Elementarni zadaci - Dokazi u vezi trougla

Elementarna pitanja:

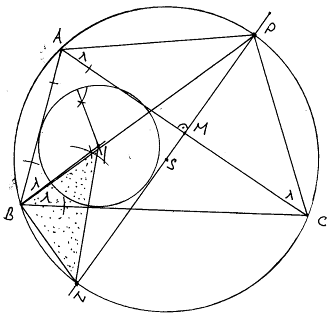
1. Nabrojati svih pet stavova o podudarnosti trouglova! Koju dodatnu osobinu stav SSU mora zadovoljiti?
2. Šta je π? Šta je stepen? Šta je prav ugao? Kako pomoću šestara podjeliti ugao na tri dijela sa vrlo vrlo približnom tačnošću?
3. Šta je srednja linija trougla i koje osobine ima?

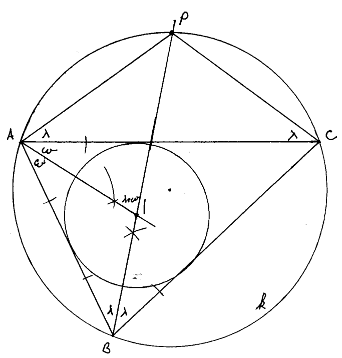
1. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$, $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M, S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A, C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

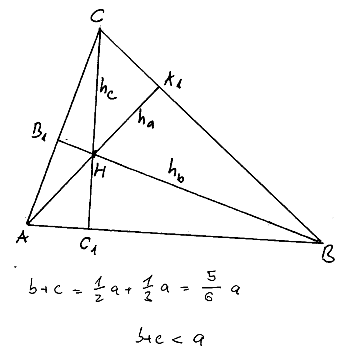
2. Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC), k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B, I)$ i kruga k. Dokazati da je $\triangle AIP$ jednakokraki.

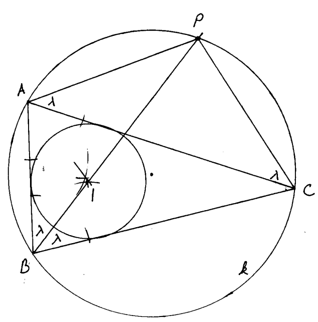
3. Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\,cm$, $h_b = 4\,cm$ i $h_c = 6\,cm$?

4. Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC). Neka je k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P središte luka AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.





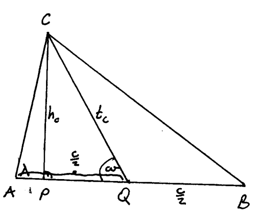


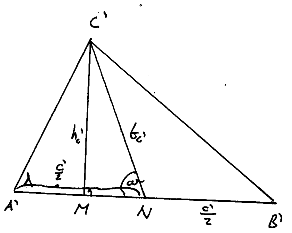


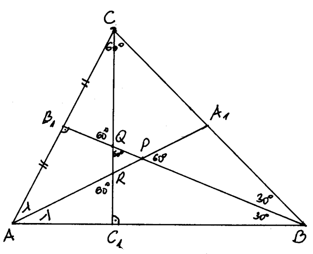
5. Dokazati da su dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarna ako je $c = c'$, $h_c = h_{c'}$ i $t_c = t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ redom na stranice c i c'.

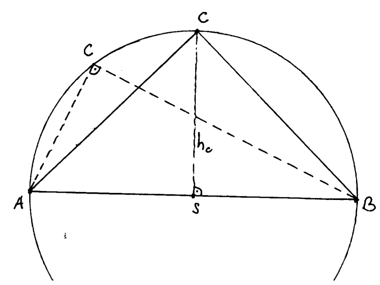
6. Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednkostraničan.

7. Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.









8. Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $MA + MB + MC < AC + BC$.

9. Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti $\triangle ABC$, tada je obim $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

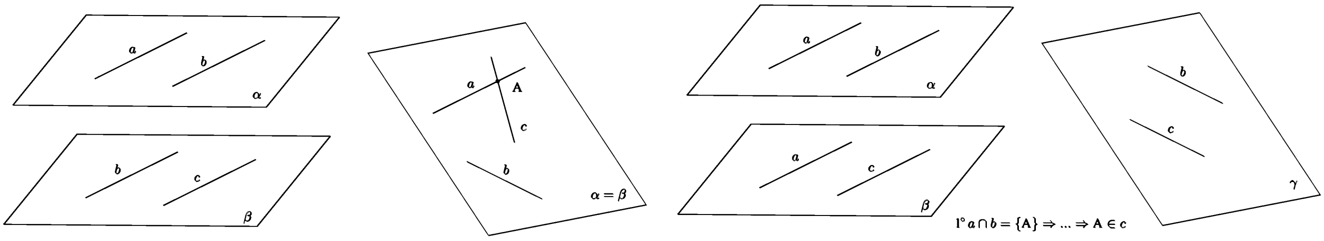
Aksioma paralelnosti

Još od doba starih grka pa sve do 19 vijeka postavljalo se pitanje koliko je pravih koje sadrže tačku A a ne sijeku pravu a ($A \notin a$). Tek je u 19 vijeku postalo jasno da se ovaj problem ne može riješiti na osnovu do tada poznatih aksioma i njihovih posljedica. Problem je riješen tako što je uvedena nova aksioma - aksioma paralelnosti. To je aksioma koja čini V grupu aksioma

V_E Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoji u ravni aA jedna i samo jedna prava koja je incidentna sa tačkom A i ne siječe pravu a.

10. Date su tri komplanarne prave a, b, c. Ako je $a \| b$ i $b \| c$ tada je $a \| c$. Dokazati.

11. Neka su a, b i c tri prave prostora od kojih su svake dvije komplanarne. Tada: Ako se dvije od njih sijeku i treća sadrži tu presječnu tačku, a ako su dvije od njih paralelne i treća je paralelna sa svakom od ovih pravih. Dokazati.

