Elementarni zadaci - Paralelogram

Elementarna pitanja:

1. Četverougao je paralelogram akko ima paralelne one stranice...
2. Kako glasi prvi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko ima podudarne one stranice...)
3. Kako glasi drugi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko ima najmanje jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno...)
4. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko mu se dijagonale...)

1. Definicija paralelograma: Četverougao je paralelogram ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno paralelne i podudarne.

2. Definicija paralelograma: Četverougao je paralelogram ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju i teoreme o podudarnosti trouglova dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima podudarne suprotne stranice.

3. Definicija paralelograma: Četverougao je paralelogram akko ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali, dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko mu se dijagonale polove.

4. Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete) izvesti formulu za površinu paralelograma ($P = a \cdot h$, gdje je $AB = a$, a h udaljenost između stranica AB i CD).

5. Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

6. Posmatrajmo površine devet različitih kvadrata P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32} i P_{33}. Za ove površine znamo da vrijedi jednakost $P_{11} + P_{12} + P_{13} = P_{21} + P_{22} + P_{23} = P_{31} + P_{32} + P_{33} =$ $P_{11} + P_{21} + P_{31} = P_{12} + P_{22} + P_{32} = P_{13} + P_{23} + P_{33} = P_{11} + P_{22} + P_{33} = P_{13} + P_{22} + P_{31}$. Ako su $P_{12} = 21$, $P_{13} = 14$, $P_{23} = 19$ i $P_{31} = 20$, diskutovati da li se mogu odrediti površine P_{11}, P_{22} i P_{33}.

7. Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice $1\,dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

8. Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Geometrija u prostoru

Neke teoreme i njihove posljedice:

1. Ako jednu pravu podjelimo na dijelove, ne može se desiti da jedan dio te prave pripada ravni a da drugi ne pripada.

2. Dvije prave koje se sijeku pripadaju jednoj ravni, i tri prave od kojih svaka siječe druge dvije pripadaju istoj ravni.

Korolar 1. Ako tri prave, koje ne pripadaju istoj ravni, imaju osobinu da se svake dvije sijeku, tada se one sijeku u istoj tački.

Korolar 2. Nešto slično vrijedi ako su date četri prave: Ako, od četri date prave, ne postoje tri koje se nalaze u istoj ravni, i ako svaka od tih pravih siječe druge dvije, sve prave se sijeku u istoj tački.

3. Ako se dvije ravni sijeku, rezultat njihovog presjeka je prava.

4. Ako je prava okomita na da dvije date prave u presječnoj tački u kojoj se one sijeku, ona je okomita na ravan kojoj ove dvije prave pripadaju.

5. Ako se tri prave sijeku u jednoj tački, i ako je četvrta prava okomita na svaku od ovih u toj tački, tada prve tri prave pripadaju jednoj istoj ravni.

6. Dvije prave koje su okomite na istu ravan su paralelne.

7. Ako su dvije prave paralelne, tada bilo koja prava koja spaja proizvoljnu tačku prve prave sa proizvoljnom tačkom druge prave pripada ravni kojoj pripadaju i dvije paralelne prave.

8. Ako su dvije prave paralelne i jedna od njih je okomita na ravan, i druga je okomita na istu ravan.

9. Prave koje su paralelne istoj pravoj, čak iako nisu u istoj ravni sa njom, su paralelne jedna sa drugom.

10. Ako su dvije prave koje se sijeku, redom paralelne sa druge dvije prave koje se sijeku, gdje ovi parovi presječnih pravih ne moraju biti u istoj ravni, prve dvije i druge dvije grade jednake uglove.

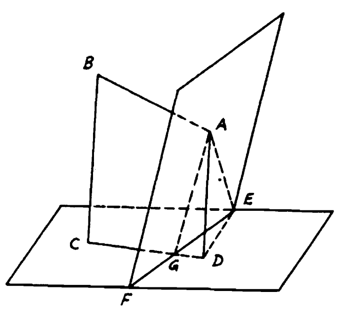
9. Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određena tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α. (Napomena: Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.)

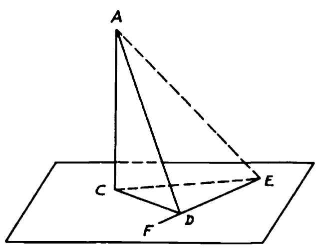
10. Ako su P i Q redom, tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P,Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q. (Napomena: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih.)

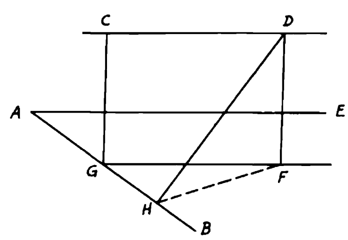
11. Neka je $CEDF$ data ravan α, i neka je tačka A van nje ($A \notin \alpha$). Ako je AC okomica na ravan α i CD okomica na pravu $p(E,F)$ u ravni, pokazati da je $AD \perp EF$.

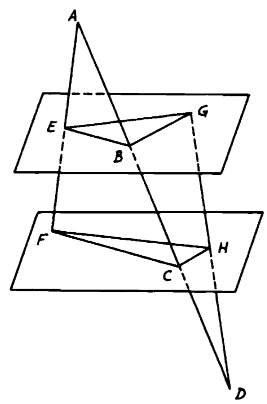
12. Nacrtati pravu (npr. nacrtati prvu $p(C,G)$) tako da je okomite na svaku od dvije date prave (npr. okomita je na $p(A,B)$ i $p(C,D)$) koje ne pripadaju istoj ravni. Dokazati da je ova zajednička okomica (u ovom slučaju duž CG) najkraća udaljenost između pravih.

