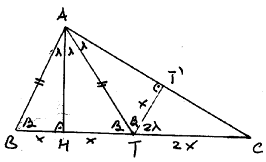
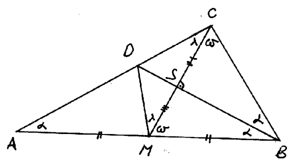
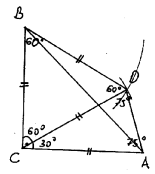
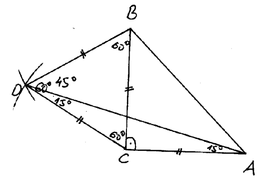
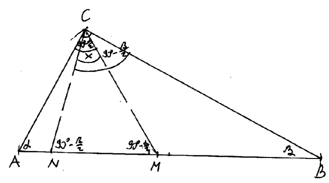
Elementarni zadaci iz EG I - Računanje uglova u trouglu

1. Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$. $[\alpha = 90°, \beta = 60°, \gamma = 30°]$

2. U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na simetralu BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$. $[\alpha = 30°, \beta = 60°, \gamma = 90°]$

3. Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A, B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B, C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$. $[1°\measuredangle ADB = 135°;\ 2°\measuredangle ADB = 45°]$

4. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N tako da je $AM = AC$, $BN = BC$ i poredak $A - N - M - B$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$. $[\measuredangle NCM = 45°]$

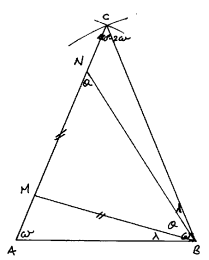
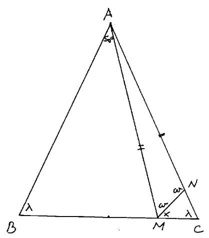
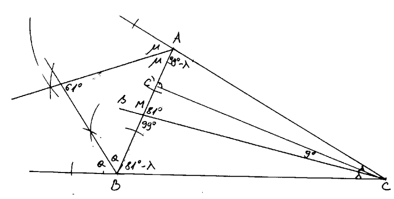
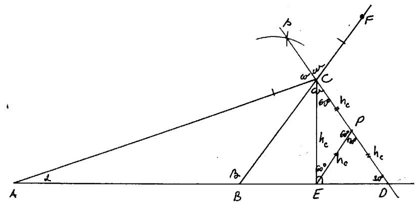






5. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$? $[\measuredangle ABN = 60°]$

6. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$. $[\measuredangle CMN = 25°]$

7. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove $\triangle ABC$. $[\alpha = 70°, \beta = 52°, \gamma = 58°]$

8. Nacrtati trougao $\triangle ABC$, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označimo sa E. Produžimo stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A, B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$. $[\beta - \alpha = 60°]$

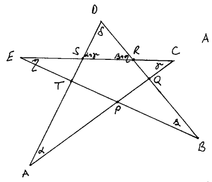
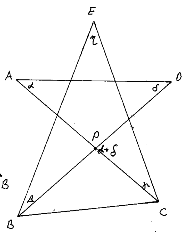
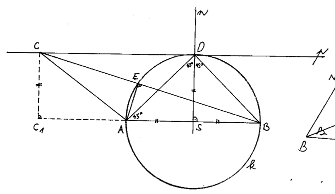
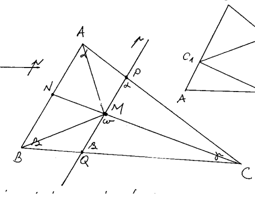
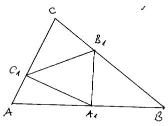
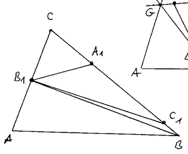
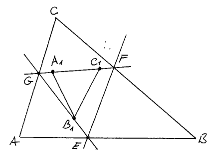
Ponavljanje gradiva iz EG I - Podudarnost trougla

9. Naći zbir $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta$ uglova u tjemenima "petokrake zvijezde". (Zvijezda je nacrtana slobodno).

10. U trouglu je jedna stranica podudarna dvostruko odgovarajućoj visini. Dokazati da ugao naspram te stranice ne može da bude tup.

11. Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Naći uglove trougla.

12. Dokazati da se simetrale stranica trougla sijeku u jednoj tački S (S je centar opisane kružnice trougla).

13. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

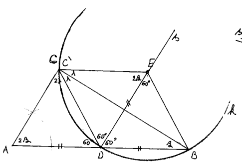
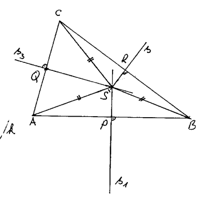
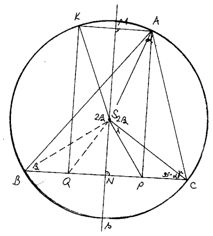
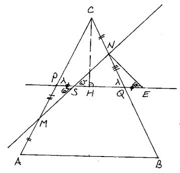
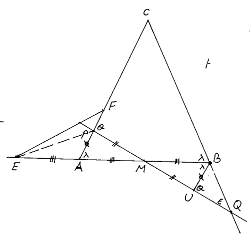
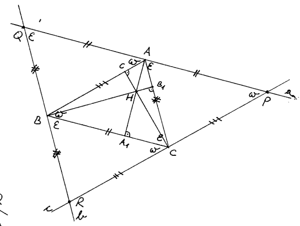
14. Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N redom, tako da je $CM + CN \cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

15. Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je $(P - M - Q)$. Dokazati da je $PQ > AB$.

16. Dokazati da se visine trougla sijeku u jednoj tački H (H zovemo ortocentar trougla).

17. Unutar $\triangle ABC$ uzeta je tačka M takva da je $\measuredangle MBA = 30°$, $\measuredangle MAB = 10°$. Odrediti ugao $\measuredangle AMC$, ako je $\measuredangle ACB = 80°$ i $AC \cong BC$.