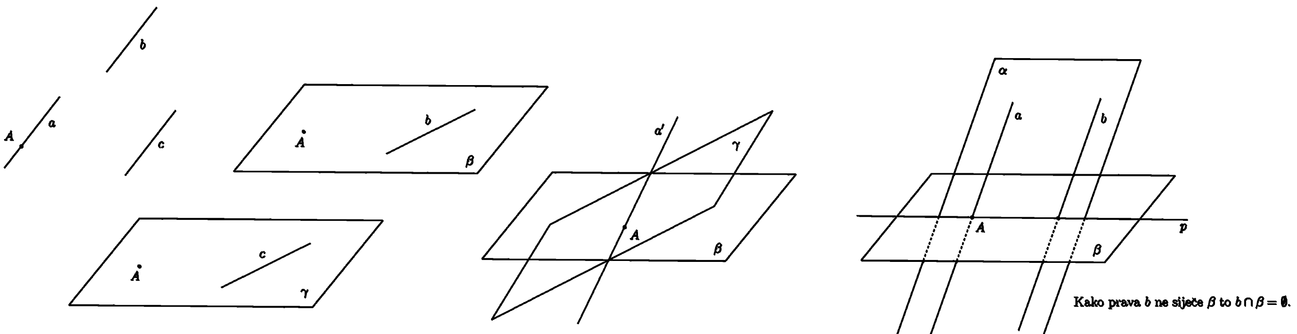


Tačka A sadrži dvije različite prave koje su paralelne sa pravom b

kontradikcija

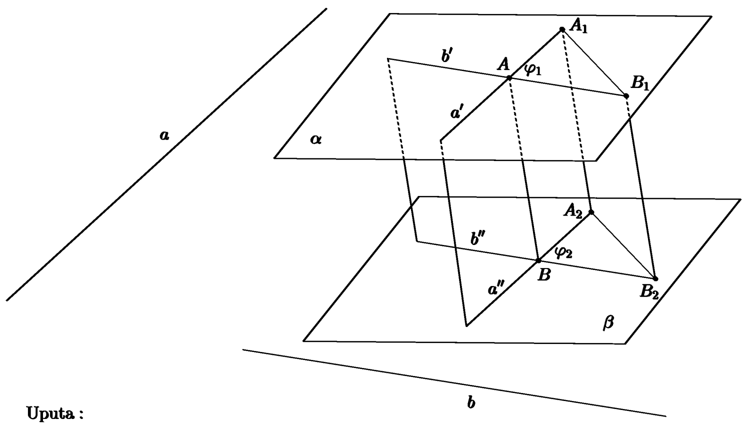
12. Neka su a, b i c tri prave u prostora. Ako je $a \| b$ i $b \| c$ tada je $a \| c$. Dokazati.

Prava a je <u>paralelna</u> sa ravni α ako je ona paralelna sa svojom normalnom projekcijom na tu ravan. To zapisujemo ovako $a \| \alpha$.



Dakle imamo tri prave u prostoru a', b i c od kojih su svake dvije komplanarne i $b \| c$...

Sad u ravni α postoje dvije prave od kojih svaka sadrži tačku A a ne sijeku pravu b.



Uputa :

Prvo formiramo dvije ravni, a poslije toga posmatramo tri paralelograma.

Da je treći četverougao paralelogram slijedi na osnovu prva dva paralelogram.

Podudarnost trouglova slijedi iz stava SSS.

13. Ako jedna od dvije paralelne prave siječe ravan siječe je i druga. Dokazati.

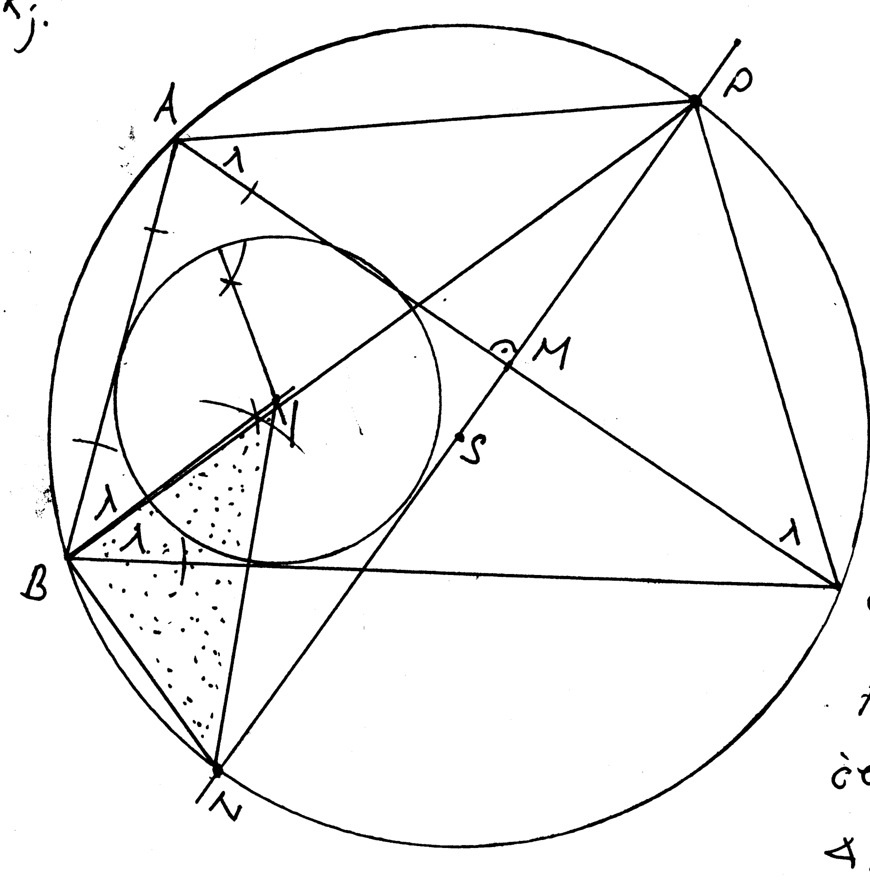
Prava a je <u>normalna</u> (<u>okomita</u>) na ravan α ako ona siječe ravan u nekoj tački A i ako je okomita (normalna) na svaku pravu iz ravni α koja sadrži tačku A. To zapisujemo ovako $a \perp \alpha$.