13. Prava $ABCD$ siječe dvije paralelne ravni α i β u tačkama B i C ($B \in \alpha$, $C \in \beta$) tako da je $AB = CD$. Neka su p i q dvije transferzale redom iz tački A i D koje sijeku rani α i β redom u tačkama E, F i G, H. Pokazati da su $\triangle BEG$ i $\triangle CFH$ troulovi čije su površine jednake.









14. U prostoru su date tačke A, B, C i D. Ako su uglovi $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ i $\measuredangle DAB$ pravi, dokazati da su tačke A, B, C i D koplanarne.

15. U prostoru su date tačke A i B i prava ℓ. Odrediti ravan α takvu da ona sadrži tačku B i da podnožje normale iz tačke A na ravan α pripada pravoj ℓ.

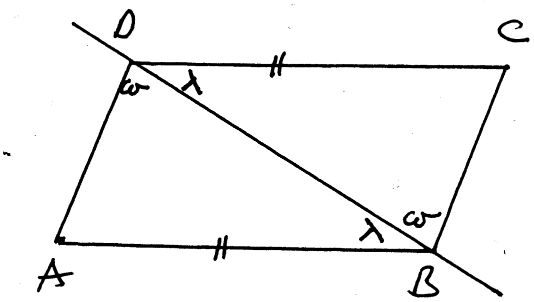
Upute-rješenja: **11.** Nacrtajmo sliku i posmatrajmo prvave $p(A,E)$, $p(C,E)$. Riješimo zadatak: Kako je $AC \perp \alpha$ to je $AC \perp CD$ i CE. Time $AD^2 = AC^2 + CD^2$ i $AE^2 = AC^2 + CE^2 \Rightarrow AE^2 - AD^2 = CE^2 - CD^2$. Ali $CD \perp EF \Rightarrow CE^2 - CD^2 = DE^2 \Rightarrow AE^2 - AD^2 = DE^2 \Rightarrow \measuredangle ADE$ je pravi ugao što je ekvivalentno sa $AD \perp EF$. **12.** Nacrtajmo sliku: Neka su AB, CD dvije date prave. Kroz bilo koju tačku A prave $p(A,B)$ nactajmo $AE \| CD$. Nacrtajmo $DF \perp \alpha$ (α je ravan ABE) i $FG \| AE$ siječe pravu AB u tački G. Neka je DC podudarna sa FG i posmatrajmo $p(C,G)$. Riješimo zadatak: CD, FG su $\| AE \Rightarrow CD \| FG$ i $DF \perp \alpha \Rightarrow CG \perp \alpha \Rightarrow CG \perp AB$ i GF, a imamo i $GF \| CD$ $\Rightarrow CG \perp AD$ i CD. Sad posmatrajmo bilo koju drugu pravu $p(D,H)$ između pravih $p(A,B)$ i $p(C,D)$. Kako je $DF \perp \alpha \Rightarrow DF \perp FH \Rightarrow DH > DF$ tj od CG. **13.** Ravan ACF siječe dvije $\|$ ravni $\Rightarrow BE \| CF$. Slično $BG \| CH$. Time $\measuredangle EBG \cong \measuredangle FCH$. Ponovo, $AB/AC = BE/CF = CD/BD = CH/BG \Rightarrow BE/CF = CH/BG$. Prema tome, $\triangle$ovi $\triangle EBG$, $\triangle FCH$ imaju oba ugla $\measuredangle EBG$, $\measuredangle FCH$ podudarna...

Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno paralelne i podudarne.

Rj. postavka zadatka

"$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ četverougao} \\ AB \parallel CD \wedge AB \cong CD\end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram

---



Prema postavci zadatka $AB \parallel CD$. Da bi dokazali da je $\square ABCD$ paralelogram trebamo još pokazati da je $AD \parallel BC$.

$AB \parallel CD \wedge p(B,D)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle ABD \cong \measuredangle CDB = \lambda$

$\left.\begin{array}{c}AB \cong CD \\ \measuredangle ABD \cong \measuredangle CDB = \lambda \\ DB \cong DB\end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \triangle ABD \cong \triangle CDB$

$\Downarrow$

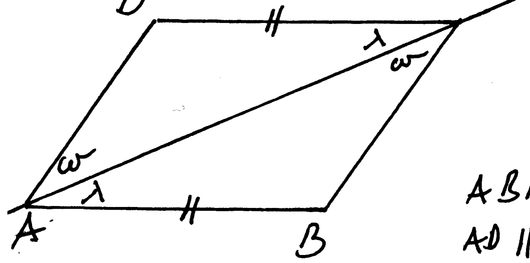
$\measuredangle BDA \cong \measuredangle DBC = \omega$ pa na $p(B,D)$ imamo dva ugla $\omega \Rightarrow AD \parallel BC$

$AD \parallel BC \wedge AB \parallel CD \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram q.e.d.

---

postavka zadatka

"$\Rightarrow$": $\square ABCD$ je paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD \wedge AB \cong CD$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$, pa da bi završili zadatak ostaje nam samo još da pokažemo da $AB \cong CD$.

