^2 + GE^2 = \frac{1}{2}AC^2 + AC^2 = \frac{5}{4}AC^2 = \frac{5}{2}a^2 \Rightarrow EF = \sqrt{\frac{5}{2}}a$
 Slično, $FC \perp BC \Rightarrow BF^2 = \frac{9}{4} \cdot 2a^2 + a^2 = \frac{11}{2}a^2 \Rightarrow BF = \sqrt{\frac{11}{2}}a$
 Ponovo $BE^2 + EF^2 = 3a^2 + \frac{5}{2}a^2 = \frac{11}{2}a^2 = BF^2$
 $\Rightarrow \triangle BEF$ je pravougli sa pravim uglom kod vrha E
 $\triangle EAB \cong \triangle EAD \Rightarrow EB \cong ED$
 $\triangle FCB \cong \triangle FCD \Rightarrow FB \cong FD$
 $\Rightarrow \triangle EBF \cong \triangle EDF \Rightarrow \angle BEF \cong \angle DEF = 90^\circ$
 $FE \perp ED \wedge FE \perp EB \Rightarrow FE \perp$ ravan BDE (T4)

10. M je vrh piramide čija je baza paralelogram $\square ABCD$. Na strani BCM nacrtana je prava $p(E, F)$ paralelno sa pravom $p(B, C)$ tako da siječe ivice piramide MB, MC , redom, u tačkama E i F . Pokazati da postoji presjek polupravih $pp[A, E)$ i $pp[D, F)$, recimo u tački N , i da je $p(M, N) \parallel p(C, D)$. Da li je $p(M, N)$ paralelna i sa ravni $ABCD$ (objasniti zašto)?

11. AB, BC i CD su tri ivice kocke čija je glavna dijagonala AD . Pokazati da je ugao između ravni ABD i ACD dvije trećine ($\frac{2}{3}$) pravog ugla.