14. Ako je jedna od dvije paralelne prave normalna na ravan normalna je i druga. Dokazati.

15. *Ugao između mimoilaznih pravih* a i b definiše se kao ugao između pravih a' i b' koje se sijeku i pri tome je $a' \| a$ i $b' \| b$. Dokazati da ugao između mimoilaznih pravih a i b ne zavisi od izbora pravih a' i b', tj. da su svi tako dobijeni uglovi međusobno podudarni.

(#) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli.

Rj.



Posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle PMC$. Imamo

$AM \cong MC$ (M sredina AC)
$\measuredangle AMP \cong \measuredangle CMP = 90°$
(S-M-P i tačka S leži na simetrali stranice AC)
$PM \cong PM$

$\xRightarrow{SUS}$ $\triangle AMP \cong \triangle CMP$

$\Downarrow$

$\measuredangle PAM \cong \measuredangle PCM = \lambda$

Posmatrajmo sad tetivni četverougao $\square BCPA$. Imamo
$\measuredangle ABP \cong \measuredangle PCA = \lambda$ i
$\measuredangle PBC \cong \measuredangle PAC = \lambda$

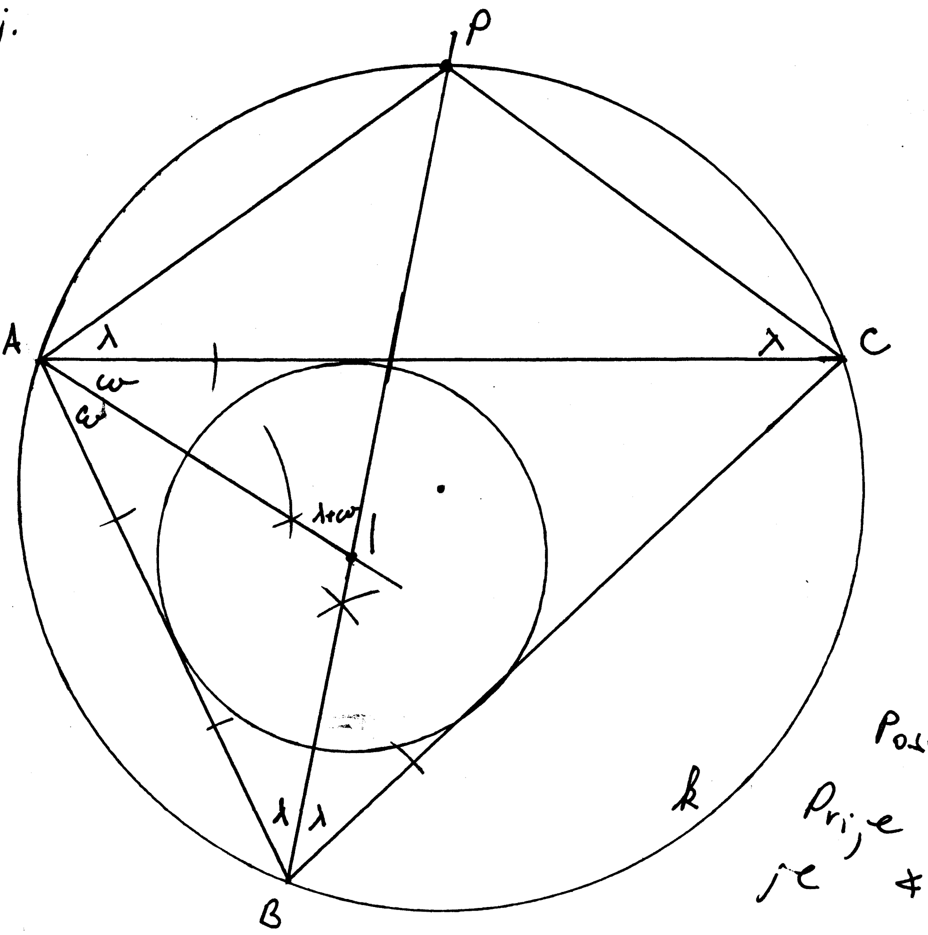
$\Rightarrow$ $p[B,P)$ je simetrala ugla $\measuredangle ABC$ tj. tačka $I \in BP$.

Ugao nad prečnikom je prav pa $\measuredangle NBP = 90°$ tj.
$\measuredangle NBI = 90°$ $\Rightarrow$ $\triangle NBI$ je pravougli

q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC ($AB<BC$), k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B,I)$ i kruga k. Dokazati da je ΔAIP jednakokraki.

Rj.



Tačka I leži na presjeku simetrala uglova pa imamo da je $\measuredangle ABP \cong \measuredangle CBP = \lambda$. Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa možemo zaključiti da je

$\measuredangle PAC = \measuredangle PBC = \lambda$ i

$\measuredangle PCA = \measuredangle ABP = \lambda$

Posmatrajmo sad ΔAIP. Prije toga primjetimo da je $\measuredangle BAI \cong \measuredangle CAI = \omega$

(ZAŠTO?)

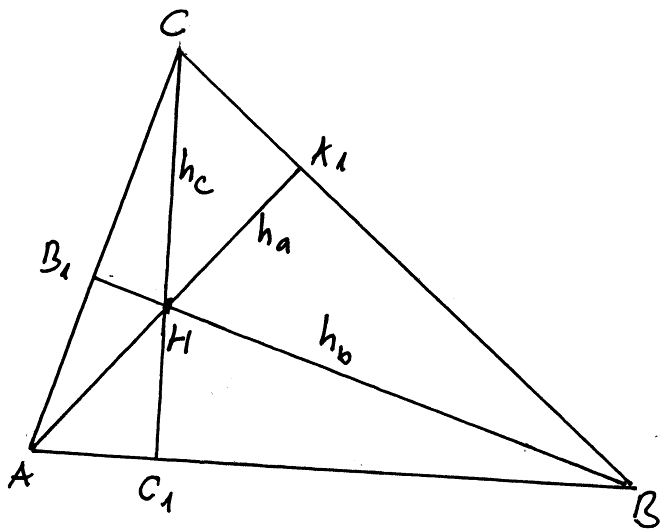
U trouglu ΔPAI $\measuredangle PAI = \lambda + \omega$. Ugao $\measuredangle AIP$ je vanjski ugao trougla ΔAIB pa je $\measuredangle PIA = \measuredangle ABI + \measuredangle IAB = \lambda + \omega$ (vanjski ugao trougla jednak je zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla). Prema tome $\measuredangle PAI \cong \measuredangle AIP = \lambda + \omega$

$\Rightarrow$ ΔAPI je jkk

q.e.d.