18. Odrediti uglove trougla kod kojeg je centar opisane kružnice simetričan centru upisane kružnice u odnosu na jednu od njegovih stranica.

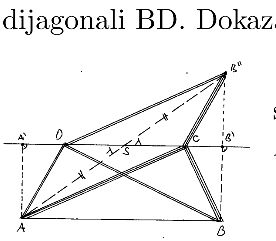







19. U unutrašnjosti kvadrata $\square ABCD$ data je tačka E takva da je $\triangle CDE$ jednakokraki sa uglovima kod C i D od $15°$. Dokazati da je $\triangle ABE$ jednakostraničan.

20. Duž koja spaja sredine dvije susjedne stranice trougla se zove srednja linija trougla. Neka su P i Q redom sredine stranica AB i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $PQ = \frac{1}{2}BC$ i da je $p(P,Q)||p(B,C)$.

21. Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

22. Dijagonala AC konveksnog četverougla $\square ABCD$ polovi njegov obim, a njena sredina pripada dijagonali BD. Dokazati da je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.



23. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od tjemena CD su podudarna, a pored toga je $AC + CB \cong AD + DB$. Dokazati da je $AD \cong BC$ i $AC \cong BD$.

24. Dokazati da većoj visini odgovara manja stranica i obrnuto.

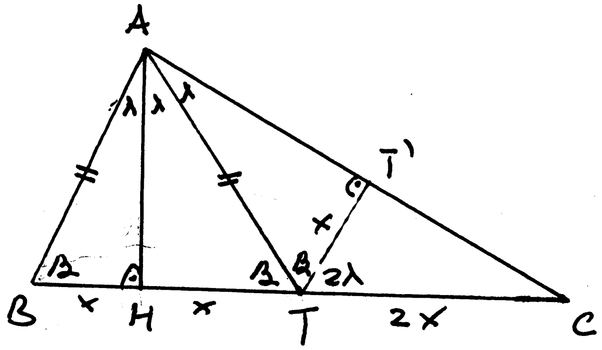
25. Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

26. U trouglu $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko trougla $\triangle BCI$ nalazi na presjeku poluprave $pp[A,I)$ i kružnice koja je opisana oko trougla $\triangle ABC$.

27. Neka je I centar upisane kružnice trougla $\triangle ABC$. U unutrašnjosti $\triangle ABC$ data je tačka P takva da je $\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB$. Dokazati da je $AP \geq AI$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se tačka P podudara sa tačkom I.

(#) Težišnica i visina iz vrha A u ΔABC dijele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla ΔABC?

Rj.



Uvedimo oznake za vrhove i uglove kao na slici.

Primijetimo da je zbog podudarnosti USU $\Delta AHB \cong \Delta AHT$

$\Downarrow$

$BH \cong HT = x$

Neka je T' ortogonalna projekcija tačke T na AC.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle TT'A \cong \measuredangle ABH = 90^\circ \\ \measuredangle TAT' \cong \measuredangle BAH = \lambda \\ TA \cong BA \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta TT'A \cong \Delta BHA$$

$\Downarrow$

$BH \cong TT' = x$ i $\measuredangle T'TA \cong \measuredangle HBA = \beta$

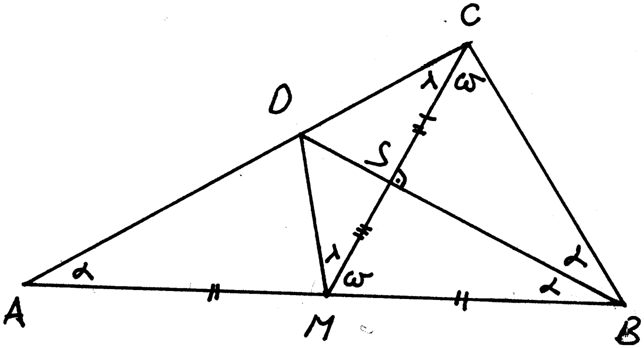
Kako je $2\beta + 2\lambda = 180^\circ \Rightarrow \measuredangle CTT' = 2\lambda$. $\Delta TT'C$ je pravougli pa

$$\cos 2\lambda = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\lambda = 60^\circ \Rightarrow \lambda = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 30^\circ$$

\# U trouglu ΔABC je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla ΔABC.

Rj.



CM težišna duž

BD simetrala

BD simetrala; Kako je $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC = 2\alpha$

to je $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABD$ jkk sa osnovicom $AB \Rightarrow DM$ visina trougla ΔABD

Neka je $\{S\} = CM \cap BD$

$$\left.\begin{array}{r} \measuredangle MSB \cong \measuredangle CSB = 90^\circ \\ BS \cong BS \\ \measuredangle MBS \cong \measuredangle CBS = \alpha \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta MBS \cong \Delta CBS$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong CS \quad i \quad \measuredangle BMS \cong \measuredangle BCS = \omega$$

Dalje imamo

$$\left.\begin{array}{r} MS \cong CS \\ \measuredangle MSD \cong \measuredangle CSD = 90^\circ \\ DS \cong DS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta MSD \cong \Delta CSD$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle DMS \cong \measuredangle DCS = \lambda$$

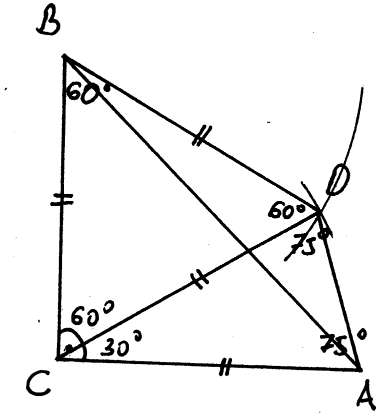
$\gamma = \lambda + \omega$ i $\lambda + \omega = 90^\circ$ (DM je visina ΔABD) $\Rightarrow \gamma = 90^\circ$

$3\alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

(#) Dat je jednakokraki-pravougli trougao ΔABC s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao ΔBCD (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