$AB \parallel DC \wedge p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle ACD = \lambda$

$AD \parallel BC \wedge p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega$

$\left.\begin{array}{c}\measuredangle CAB \cong \measuredangle ACD = \lambda \\ AC \cong AC \\ \measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega\end{array}\right\} \xrightarrow{USU} \triangle ABC \cong \triangle ADC$

$\Downarrow$

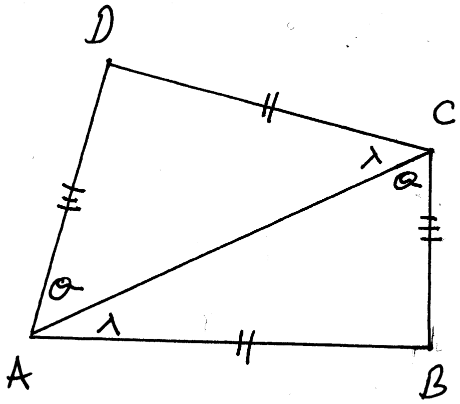
$AB \cong CD$

Prema tome $AB \parallel CD \wedge AB \cong CD$ q.e.d.

(#) Definicija paralelograma: Paralelogram je četvorougao koji ima paralelne suprotne stranice. Koristeći isključivo ovu definiciju i teoreme o podudarnosti trouglova dokazati sledeću tvrdnju: Četvorougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima podudarne suprotne stranice.

R: postavka zadatka

„$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ četvorougao} \\ AB \cong DC,\ AD \cong BC\end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ paralelogram



Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong CD \\ BC \cong AD \\ AC \cong AC \end{array}\right\} \xrightarrow{SSS} \triangle ABC \cong \triangle ADC$$

$\Downarrow$

$\measuredangle CAB \cong \measuredangle ACD = \lambda$

i $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \theta$

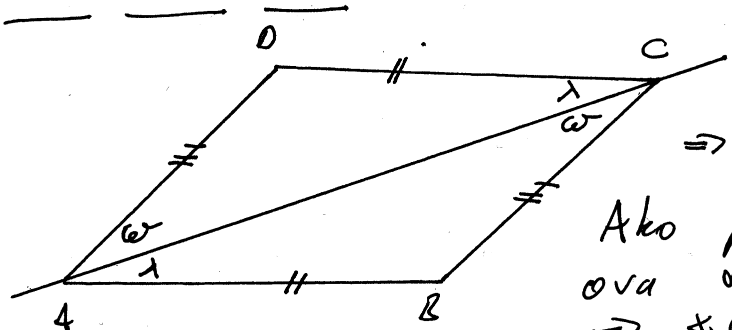
Na pravoj $p(A,C)$ imamo $\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACD \cong \measuredangle CAB = \lambda \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \\ \text{i } \measuredangle CAD \cong \measuredangle ACB = \theta \Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow \square ABCD$ paralelogram

q.e.d

postavka zadatka

„$\Rightarrow$" $\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \cong DC$ i $AD \cong BC$.



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $BC \parallel AD$

$\Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(B,C) \parallel p(A,D)$

Ako posmatramo $p(A,C)$ kao transferzalu ova dva para paralelnih pravih

$\Rightarrow \measuredangle CAB = \measuredangle ACD = \lambda$ i $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega$

Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD = \lambda \\ AC \cong AC \\ \measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega \end{array}\right\} \xrightarrow{USU} \triangle ABC \cong ADC$$

$\Downarrow$

$AB \cong DC$ i $AD \cong BC$

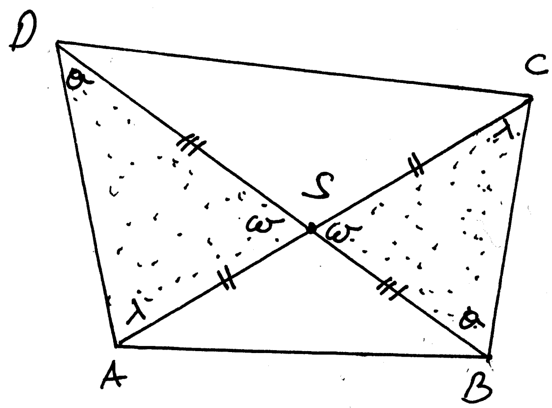
q.e.d

(#) Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao akko ima paralelne suprotne (stranice koje su suprotne jedna drugoj) stranice. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko mu se dijagonale polove.

Rj. postavku zadatka

„$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ četverougao} \\ AC \text{ i } BD \text{ su dijagonale} \\ AC \cap BD = \{S\} \\ S \text{ sredina } AC \\ S \text{ sredina } BD \end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD \text{ paralelogram}$$



Uvedimo oznake kao na slici.

$$\left.\begin{array}{l} DS \cong BS \\ \measuredangle ASD \cong \measuredangle BSC = \omega \\ AS \cong CS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle ASD \cong \triangle BSC$$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle SAD \cong \measuredangle SCB = \lambda$ i

$\measuredangle SDA \cong \measuredangle SBC = \theta$

Na pravoj $p(A,C)$ imamo $\measuredangle DAC \cong \measuredangle BCA = \lambda$

$\Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$ ...(*)