(7) Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2$ cm, $h_b = 4$ cm i $h_c = 6$ cm?

Rj.



$h_a = 2$ cm

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$h_b = 4$ cm

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{4b}{2} = 2b$$

$h_c = 6$ cm

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{6c}{2} = 3c$$

Sad imamo

$$a = 2b = 3c \quad \text{tj.} \quad b = \frac{1}{2}a$$

$$c = \frac{1}{3}a$$

Kako je

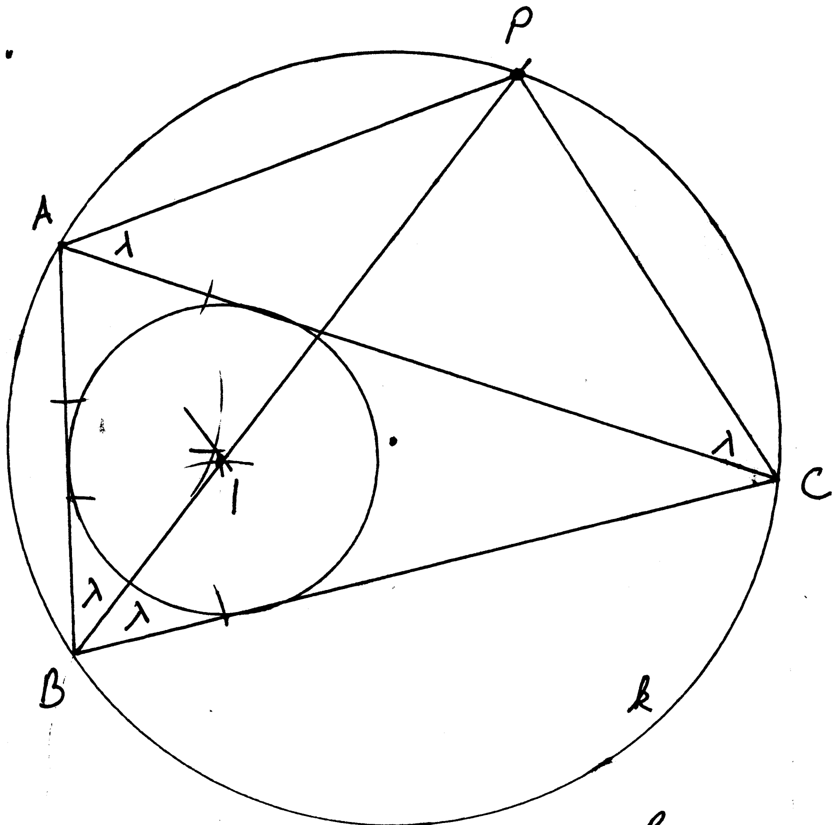
$$b + c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a = \frac{5}{6}a$$

tj. $b + c < a$

trougao sa datim dužinam visina ne postoji (zbir dvije stranice mora biti veći od treće).

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC ($AB<BC$). Neka je k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P središte luka $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

Rj.



P središte luka AC

$\Rightarrow$ P je podjednako udaljena od tački A i C $\Rightarrow$ ΔACP jkk

$\Rightarrow \measuredangle PAC \overset{\frown}{=} \measuredangle PCA = \lambda$.

Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa imamo da

$\measuredangle PBC = \measuredangle PAC = \lambda$ i

$\measuredangle ABP \overset{\frown}{=} \measuredangle ACP = \lambda$

pa je BP simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

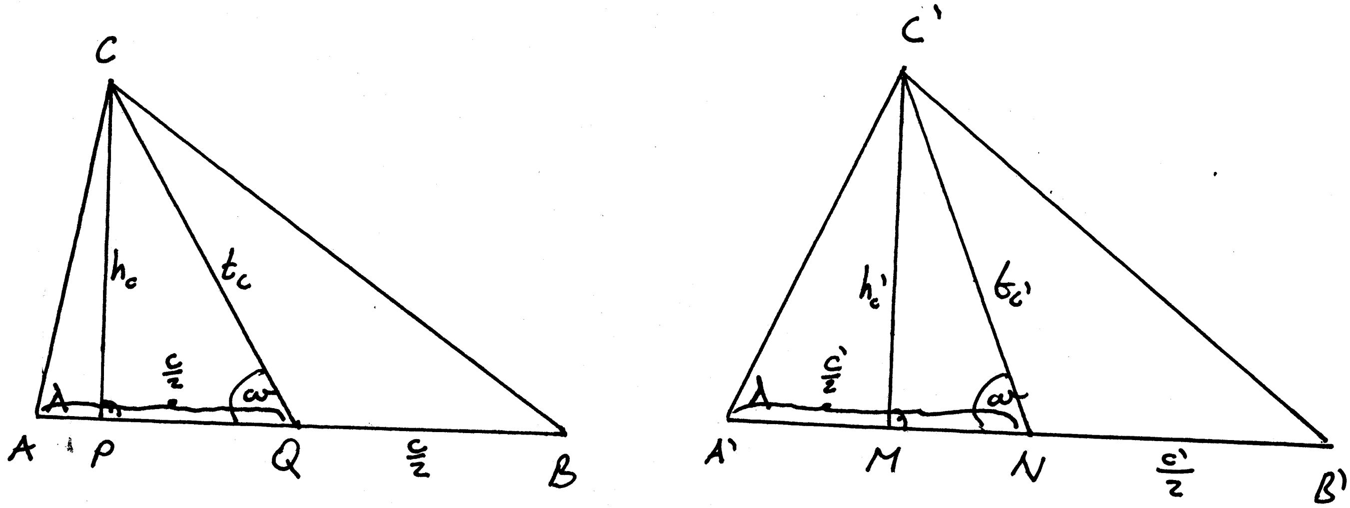
Kako je tačka I presjek simetrala uglova to je

$I \in BP$

q.e.d.

