Elementarni zadaci - Dokazi u vezi trougla

Elementarna pitanja:

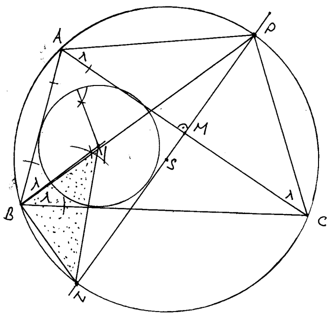
1. Nabrojati svih pet stavova o podudarnosti trouglova! Koju dodatnu osobinu stav SSU mora zadovoljiti?
2. Šta je π? Šta je stepen? Šta je prav ugao? Kako pomoću šestara podjeliti ugao na tri dijela sa vrlo vrlo približnom tačnošću?
3. Šta je srednja linija trougla i koje osobine ima?

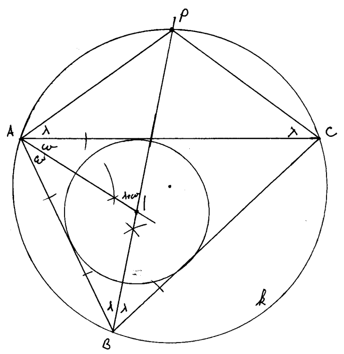
1. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$, $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M, S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A, C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

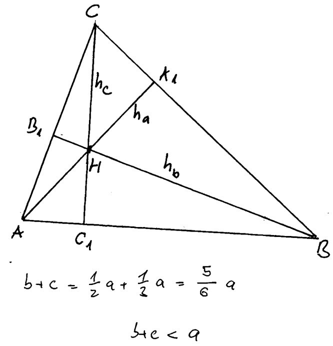
2. Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC), k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B, I)$ i kruga k. Dokazati da je $\triangle AIP$ jednakokraki.

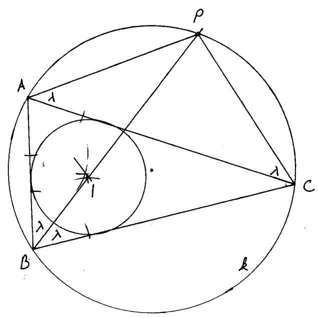
3. Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\,cm$, $h_b = 4\,cm$ i $h_c = 6\,cm$?

4. Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC). Neka je k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P središte luka AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.





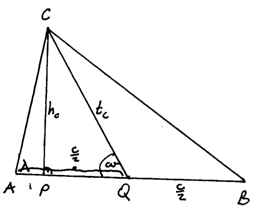


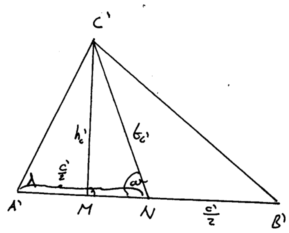


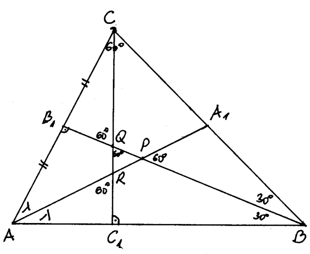
5. Dokazati da su dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarna ako je $c = c'$, $h_c = h_{c'}$ i $t_c = t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ redom na stranice c i c'.

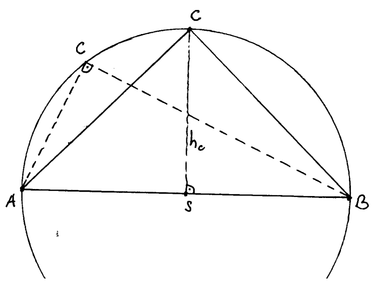
6. Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednkostraničan.

7. Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.









8. Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $MA + MB + MC < AC + BC$.

9. Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti $\triangle ABC$, tada je obim $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

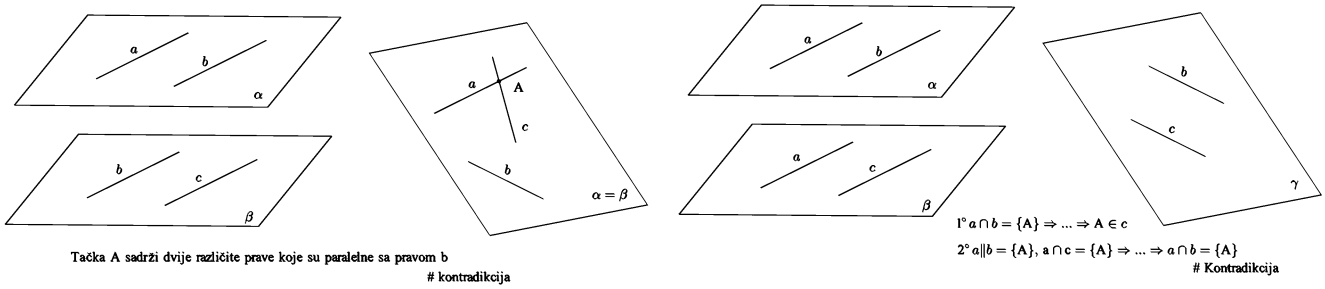
Aksioma paralelnosti

Još od doba starih grka pa sve do 19 vijeka postavljalo se pitanje koliko je pravih koje sadrže tačku A a ne sijeku pravu a ($A \notin a$). Tek je u 19 vijeku postalo jasno da se ovaj problem ne može riješiti na osnovu do tada poznatih aksioma i njihovih posljedica. Problem je riješen tako što je uvedena nova aksioma - aksioma paralelnosti. To je aksioma koja čini V grupu aksioma

V_E Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoji u ravni aA jedna i samo jedna prava koja je incidentna sa tačkom A i ne siječe pravu a.