Na pravoj $p(B,D)$ imamo $\measuredangle ADB \cong \measuredangle DBC = \theta \Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$ ...(**)

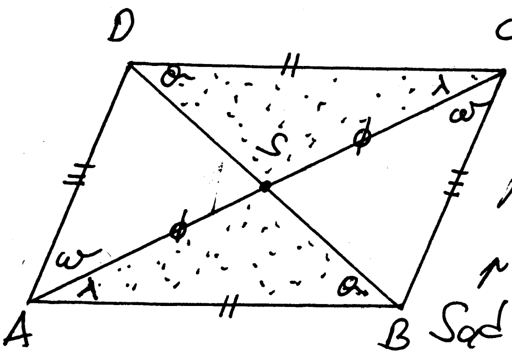
(*) i (**) $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram

q.e.d.

postavku zadatka

„$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC, BD \text{ dijagonale} \\ AC \cap BD = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S \text{ je sredina } AC \\ \text{i } S \text{ je sredina } BD. \end{array}$$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD = \lambda$

$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle DAC \cong \measuredangle BCA = \omega$

Na osnovu podudarnost USU $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$

$\Downarrow$

$AB \cong DC$ i $AD \cong BC$

$p(A,B) \parallel p(D,C)$ i $p(B,D)$ transf.

$\Rightarrow \measuredangle ABD \cong \measuredangle BDC = \theta$

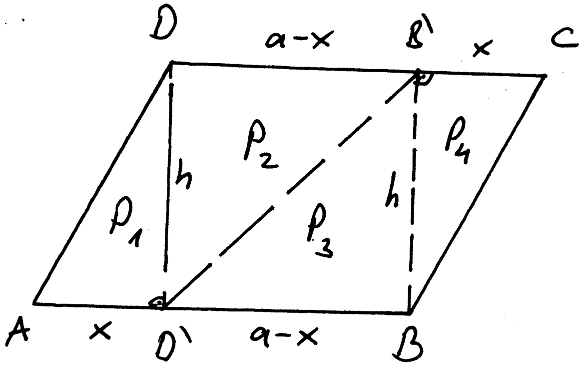
Sad ako posmatramo $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ na osnovu pravila USU

$\Rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CDS \Rightarrow AS \cong CS$ i $BS \cong DS$,

q.e.d.

(#) Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete) izvesti formulu za površinu paralelograma ($P=a\cdot h$, gdje je $AB=a$ a h udaljenost između stranica AB i CD).

Rj.:



Označimo stranicu AB sa a. Na osnovu osobina paralelograma znamo da je $AB \cong CD = a$. Neka je D' ortogonalna projekcija tačke D na AB.

Ako je $AD'=x$ tada je $BD'=a-x$. Ostale oznake uvedimo kao na slici.

$$P_{\square ABCD}=P_1+P_2+P_3+P_4=\frac{x\cdot h}{2}+\frac{(a-x)\cdot h}{2}+\frac{(a-x)\cdot h}{2}+\frac{h\cdot x}{2}$$

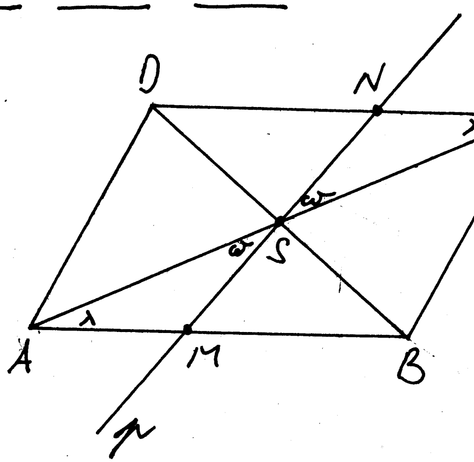
$$=x\cdot h+(a-x)\cdot h=(x+a-x)h=a\cdot h$$

$$P_{\square ABCD}=a\cdot h$$ što je i trebalo dobiti

(#) Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Rj. postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC \cap AB = \{S\}, \text{ prava } p \ni S \\ p \cap AB = \{M\},\ p \cap CD = \{N\} \end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ sredina } MN$$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$

$\Rightarrow AS \cong SC$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$; $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda$

Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda \\ AS \cong CS \\ \measuredangle ASM \cong \measuredangle CSN = \omega \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta ASM \cong \Delta CSN$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong NS$$

$$\Downarrow$$

S sredina MN

q.e.d.

\# Posmatrajmo površine devet različitih kvadrata $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32}$ i P_{33}. Za ove površine znamo da vrijedi

$$P_{11}+P_{12}+P_{13} = P_{21}+P_{22}+P_{23} = P_{31}+P_{32}+P_{33} = P_{11}+P_{21}+P_{31} = P_{12}+P_{22}+P_{32} =$$

$$= P_{13}+P_{23}+P_{33} = P_{11}+P_{22}+P_{33} = P_{13}+P_{22}+P_{31}.$$

Ako su $P_{12}=21$, $P_{13}=14$, $P_{23}=19$ i $P_{31}=20$ diskutovati da li se mogu odrediti površine P_{11}, P_{22} i P_{33}.