(#) Dokazati da su dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c = c'$, $h_c = h_{c'}$ i $t_c = t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ redom iz vrhova C i C'.

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike.
Posmatrajmo ΔPQC i $\Delta MNC'$.

$$\left.\begin{array}{l} CQ \cong C'N \ (t_c = t_{c'}) \\ CP \cong C'M \ (h_c = h_c') \\ \sphericalangle CPQ \cong \sphericalangle C'MN = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{naspram veće stranice}]{SSU} \Delta PQC \cong \Delta MNC'$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle AQC \cong \sphericalangle A'NC' = \omega$$

(SSU ugao naspram veće stranice)

Kako je $c = c'$ to je i $\frac{c}{2} = \frac{c'}{2}$, pa posmatrajmo ΔAQC i $\Delta A'NC'$.

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong A'N \ (\frac{c}{2} = \frac{c'}{2}) \\ \sphericalangle AQC \cong \sphericalangle A'NC' = \omega \\ CQ \cong C'N \ (t_c = t_{c'}) \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta AQC \cong \Delta A'NC'$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle CAQ \cong \sphericalangle C'A'N = \lambda$$

$$\text{i } AC \cong A'C'$$

Na kraju posmatrajmo ΔABC i $A'B'C'$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B' = \lambda \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

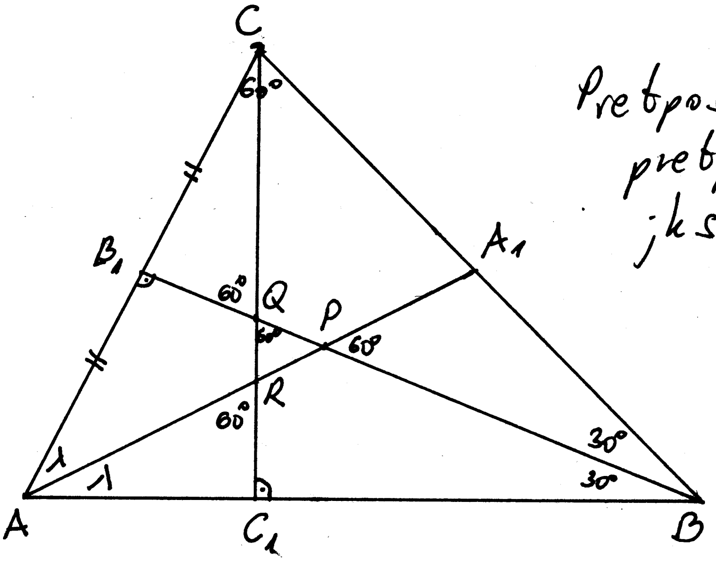
q.e.d.

Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao koga obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

R: postavka zadatka

$\triangle ABC$, CC_1 visina trougla
AA_1 simetrala $\measuredangle BAC$
BB_1 težišna duž
$AA_1 \cap CC_1 = \{R\}$, $AA_1 \cap BB_1 = \{P\}$
$BB_1 \cap CC_1 = \{Q\}$

$\Rightarrow$ $\triangle PQR$ nije jednakostraničan



$\triangle ABC$ je raznostraničan trougao.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $\triangle PQR$ jks, tj. $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle PQR \cong \measuredangle QRP = 60^\circ$.

$\triangle AC_1R \Rightarrow \lambda = 30^\circ$

pa je $\measuredangle BAC = 60^\circ$

$\triangle C_1BQ \Rightarrow \measuredangle ABB_1 = 30^\circ$

$\triangle ABB_1$ ($\measuredangle B_1AB = 60^\circ$, $\measuredangle ABB_1 = 30^\circ$) $\Rightarrow \measuredangle BB_1A = 90^\circ$

$AB_1 \cong CB_1$
$\measuredangle BB_1A \cong \measuredangle BB_1C = 90^\circ$
$BB_1 \cong BB_1$

$\xRightarrow{SUS}$ $\triangle BB_1A \cong \triangle BB_1C$

$\Downarrow$

$\measuredangle ABB_1 \cong \measuredangle B_1BC = 30^\circ$
i $\measuredangle B_1AB \cong \measuredangle B_1CB = 60^\circ$

