Elementarni zadaci - Paralelogram

Elementarna pitanja:

1. Četverougao je paralelogram akko ima paralelne one stranice...
2. Kako glasi prvi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko ima podudarne one stranice...)
3. Kako glasi drugi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko ima najmanje jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno...)
4. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko mu se dijagonale...)

1. Definicija paralelograma: Četverougao je paralelogram ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno paralelne i podudarne.

2. Definicija paralelograma: Četverougao je paralelogram ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju i teoreme o podudarnosti trouglova dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima podudarne suprotne stranice.

3. Definicija paralelograma: Četverougao je paralelogram akko ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali, dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko mu se dijagonale polove.

4. Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete) izvesti formulu za površinu paralelograma ($P = a \cdot h$, gdje je $AB = a$, a h udaljenost između stranica AB i CD).

5. Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

6. Posmatrajmo površine devet različitih kvadrata P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32} i P_{33}. Za ove površine znamo da vrijedi jednakost $P_{11} + P_{12} + P_{13} = P_{21} + P_{22} + P_{23} = P_{31} + P_{32} + P_{33} =$ $P_{11} + P_{21} + P_{31} = P_{12} + P_{22} + P_{32} = P_{13} + P_{23} + P_{33} = P_{11} + P_{22} + P_{33} = P_{13} + P_{22} + P_{31}$. Ako su $P_{12} = 21$, $P_{13} = 14$, $P_{23} = 19$ i $P_{31} = 20$, diskutovati da li se mogu odrediti površine P_{11}, P_{22} i P_{33}.

7. Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice $1\,dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

8. Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Geometrija u prostoru

Neke teoreme i njihove posljedice:

1. Ako jednu pravu podjelimo na dijelove, ne može se desiti da jedan dio te prave pripada ravni a da drugi ne pripada.

2. Dvije prave koje se sijeku pripadaju jednoj ravni, i tri prave od kojih svaka siječe druge dvije pripadaju istoj ravni.

Korolar 1. Ako tri prave, koje ne pripadaju istoj ravni, imaju osobinu da se svake dvije sijeku, tada se one sijeku u istoj tački.

Korolar 2. Nešto slično vrijedi ako su date četri prave: Ako, od četri date prave, ne postoje tri koje se nalaze u istoj ravni, i ako svaka od tih pravih siječe druge dvije, sve prave se sijeku u istoj tački.

3. Ako se dvije ravni sijeku, rezultat njihovog presjeka je prava.

4. Ako je prava okomita na da dvije date prave u presječnoj tački u kojoj se one sijeku, ona je okomita na ravan kojoj ove dvije prave pripadaju.

5. Ako se tri prave sijeku u jednoj tački, i ako je četvrta prava okomita na svaku od ovih u toj tački, tada prve tri prave pripadaju jednoj istoj ravni.

6. Dvije prave koje su okomite na istu ravan su paralelne.

7. Ako su dvije prave paralelne, tada bilo koja prava koja spaja proizvoljnu tačku prve prave sa proizvoljnom tačkom druge prave pripada ravni kojoj pripadaju i dvije paralelne prave.

8. Ako su dvije prave paralelne i jedna od njih je okomita na ravan, i druga je okomita na istu ravan.

9. Prave koje su paralelne istoj pravoj, čak iako nisu u istoj ravni sa njom, su paralelne jedna sa drugom.

10. Ako su dvije prave koje se sijeku, redom paralelne sa druge dvije prave koje se sijeku, gdje ovi parovi presječnih pravih ne moraju biti u istoj ravni, prve dvije i druge dvije grade jednake uglove.

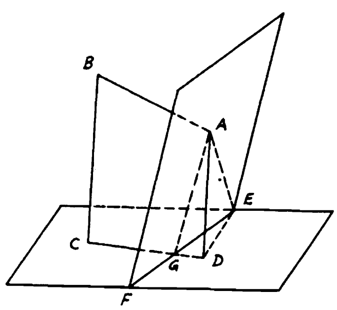
9. Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određena tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α. (Napomena: Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.)

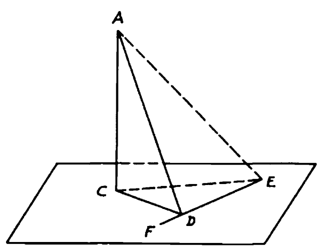
10. Ako su P i Q redom, tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P,Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q. (Napomena: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih.)