R:

P_{11}	P_{12}	P_{13}
$Y = x-1$	21	14
P_{21}	P_{22}	P_{23}
	x	19
P_{31}	P_{32}	P_{33}
20		$z = x+1$

Površinu P_{22} označimo sa x, P_{11} sa Y. Kako je

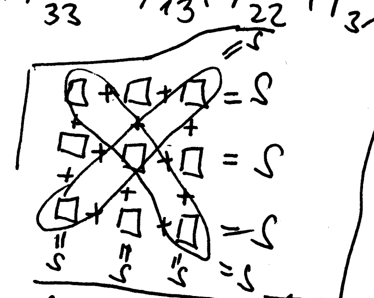
$$P_{11}+P_{12}+P_{13} = P_{13}+P_{22}+P_{31}$$

to $$Y+21+\cancel{14} = \cancel{14}+x+20$$

$$Y = x-1.$$

Kako je

$$P_{13}+P_{23}+P_{33} = P_{13}+P_{22}+P_{31}$$



to $$14+x+20 = 14+19+z$$

$$z = x+1$$

Sad kako je $P_{11}+P_{22}+P_{33} = P_{13}+P_{22}+P_{31}$ to

$$x-1+x+x+1 = 20+x+14$$

$$3x-x = 34$$

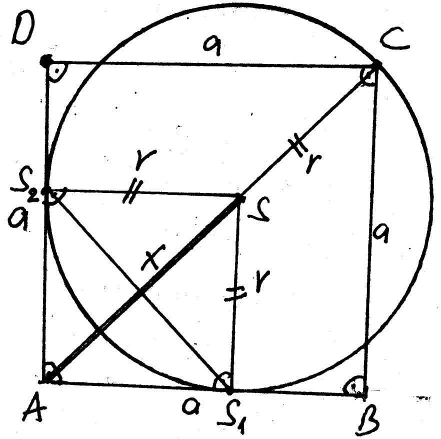
$$x = 17$$

$$P_{11} = 16, \quad P_{22} = 17, \quad P_{33} = 18.$$

Tražene površine se mogu odrediti kao i P_{21} i P_{32} (15 i 13).

#) Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice 1 dm. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Rj.



Označimo sa r poluprečnik, a sa S centar kružnice koja dodiruje stranice AB u S_1 a stranicu AD u S_2.

Primetimo da je četvorougao $\square AS_1SS_2$ kvadrat (imamo sve četri ugla po 90° i $SS_1 \cong SS_2 = r$).

Označimo sa x stranicu AS.

U $\triangle ABC$ imamo $(x+r)^2 = a^2 + a^2$ tj:

$(x+r)^2 = 2 \Rightarrow x + r = \sqrt{2}$ ... (1)

U $\triangle AS_1S$ imamo $x^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2 \Rightarrow x = r\sqrt{2}$

(1) $\Rightarrow$ $r\sqrt{2} + r = \sqrt{2}$

$$r(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1}$$

tj: $r = 2 - \sqrt{2}$ q.e.d.

#)

$\triangle ABC$

(#) Pravougaonik je podijeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Rj.: Označimo stranice manjih pravougaonika sa a, b, c, d, e i f kao na slici

	a	b	c
d	5	3	2
e	15	9	6
f	5	3	2

Površine tri pravougaonika su dovoljna da odrede površinu četvrtog.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot d = 5 \\ b\cdot d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{b} \\ e\cdot b = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a\cdot d = 5 \\ a\cdot\frac{3}{b} = 5 \\ 3a = 5b \\ a = \frac{5}{3}b \end{array} \qquad e\cdot a = e\cdot\frac{5}{3}b = \frac{5}{3}eb = 5\cdot 3 = 15$$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{b} \\ b\cdot e = 9 \\ c\cdot d = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c\cdot d = 2 \\ c\cdot\frac{3}{b} = 2 \\ 3c = 2b \\ c = \frac{2}{3}b \end{array} \qquad e\cdot c = e\cdot\frac{2}{3}b = \frac{2}{3}eb = \frac{2}{3}\cdot 9 = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} e\cdot b = 9 \Rightarrow e = \frac{9}{b} \\ e\cdot c = 6 \\ f\cdot c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e\cdot c = 6 \\ \frac{9}{b}\cdot c = 6 \\ 9c = 6b \;\; /:3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2b = 3c \\ b = \frac{3}{2}c \end{array} \qquad f\cdot b = f\cdot\frac{3}{2}c = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$$