Rj.

a)



ΔBCD jks $\Rightarrow \measuredangle DBC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDB = 60^\circ$

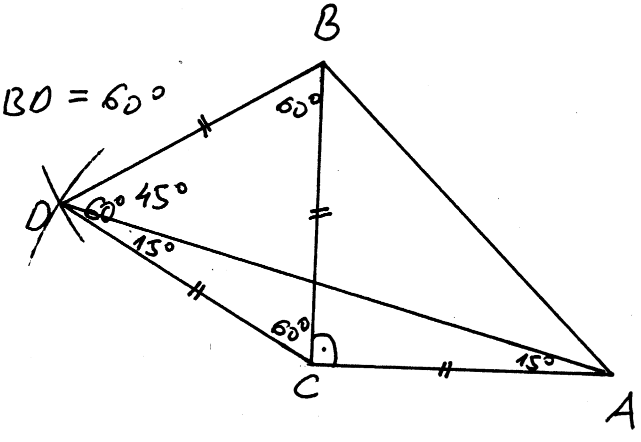
ΔABC pravougli $\Rightarrow \measuredangle ACD = 30^\circ$

ΔACD jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 75^\circ$

$\measuredangle ADB = 135^\circ$

b)



ΔBCD jkk $\Rightarrow \measuredangle BCD = \measuredangle BDC = \measuredangle CBD = 60^\circ$

$\measuredangle ACD = 150^\circ$

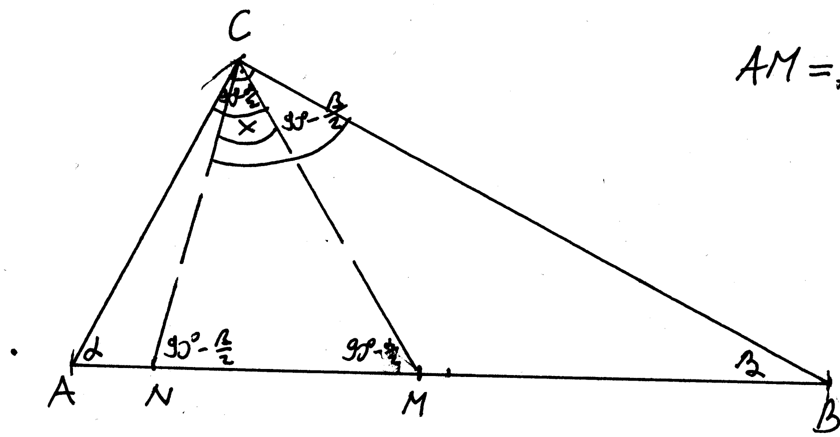
ΔACD jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 15^\circ$

$\measuredangle ADB = 45^\circ$

Na hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N tako da je $AM = AC$, $BN = BC$ i poredak $A-N-M-B$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$.

Rj.



$AM = AC \Rightarrow \triangle AMC$ jkk

$\Rightarrow \measuredangle AMC = \measuredangle ACM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$BN = BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BCN$ jkk

$\Rightarrow \measuredangle BNC = \measuredangle BCN = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$

Traženi ugao $\measuredangle MCN$ označimo sa x. Sad imamo

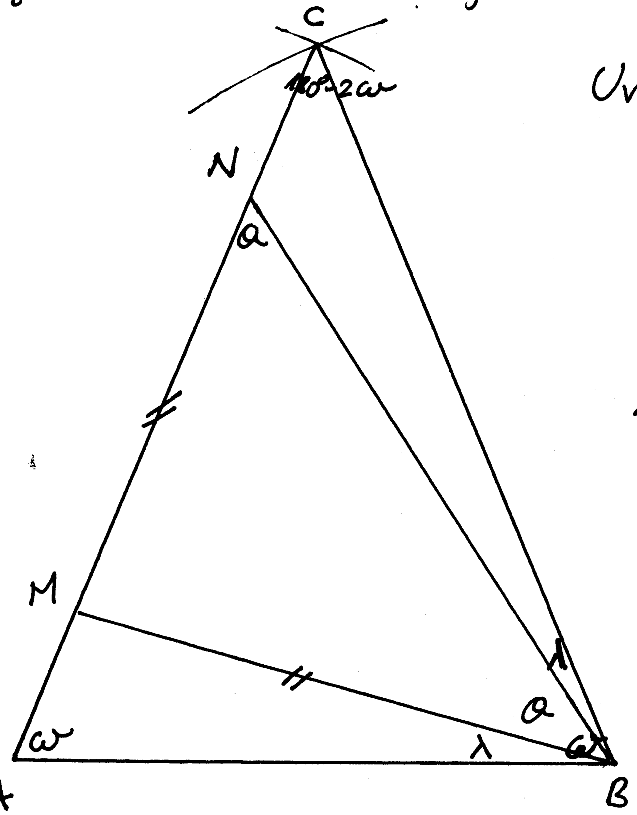
$$\left.\begin{aligned} \triangle MCN &\Rightarrow 90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + x = 180^\circ \\ \measuredangle BCA &\Rightarrow 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} - x = 90^\circ \end{aligned}\right\} - \Rightarrow$$

$$2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$

$$\measuredangle NCM = 45^\circ.$$

(#) Dat je jednakokraki trougao ΔABC $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

Rj.



Uvedimo oznake

$\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN = \lambda$
(prema pretpostavci)

ΔABC jkk $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAC = \omega$.

ΔBMN jkk $\Rightarrow \measuredangle MBN \cong \measuredangle BNM = \alpha$.