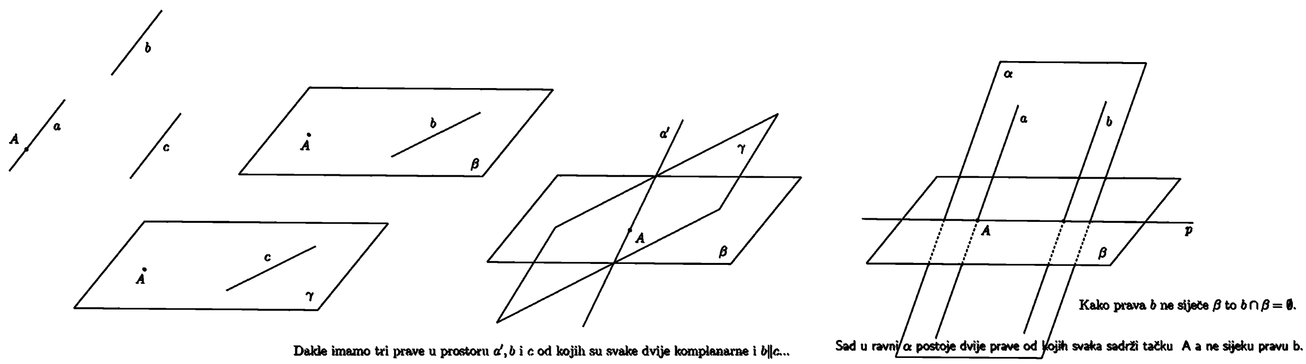
10. Date su tri komplanarne prave a, b, c. Ako je $a \| b$ i $b \| c$ tada je $a \| c$. Dokazati.

11. Neka su a, b i c tri prave prostora od kojih su svake dvije komplanarne. Tada: Ako se dvije od njih sijeku i treća sadrži tu presječnu tačku, a ako su dvije od njih paralelne i treća je paralelna sa svakom od ovih pravih. Dokazati.



12. Neka su a, b i c tri prave u prostora. Ako je $a \| b$ i $b \| c$ tada je $a \| c$. Dokazati.

Prava a je <u>paralelna</u> sa ravni α ako je ona paralelna sa svojom normalnom projekcijom na tu ravan. To zapisujemo ovako $a \| \alpha$.

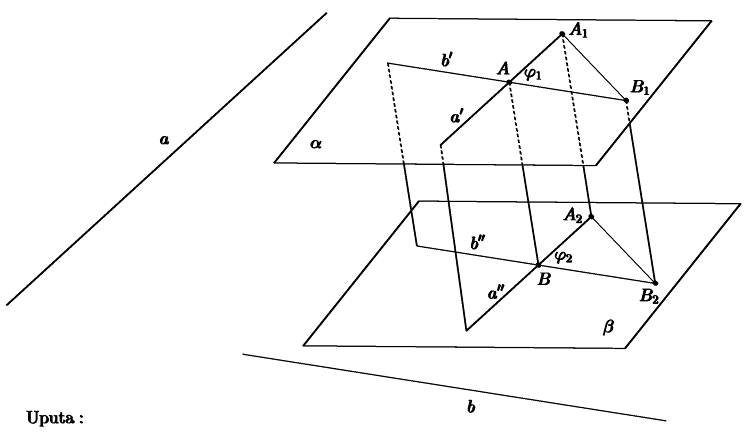


13. Ako jedna od dvije paralelne prave siječe ravan siječe je i druga. Dokazati.

Prava a je <u>*normalna*</u> (<u>*okomita*</u>) na ravan α ako ona siječe ravan u nekoj tački A i ako je okomita (normalna) na svaku pravu iz ravni α koja sadrži tačku A. To zapisujemo ovako $a \perp \alpha$.

14. Ako je jedna od dvije paralelne prave normalna na ravan normalna je i druga. Dokazati.

15. <u>*Ugao između mimoilaznih pravih*</u> a i b definiše se kao ugao između pravih a' i b' koje se sijeku i pri tome je $a' \| a$ i $b' \| b$. Dokazati da ugao između mimoilaznih pravih a i b ne zavisi od izbora pravih a' i b', tj. da su svi tako dobijeni uglovi međusobno podudarni.



Uputa :

Prvo formiramo dvije ravni, a poslije toga posmatramo tri paralelograma.
Da je treći četverougao paralelogram slijedi na osnovu prva dva paralelogram.
Podudarnost trouglova slijedi iz stava SSS.