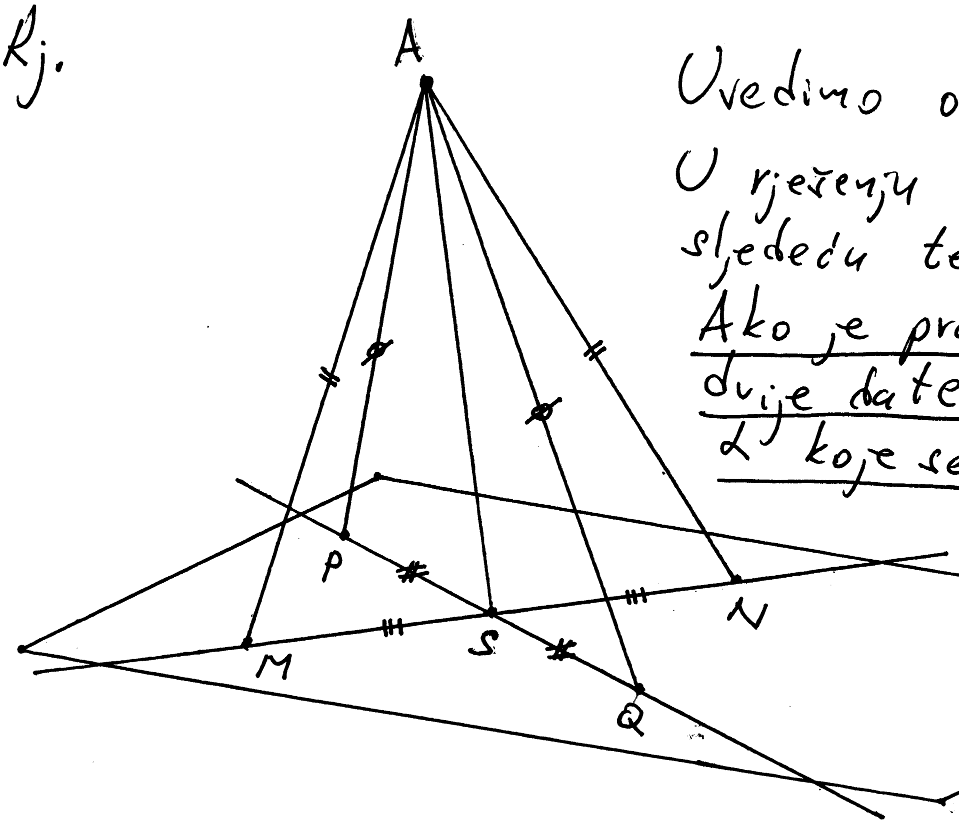
$$\left.\begin{array}{l} a\cdot e = 15 \Rightarrow e = \frac{15}{a} \\ e\cdot b = 9 \\ f\cdot b = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} e\cdot b = 9 \\ \frac{15}{a}\cdot b = 9 \\ 15b = 9a \;\; /:3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3a = 5b \\ a = \frac{5}{3}b \end{array} \qquad f\cdot a = f\cdot\frac{5}{3}b = \frac{5}{3}\cdot 3 = 5$$

$10 + 30 + 10$

Površina pravougaonika je 50 cm^2.

(#) Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određene tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

U rješenju ćemo iskoristiti sljedeću teoremu:

Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$. ...(*)

Posmatrajmo trouglove $\triangle AMS$ i $\triangle ANS$.

$$\left.\begin{array}{l} AM \cong AN \\ MS \cong NS \\ AS \cong AS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle AMS \cong \triangle ANS$$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle ASM \cong \measuredangle ASN$ a kako su ovo dva naporedna ugla to je $AS \perp p(M,N)$ ...(1)

Posmatrajmo sad trouglove $\triangle APS$ i $\triangle AQS$.

$$\left.\begin{array}{l} AP \cong AQ \\ PS \cong QS \\ AS \cong AS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle APS \cong \triangle AQS$$