$\triangle ABC$ je jks $\Rightarrow P \equiv Q \equiv R$

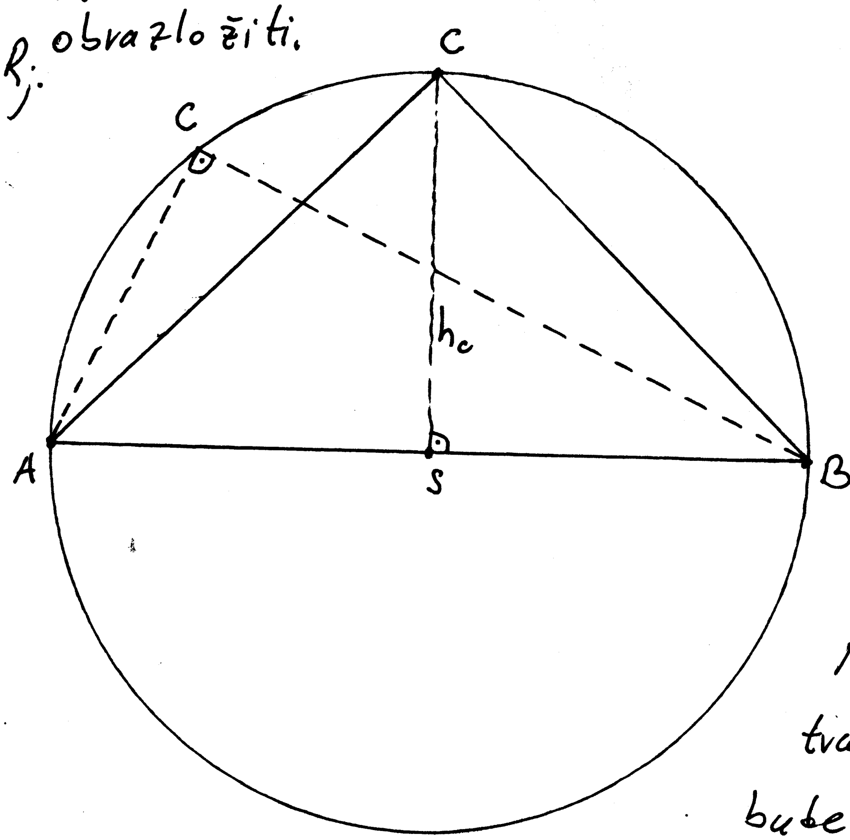
#kontradikcija
(sa pretpostavkom da je $\triangle ABC$ raznostraničan ili sa pretpostavkom da postoji $\triangle PQR$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\triangle PQR$ ne može biti jks

q.e.d.

(#) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2} \quad (h_c \text{ - visina spuštena iz vrha } C).$$

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$.

Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

(#) Neka je AB najmanja stranica trougla ΔABC i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla ΔABC. Dokazati da je $MA+MB+MC < AC+BC$.

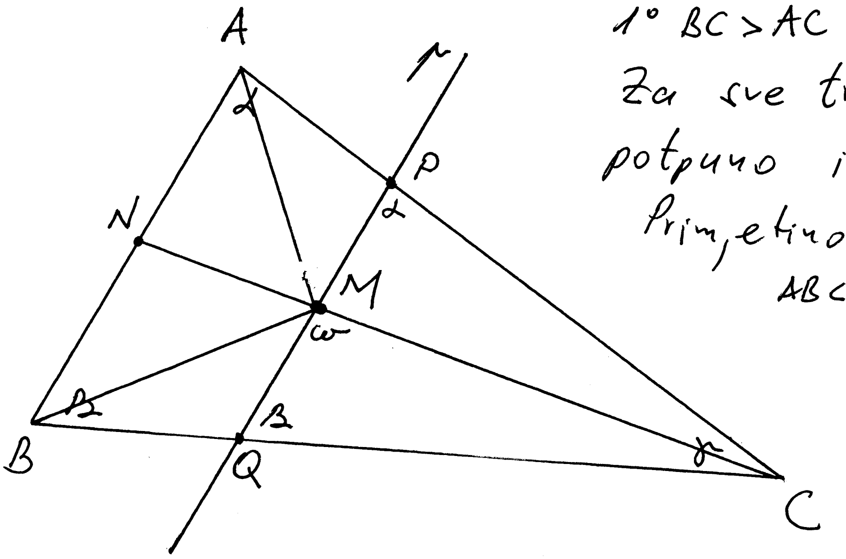
Rj.

postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ AB \text{ najmanja stranica} \\ M \text{ proizvoljna tačka u} \\ \quad \text{unutrašnjosti trougla} \end{array}\right\} \Longrightarrow MA+MB+MC < AC+BC$$

Prema pretpostavci u ΔABC najmanja stranica je AB. Za stranice AC i BC je moguć jedan od sljedeća tri slučaja

$1^\circ\ BC > AC \quad 2^\circ\ BC \cong AC \quad$ i $\quad 3^\circ\ BC < AC$



Za sve tri slučaja rješenje je potpuno isto, pa neka je $BC > AC$. Primjetimo sad da imamo

$AB < AC < BC \implies \gamma < \beta < \alpha$.

Dalje, neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla.

Kroz tačku M konstruišimo pravu p t.d. $p \parallel p(A,B)$.

$p \cap AC = \{P\}$ i $p \cap BC = Q$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\implies \measuredangle CAB \cong \measuredangle CPQ = \alpha$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(B,C)$ transferzala $\implies \measuredangle CBA \cong \measuredangle CQP = \beta$

Ugao $\measuredangle CMQ = \omega$ je vanjski ugao ΔCPM pa je $\omega > \alpha$.

Kako je $\alpha > \beta$ to je $\omega > \beta \overset{\Delta QCM}{\implies} QC > MC$

Dalje $\left.\begin{array}{l} MB < BQ + MQ \\ AM < AP + MP \end{array}\right\} + \implies MB + MA < BQ + AP + \underbrace{PM + MQ}_{=PQ}$

$MA + MB < BQ + AP + PQ \overset{\text{ZAŠTO}}{<} BQ + AP + PC$

Konačno imamo

$$\left.\begin{array}{l} MC < QC \\ MA + MB < BQ + AP + PC \end{array}\right\} \overset{+}{\implies} MA+MB+MC < AC+BC$$

q.e.d.

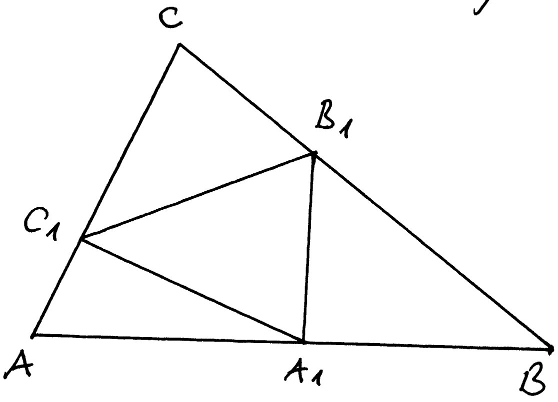
(#) Ako sva tri tjemena trougla $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC, tada je obim $\Delta A_1B_1C_1$ manji od obima trougla ΔABC. Dokazati.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ A_1, B_1, C_1 \in \text{unutrašnjosti } \Delta ABC\end{array}\right\} \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}.$$