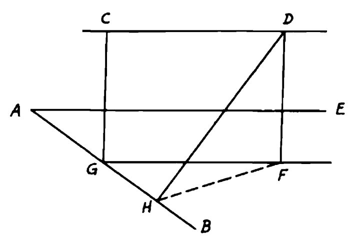
11. Neka je $CEDF$ data ravan α, i neka je tačka A van nje ($A \notin \alpha$). Ako je AC okomica na ravan α i CD okomica na pravu $p(E,F)$ u ravni, pokazati da je $AD \perp EF$.

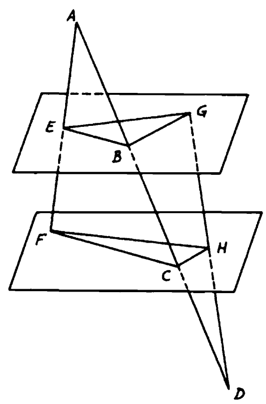
12. Nacrtati pravu (npr. nacrtati prvu $p(C,G)$) tako da je okomite na svaku od dvije date prave (npr. okomita je na $p(A,B)$ i $p(C,D)$) koje ne pripadaju istoj ravni. Dokazati da je ova zajednička okomica (u ovom slučaju duž CG) najkraća udaljenost između pravih.

13. Prava $ABCD$ siječe dvije paralelne ravni α i β u tačkama B i C ($B \in \alpha$, $C \in \beta$) tako da je $AB = CD$. Neka su p i q dvije transferzale redom iz tački A i D koje sijeku rani α i β redom u tačkama E, F i G, H. Pokazati da su $\triangle BEG$ i $\triangle CFH$ troulovi čije su površine jednake.









14. U prostoru su date tačke A, B, C i D. Ako su uglovi $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ i $\measuredangle DAB$ pravi, dokazati da su tačke A, B, C i D koplanarne.

15. U prostoru su date tačke A i B i prava ℓ. Odrediti ravan α takvu da ona sadrži tačku B i da podnožje normale iz tačke A na ravan α pripada pravoj ℓ.

Upute-rješenja: **11.** Nacrtajmo sliku i posmatrajmo prvave $p(A,E)$, $p(C,E)$. Riješimo zadatak: Kako je $AC \perp \alpha$ to je $AC \perp CD$ i CE. Time $AD^2 = AC^2 + CD^2$ i $AE^2 = AC^2 + CE^2 \Rightarrow AE^2 - AD^2 = CE^2 - CD^2$. Ali $CD \perp EF \Rightarrow CE^2 - CD^2 = DE^2 \Rightarrow AE^2 - AD^2 = DE^2 \Rightarrow \measuredangle ADE$ je pravi ugao što je ekvivalentno sa $AD \perp EF$. **12.** Nacrtajmo sliku: Neka su AB, CD dvije date prave. Kroz bilo koju tačku A prave $p(A,B)$ nactajmo $AE \| CD$. Nacrtajmo $DF \perp \alpha$ (α je ravan ABE) i $FG \| AE$ siječe pravu AB u tački G. Neka je DC podudarna sa FG i posmatrajmo $p(C,G)$. Riješimo zadatak: CD, FG su $\| AE \Rightarrow CD \| FG$ i $DF \perp \alpha \Rightarrow CG \perp \alpha \Rightarrow CG \perp AB$ i GF, a imamo i $GF \| CD \Rightarrow CG \perp AD$ i CD. Sad posmatrajmo bilo koju drugu pravu $p(D,H)$ između pravih $p(A,B)$ i $p(C,D)$. Kako je $DF \perp \alpha \Rightarrow DF \perp FH \Rightarrow DH > DF$ tj od CG. **13.** Ravan ACF siječe dvije $\|$ ravni $\Rightarrow BE \| CF$. Slično $BG \| CH$. Time $\measuredangle EBG \cong \measuredangle FCH$. Ponovo, $AB/AC = BE/CF = CD/BD = CH/BG \Rightarrow BE/CF = CH/BG$. Prema tome, $\triangle$ovi $\triangle EBG$, $\triangle FCH$ imaju oba ugla $\measuredangle EBG$, $\measuredangle FCH$ podudarna...