Sad primjetimo

$\measuredangle ABC = 180° - 2\omega$

Kako je $\measuredangle BNA$ vanjski ugao ΔABC to je

$\alpha = 180° - 2\omega + \lambda$

(kako je $\measuredangle BMA$ vanjski ugao ΔABM) $\Longrightarrow$

$$\measuredangle AMB = 2\alpha = 360° - 4\omega + 2\lambda$$

Posmatrajmo trougao ΔABM.

$$\omega + \lambda + 360° - 4\omega + 2\lambda = 180°$$

$$3\omega - 3\lambda = 180° \quad /:3$$

$$\omega = 60° + \lambda \Rightarrow \alpha = 180° - 120° - 2\lambda + \lambda$$

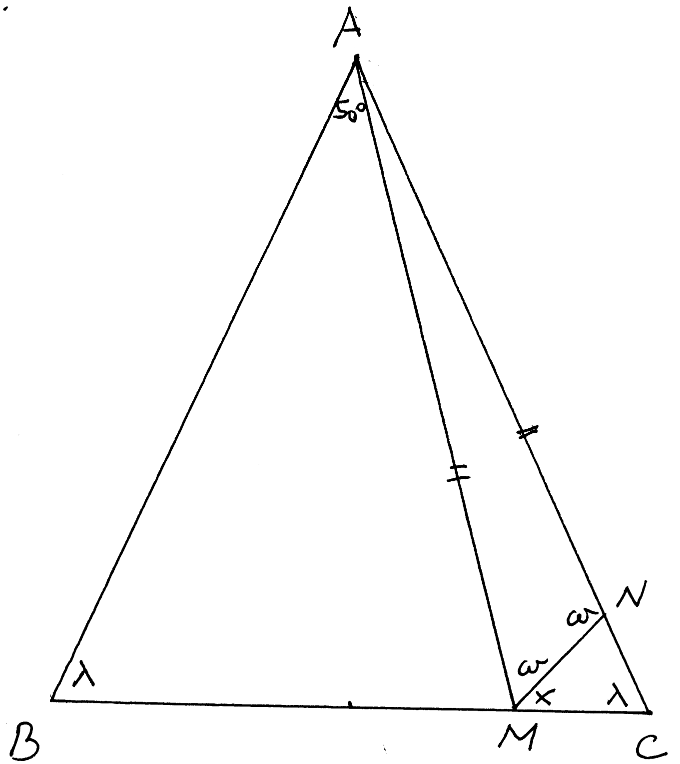
$$\alpha = 60° - \lambda$$

Na kraju $\measuredangle ABN = \lambda + \alpha = \lambda + 60° - \lambda = 60°$

$$\measuredangle ABN = 60°.$$

(#) Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50^\circ$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50^\circ$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Rj.



$\measuredangle MNA$ je vanjski ugao ΔMCN

$$\omega = x + \lambda \quad \ldots (1)$$

$\measuredangle AMC$ je vanjski ugao ΔABM

$$50^\circ + \lambda = \omega + x \quad \ldots (2)$$

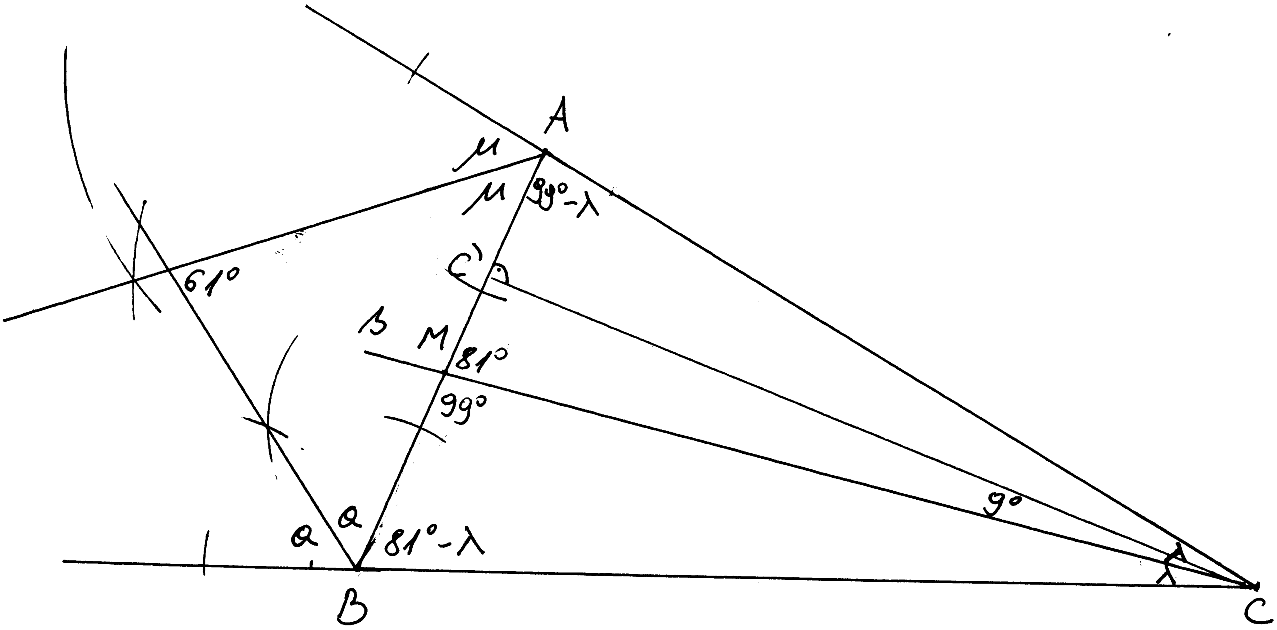
$(1)+(2)$: $\quad \omega + 50^\circ + \lambda = x + \lambda + \omega + x$

$$2x = 50^\circ$$

$$x = 25^\circ$$

(#) U oštrouglom trouglu ΔABC $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove ΔABC.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta CMC'$ pravougli $\Rightarrow$ $\sphericalangle CMC' = 81°$; $\sphericalangle BMC = 99°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 99° - \lambda$; $\beta = 81° - \lambda$

$$\left.\begin{aligned} 2\mu + 99° - \lambda = 180° &\Rightarrow 2\mu = 81° + \lambda \\ 2\theta + 81° - \lambda = 180° &\Rightarrow 2\theta = 99° + \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\mu + 2\theta = 180° + 2\lambda \quad \ldots (*)$$