Prije nego što počnemo rješavati naš zadatak razmotrimo dva specijalna slučaja ovog zadatka:

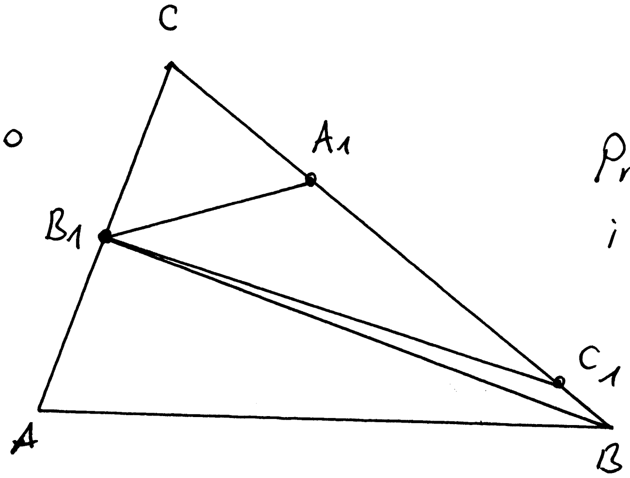
1°



Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ leže na stranicama trougla i to $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$ i $C_1 \in AC$. Posmatrajmo ΔA_1BB_1, ΔC_1B_1C i ΔAA_1C. Imamo

$$\begin{array}{rl} & A_1B_1 < A_1B + BB_1 \\ & B_1C_1 < CC_1 + CB_1 \\ + & A_1C_1 < AA_1 + AC_1 \\ \hline & O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC} \end{array}$$

2°



Pretpostavimo da $A_1, C_1 \in BC$ i $B_1 \in AC$ i pokažimo da $O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$.

$$\begin{array}{rl} & A_1B = A_1B \\ & A_1B_1 < B_1C + CA_1 \\ + & B_1B < AB_1 + AB \\ \hline & O_{\Delta A_1B_1B} < O_{\Delta ABC} \quad \ldots(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & B_1C_1 < B_1B + BC_1 \\ & B_1A_1 = B_1A_1 \\ + & A_1C_1 = A_1C_1 \\ \hline & O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta B_1BA_1} \quad \ldots(2) \end{array}$$

(1) i (2) $\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$

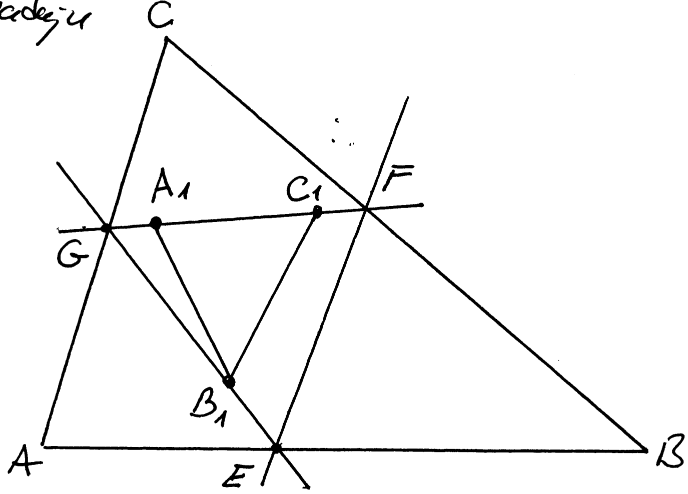
Na osnovu ova dva slučaja riješimo naš zadatak.

Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC

$p(A_1, C_1) \cap BC = \{F\}$

$p(A_1, C_1) \cap AC = \{G\}$

$p(G, B_1) \cap AB = \{E\}$



$$\left.\begin{array}{l} 1° \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG} \\ 2° \Rightarrow O_{\Delta EFG} < O_{\Delta ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

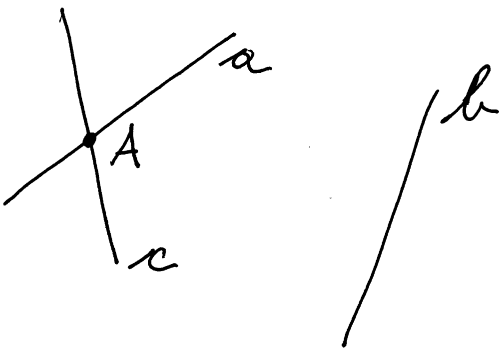
$\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG}$ q.e.d.

(#) Date su tri komplanarne prave a, b, c. Ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$ tada je $a \parallel c$. Dokazati

Rj.:

Ako prava a nije paralelna sa pravom c, kako su a i c u istoj ravni to postoji tačka A takva da

$$\{A\} = a \cap c$$



Sada tačka A sadrži dvije različite prave koje su paralelne sa pravom b #kontradikcija (sa aksiomom paralelnosti)

Prema tome mora biti $a \parallel c$.

(#) Neka su a, b i c tri prave prostora od kojih su svake dvije komplanarne. Tada: Ako se dvije od njih sijeku i treća sadrži tu presječnu tačku, a ako su dvije od njih paralelne i treća je paralelna sa svakom od ovih pravih. Dokazati.

Rj.

Kako su svake dvije prave komplanarne neka je

$$a, b \subseteq \alpha$$
$$a, c \subseteq \beta$$
$$b, c \subseteq \gamma$$

Primjetimo da odavde odmah slijedi da

$$\alpha \cap \beta = a, \quad \alpha \cap \gamma = b, \quad \beta \cap \gamma = c$$

1° Pretpostavimo da se prave a i b sijeku u tački A tj. $a \cap b = \{A\}$. Tada

$$\left.\begin{array}{l} A \in a \text{ i } a \subseteq \beta \Rightarrow A \in \beta \\ A \in b \text{ i } b \subseteq \gamma \Rightarrow A \in \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A \in \beta \cap \gamma = c$$

$A \in c$. Slično bi pokazali i za $a \cap c = \{A\}$ ili za $b \cap c = \{A\}$.