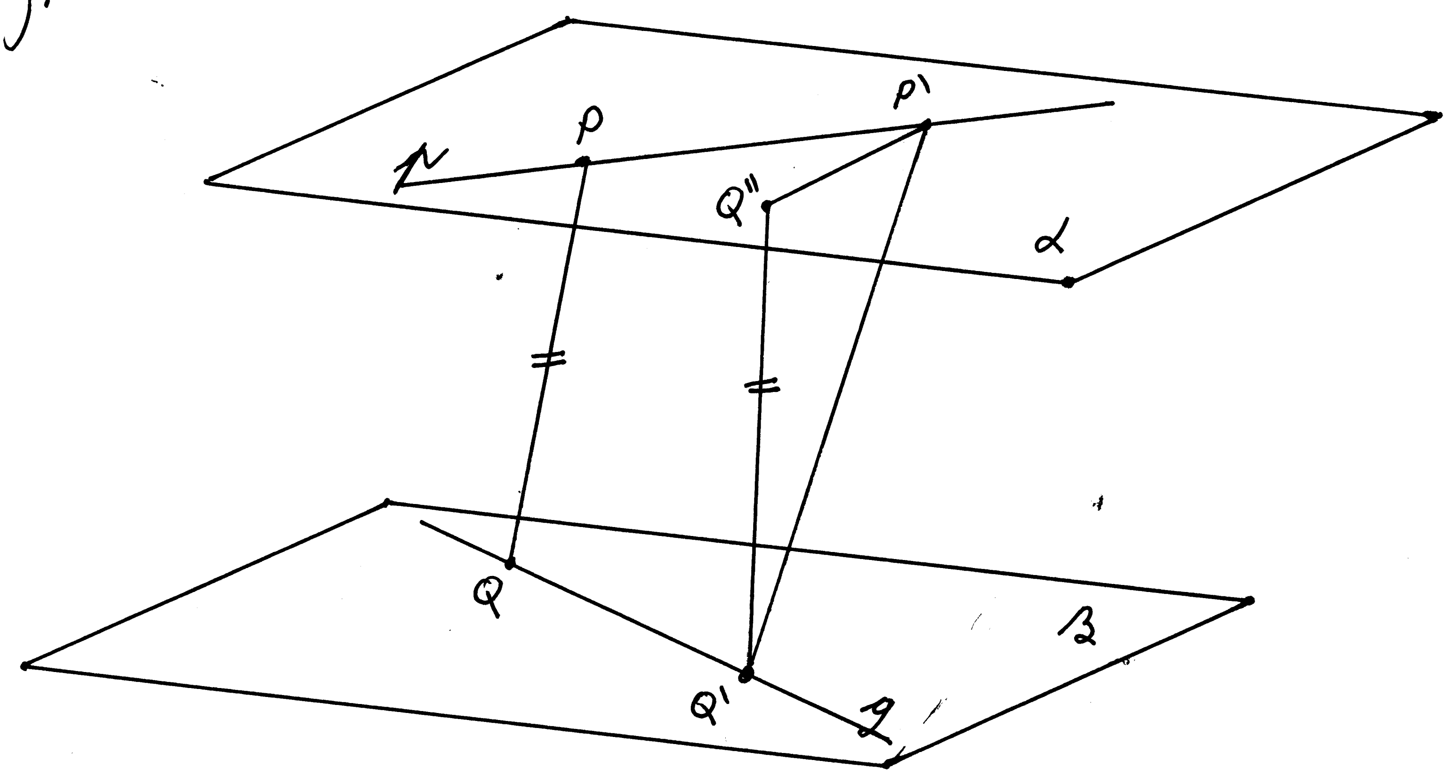
$$\Downarrow$$

$\measuredangle ASP \cong \measuredangle ASQ$ a kako su ovo dva naporedna ugla to je $AS \perp p(P,Q)$ ...(2)

Prema (*), (1) i (2) $\Longrightarrow$ $AS \perp \alpha$ q.e.d.

(#) Ako su P i Q redom tačke mimoilazних pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P,Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.
Neka je α ravan koja je normalna na pravu $p(P,Q)$ i sadrži pravu p, a β ravan koja je normalna na pravoj $p(P,Q)$ i sadrži pravu q.
Neka su P' i Q' proizvoljne tačke redom pravih p i q. Trebamo pokazati da za slučaje kada je

a) $P \neq P'$, $Q = Q'$

b) $P = P'$, $Q \neq Q'$

c) $P \neq P'$, $Q \neq Q'$

uvijek imamo (uvijek vrijedi) da je $PQ < P'Q'$,

a) $P \neq P'$, $Q = Q'$

Trougao $\triangle PQP'$ je pravougli (sa pravim uglom kod tjemena P) pa je njegova hipotenuza (duž $P'Q$) duža od katete (duž PQ) tj. $PQ < P'Q'$

b) $P = P'$, $Q \neq Q'$

Trougao $\triangle PQQ'$ je pravougli (sa pravim uglom kod vrha Q) pa je njegova hipotenuza duža od katete tj. $PQ < PQ'$ (tj. $PQ < P'Q'$).

c) $P \neq P'$, $Q \neq Q'$

Neka je Q'' podnožje normale iz tačke Q' na ravan α.

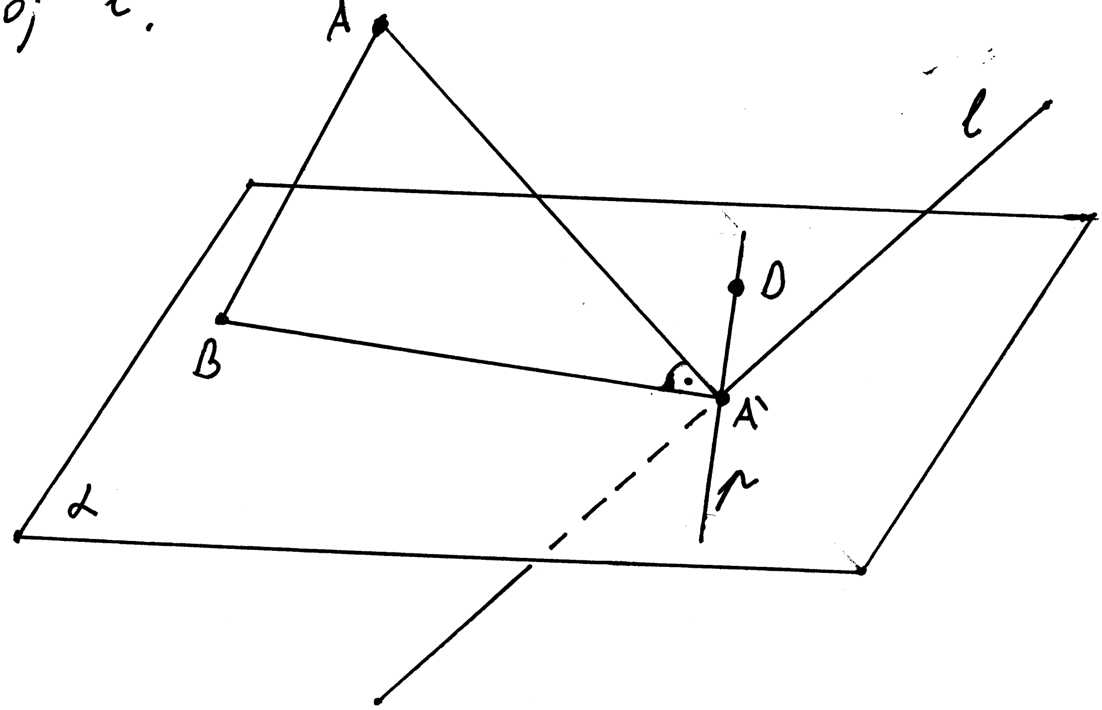
$Q'Q'' \perp \alpha$ i $\alpha \parallel \beta \Rightarrow Q'Q'' \perp \beta \Rightarrow Q'Q'' \perp q$