$\theta + \mu + 61° = 180° \quad / \cdot 2$

$2\theta + 2\mu + 122° = 360°$

$2\theta + 2\mu = 238° \quad \ldots (**)$

$(*) ; (**) \Rightarrow$

$180° + 2\lambda = 238°$

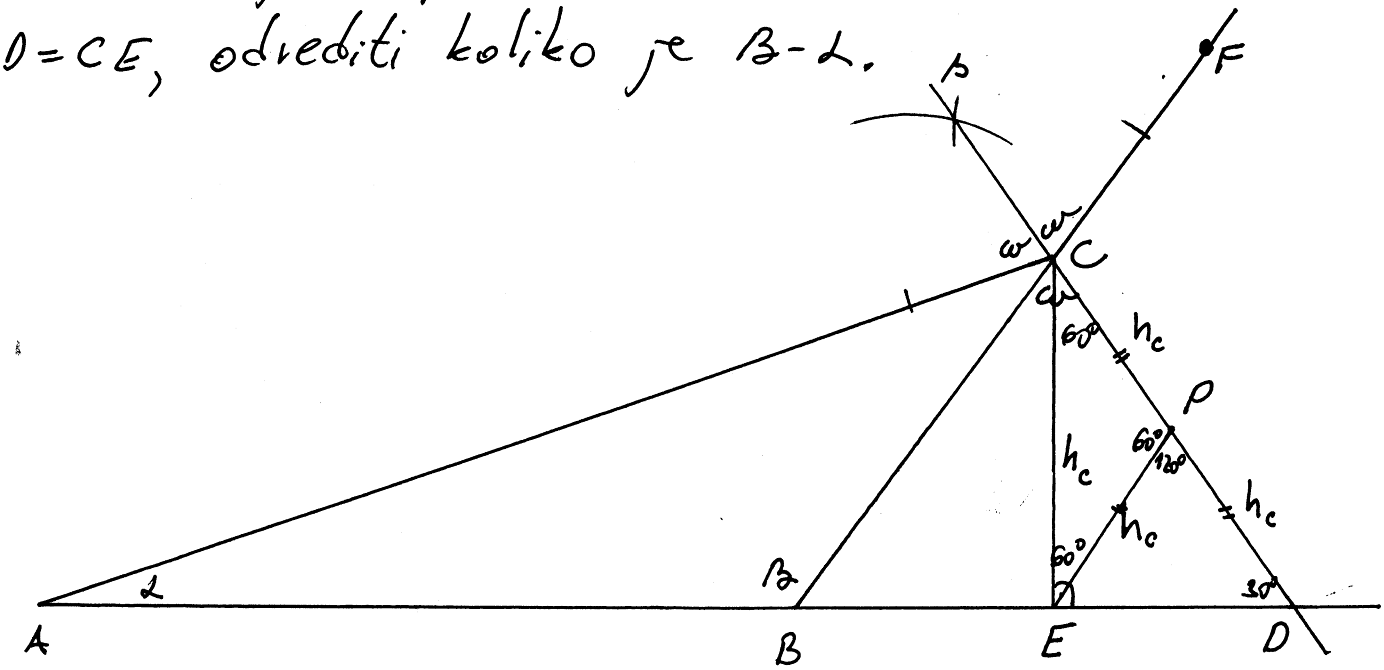
$2\lambda = 58°$

$\lambda = 29°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 70°$, $\beta = 52°$; $\gamma = 58°$

Nacrtaj trougao $\triangle ABC$, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označi sa E. Produži stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Rj.



Označimo sa s simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Ako $\measuredangle ACF$ označimo sa 2ω (gdje je $F \in pp[B,C)$ t.d. $B-C-F$) primjetimo da je $\measuredangle BCD = \omega$ (unakrsni uglovi).

Sad posmatrajmo $\triangle EDC$ (pravougli trougao) kod kojeg imamo da je $CD = 2h_c$. Ako sa P označimo sredinu stranice CD možemo primjetiti da je $CP \cong DP = h_c$ i da je $EP = h_c$ (ZAŠTO?).

$\triangle EPC$ jks $\Rightarrow \measuredangle EPC = 60° \Rightarrow \measuredangle EPD = 120° \overset{\triangle EDP \text{ jkk}}{\Rightarrow} \measuredangle EDP = 30°$.

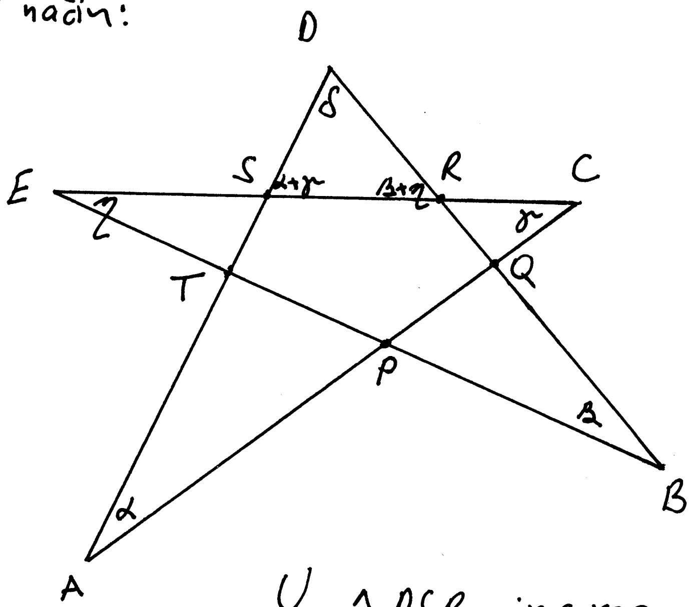
Ugao $\measuredangle ACF$ vanjski ugao $\triangle ABC \Rightarrow 2\omega = \alpha + \beta$ ... (1)

Ugao $\measuredangle ABC$ vanjski ugao $\triangle BDC \Rightarrow \beta = \omega + 30°$ tj. $\omega = \beta - 30°$ ... (2)

(1) i (2) $\Rightarrow$ $2\beta - 60° = \alpha + \beta$ $\Rightarrow$ $\beta - \alpha = 60°$ ← traženi rezultat

(#) Naći zbir $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta$ uglova u tjemenima "petokrake zvijezde". (Zvijezda je nacrtana slobodno).