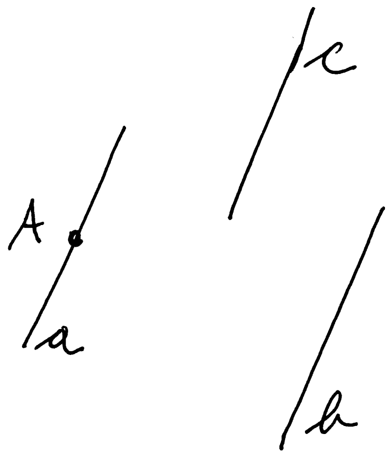
2° $a \| b \Rightarrow$ ako bi $a \cap c = \{A\}$, prema prvom dijelu zadatka bi imali $A \in b$ tj. $a \cap b = \{A\}$

#kontradikcija (sa $a \| b$)

Prema tome $a \| c$.

(#) Neka su a, b i c tri prave u prostoru. Ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$ tada je $a \parallel c$. Dokazati.

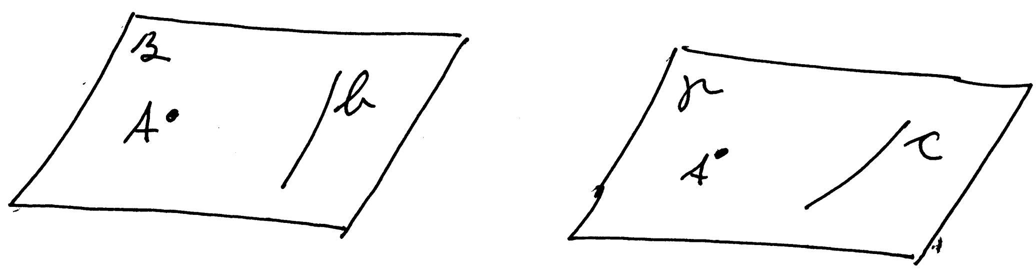
Rj



Uzmimo na pravoj A tačka A, i neka su β i γ dvije ravni takve da

$$A \in \beta \text{ i } b \subseteq \beta$$

$$\text{i } A \in \gamma \text{ i } c \subseteq \gamma.$$



Kako je $A \in \beta \wedge \gamma$ ($A \in \beta$ i $A \in \gamma$) to $\exists a'$ t.d.

$$a' = \beta \wedge \gamma$$

Sada su: a' i b komplanarne (jer pripadaju ravni β)
a' i c komplanarne (jer pripadaju ravni γ)
b i c komplanarne (jer su paralelne)

Dakle imamo tri prave u prostoru a', b, c od kojih su svake dvije komplanarne i $b \parallel c$. Na osnovu prethodnog zadatka $a' \parallel b$ i $a' \parallel c$.

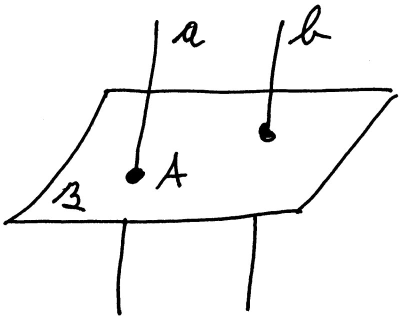
Ako bi a i a' bile dvije različite prave tada bi tačka A sadržavala dvije prave a i a' od koje su obe paralelne su pravom b # kontradikcija (sa aksiomom paralelnosti)

$\Rightarrow a \parallel c$ q.e.d.

Prava a je <u>paralelna</u> sa ravni α ako je ona paralelna sa svojom normalnom projekcijom na tu ravan. To zapisujemo ovako $a \parallel \alpha$.

(#) Ako jedna od dvije paralelne prave siječe ravan siječe je i druga. Dokazati.

Rj: Neka je $a \parallel b$ i pretpostavimo da prava a siječe ravan β u tački A.

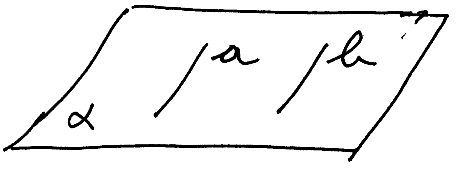


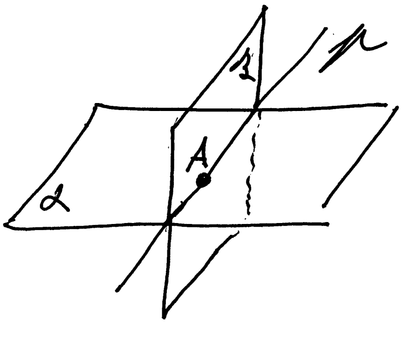
$a \parallel b$, β : $\beta \cap a = \{A\}$

Trebamo dokazati da i prava b siječe ravan β.

Pretpostavimo SUPROTNO, tj. predpostavimo da b ne siječe β. Kako su a i b paralelne one određuju neku ravan α

$a \parallel b \quad \alpha$

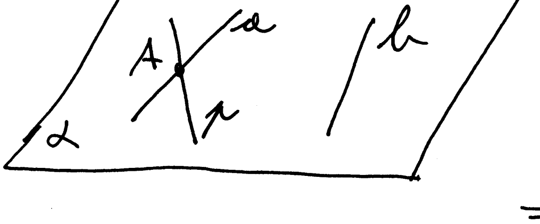




$A \in \alpha$ i $A \in \beta \Rightarrow \exists!\, p = \alpha \cap \beta$

Kako b ne siječe β to $b \cap p = \emptyset$.

Sada u ravni α postoje dvije prave a i p od kojih svaka sadrži tačku A a ne siječe pravu b



#kontradikcija
(sa aksiomom paralelnosti)

$\Rightarrow b$ siječe ravan β

Prava a je normalna (okomita) na ravan α ako ona siječe ravan u nekoj tački A i ako je okomita (normalna) na svaku pravu iz ravni α koja sadrži tačku A. To zapisujemo ovako $a \perp \alpha$.

#̌ Ako je jedna od dvije paralelne prave normalna na ravan normalna je i druga. Dokazati.