$p \subseteq \alpha$ i $Q'Q'' \perp \alpha \Rightarrow Q'Q'' \perp p$

Tačke P' i Q'' su različite (u suprotnom prava $Q'Q''$ siječe mimoilazne prave p i q i na njima je normalna, što je u kontradikciji sa teoremom: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih. (jer prava $n(P,Q)$ siječe mimoilazne prave p i q i na njima je normalna i takva prava je na osnovu navedene teoreme jedinstvena). Prema tome P' i Q' su različite i $Q'Q'' \perp Q''P \Rightarrow \triangle P'Q'Q''$ pravougli $\Rightarrow Q'P' > Q'Q''$ a kako je $PQ \cong Q'Q'' \Rightarrow PQ < P'Q'$

(#) U prostoru su date tačke A i B i prava l. Odrediti ravan α takvu da ona sadrži tačku B i da podnožje normale iz tačke A na ravan α pripada pravoj l.

Rj.

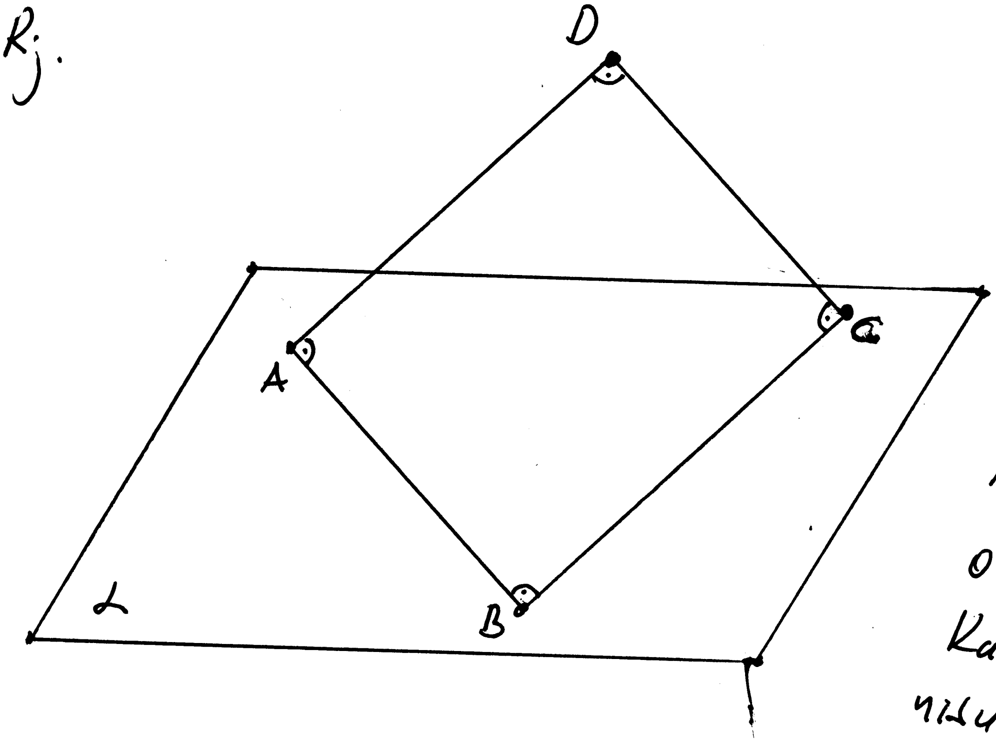


Nacrtajmo sliku tako da ravan α zadovoljava zadate uslove. Neka je A' podnožje normale iz tačke A na ravan α. Tada je $AA' \perp A'B$ pa tačka A' pripada krugu čiji je prečnik duž AB (taj krug je opisan oko $\Delta ABA'$ i centar mu je sredina duži AB), pa primijetimo da tačka A' pripada sferi S čiji je prečnik duž AB. Prema tome tačka A' je presječna tačka sfere S i prave l. Sad kako imamo prave $p(B,A')$ i $p(A,A')$ to možemo konstruisati pravu p t.d. $p \perp p(B,A')$ i $p \perp p(A,A')$. Neka je D proizvoljna tačka na pravoj p. Tražena ravan α je ravan koja sadrži tačke B, A' i D. Dokaz da je $p(A,A') \perp \alpha$ slijedi iz teoreme:

Ako je prava n okomita na dvije prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.

#) U prostoru su date tačke A, B, C i D. Ako su uglovi $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ i $\sphericalangle DAB$ pravi, dokazati da su tačke A, B, C i D koplanarne.

Rj.



Pretpostavimo da date tačke sa datim osobinama nisu komplanarne.
Neka je α ravan određena tačkama A, B i C.
Kako tačke A, B, C i D nisu komplanarne to $D \notin \alpha$.

Prisjetimo se teoreme:
Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i na njih je okomita.
Primjetimo da su prave $p(A,B)$ i $p(D,C)$ mimoilazne.
U našem slučaju mimoilazne prave $p(A,B)$ i $p(DC)$ imaju dvije različite zajedničke normale (prave $p(B,C)$ i $p(A,D)$) što je u suprotnosti sa datom teoremom. Prema tome polazna pretpostavka je pogrešna, pa slijedi da su tačke A, B, C i D komplanarne.