Rj. I način:



$\sphericalangle DSR$ je vanjski ugao trougla $\triangle ACS$

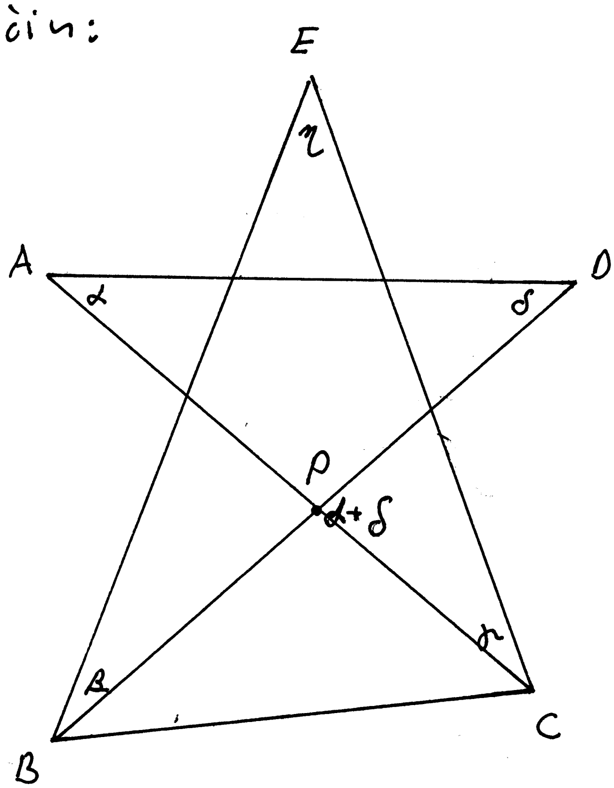
$\Rightarrow \sphericalangle DSR = \alpha+\gamma$

$\sphericalangle DRS$ je vanjski ugao $\triangle EBR$

$\Rightarrow \sphericalangle DRS = \beta+\eta$

U $\triangle DSR$ imamo $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta = 180^\circ$

II način:



$\sphericalangle DPC$ je vanjski ugao $\triangle APD$

pa je $\sphericalangle DPC = \alpha+\delta$.

$\sphericalangle DPC$ je ujedno i vanjski ugao $\triangle PBC$

pa je $\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB = \alpha+\delta$

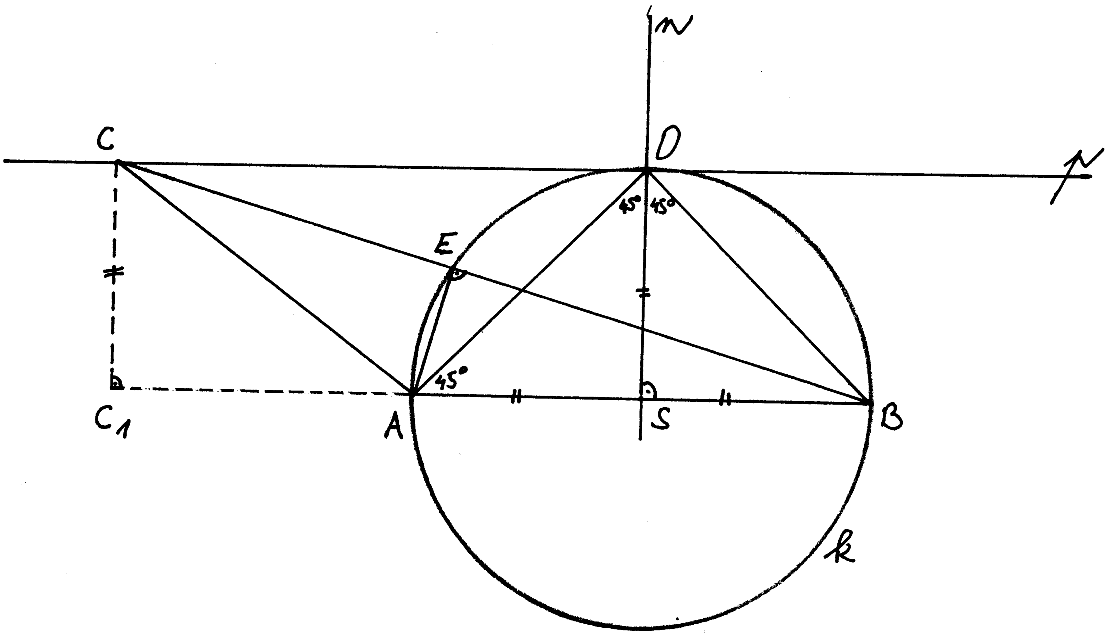
Sad imamo

$$\beta + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB + \gamma + \eta = 180^\circ \quad tj.$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta = 180^\circ.$$

U trouglu je jedna stranica podudarna dvostruko odgovarajućoj visini. Dokazati da ugao naspram te stranice ne može da bude tup.

Rj.



Neka je dat $\triangle ABC$ takav da je $AB = 2CC_1$ gdje je CC_1 visina spuštena iz vrha C. Treba dokazati da $\measuredangle ACB$ nije tup.
Sa S označimo sredinu stranice AB i kroz tačku C povucimo pravu $p \parallel p(A,B)$. Neka je $n \perp p(A,B)$ i $S \in n$.

$\{D\} = p \cap n$

Kako je $p(C_1,S) \parallel p(C,D)$ i $p(C,C_1) \parallel p(D,S)$ $\Rightarrow$ $\square C_1SDC$ paralelogram
$\Rightarrow CC_1 \cong DS$

Primjetimo, kako je S sredina stranice AB, da $AS \cong BS \cong CC_1 \cong DS$.
Neka je k kružnica sa centrom u S poluprečnika AS.
Tad, kružnica k je opisana oko $\triangle ABD$, i ima tangentu p u tački D.
Moguća su dva slučaja:

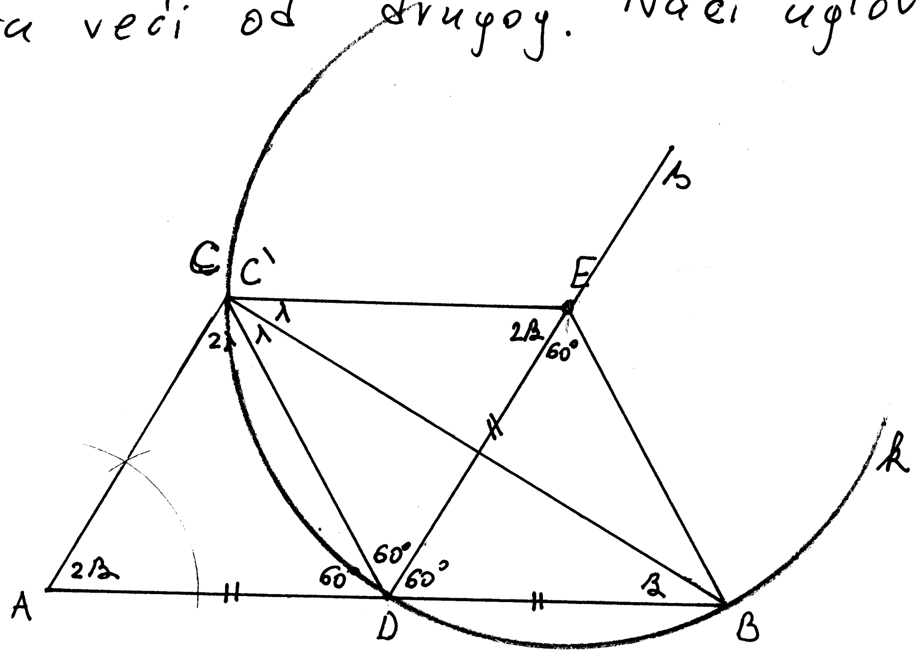
1° $D \equiv C$

Tad $\measuredangle ACB = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\measuredangle ACB$ nije tup
q.e.d.

2° $D \not\equiv C$
Tad, kako je $C \in p$, tačka C pripada vanjskom dijelu kružnice $k(S, AS)$.
Pretpostavimo da je $C \in pr[n, A)$. $\{E\} = BC \cap k$.
Ugao $\measuredangle AEB$ je nad prečnikom $\Rightarrow \measuredangle AEB = 90^\circ$ vanjski ugao $\triangle ACE$ $\Rightarrow \measuredangle ACB$ nije tup
q.e.d.

(#) Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Nađi uglove trougla.

Rj.



Neka je D sredina stranice AB, ΔABC. Prema postavi zadatka imamo $\measuredangle CAB = 2\beta$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACD = 2\lambda$, $\measuredangle BCD = \lambda$.

$$3\beta + 3\lambda = 180^\circ \Rightarrow \beta + \lambda = 60^\circ$$

$\measuredangle ADC$ je vanjski ugao ΔCDB $\Rightarrow$ $\measuredangle ADC = 60^\circ$ $\Rightarrow$ $\measuredangle CDB = 120^\circ$.

Na simetrali s ugla $\measuredangle CDB$ uzmimo tačku E takvu da je $DE \cong AD$. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong DE \\ \measuredangle ADC \cong \measuredangle EDC = 60^\circ \\ CD \cong CD \end{array}\right\} \xRightarrow{sus} \Delta ADC \cong \Delta EDC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle CAD \cong \measuredangle DEC = 2\beta, \quad i \quad \measuredangle ACD \cong \measuredangle ECD$$

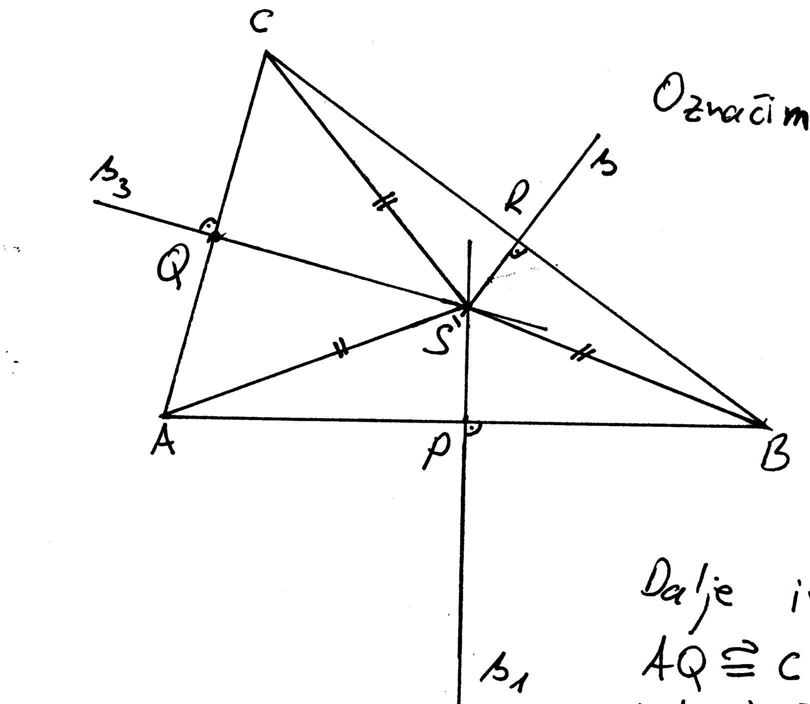
Primjetimo da je ΔDBE jkk sa uglom pri vrhu od 60° $\Rightarrow$ $\measuredangle DEB \cong \measuredangle DBE = 60^\circ$. $\Rightarrow$ ΔDEB jks.

Opišimo kružnicu k sa centrom u E poluprečnika ED. Neka je $k \cap p(B,C) = C'$. Kako je $\measuredangle DBC'$ oštri periferijski ugao njemu odgovara dvostruki centralni ugao $\measuredangle DEC' = 2\beta$. Ovo je moguće jedino u slučaju $C \equiv C'$ pa $D, B, C \in k$. $\Rightarrow$ $DE \cong CE$ $\Rightarrow$ ΔCDE jkk sa osnovicom CD $\Rightarrow$ $2\lambda = 60^\circ$ $\Rightarrow$ $\lambda = 30^\circ$ $\Rightarrow$ $\beta = 30^\circ$ pa $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

Dokazati da se simetrale stranica trougla sijeku u jednoj tački S (S je centar opisane kružnice trougla).

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{ll} s_1 \text{ simetrala stranice } & AB \\ s_2 \text{ simetrala stranice } & BC \\ s_3 \text{ simetrala stranice } & AC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \{S\}$$



Neka je $s_1 \cap s_3 = \{S'\}$

Označimo sa $\{P\} = AB \cap s_1$ i sa $\{Q\} = AC \cap s_3$.

Posmatrajmo $\triangle APS'$ i $\triangle BPS'$

$$\left.\begin{array}{l} AP \cong BP \\ \measuredangle APS' \cong \measuredangle BPS' = 90^\circ \\ PS' \cong PS' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle APS' \cong \triangle BPS' \Rightarrow AS' \cong BS'$$

Dalje imamo

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong CQ \\ \measuredangle AQS' \cong \measuredangle CQS' = 90^\circ \\ QS' \cong QS' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle AQS' \cong \triangle CQS' \Rightarrow AS' \cong CS'$$

Označimo sa s pravu koja prolazi kroz tačku S' i okomita je na pravu $p(B,C)$. Označimo sa $\{R\} = BC \cap s$

Imamo:

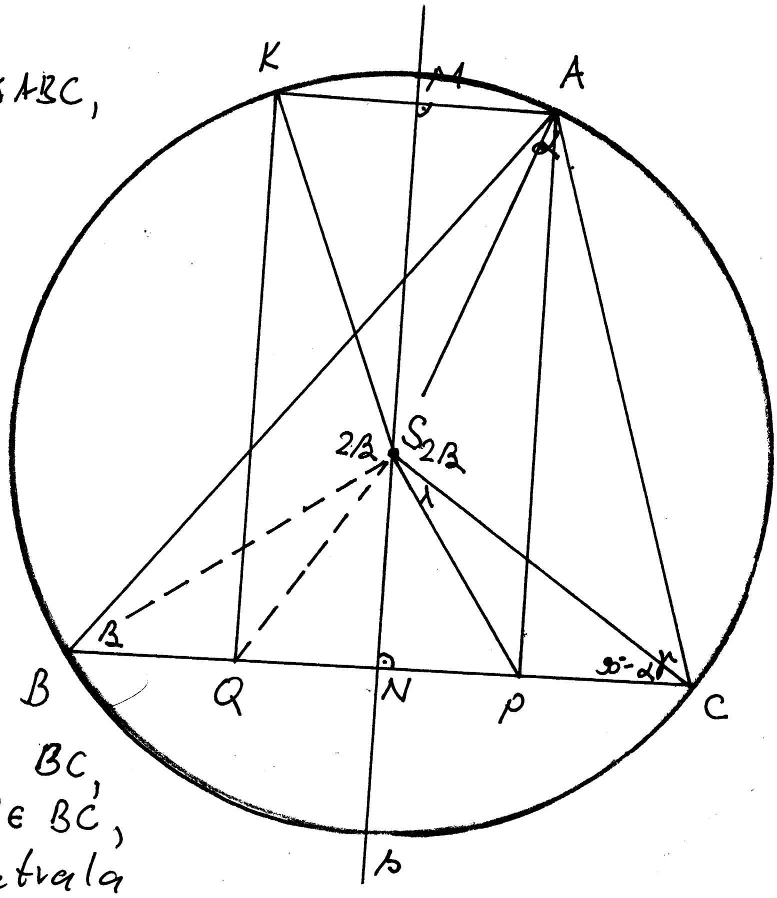
$$\left.\begin{array}{l} CS' \cong BS' \\ S'R \cong S'R \\ \measuredangle CRS' \cong \measuredangle BRS' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle CRS' \cong \triangle BRS' \Rightarrow CR \cong BR \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ s je simetrala stranice BC, pa prema našim oznakama imamo da je $s \equiv s_2$ i $S' \equiv S$ tj.

$$s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \{S\}$$

q.e.d.

(#) Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$. Dokazati da je $\angle CAB + \angle CSP < 90^\circ$.



Rj. Označimo sa $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$ i $\lambda = \angle CSP$.

Treba dokazati da je

$$\alpha + \lambda < 90^\circ.$$

Primetimo da je $\angle CSB = 2\alpha$ pa kako je $\triangle BCS$ jkk ($BS = CS = R$)

$\Rightarrow \angle PCS = 90^\circ - \alpha$.

Dokažimo da je $PS > PC$.

Neka je s simetrala stranice BC, i tačke K i Q takve da $Q \in BC$, $AK \perp s$, $PQ \perp s$ i s je simetrala duži KA i PQ. Neka je $s \cap KA = \{M\}$ i $s \cap PQ = \{N\}$.

s simetrala $BC \Rightarrow S \in s$.

Iz podudarnosti SUS vidimo da je $\angle KSM \cong \angle ASM$, $\angle QSN \cong \angle PSN$ i $\angle BSN = \angle CSN \Rightarrow \angle BSK = \angle ASC = 2\beta$.

$\angle KSA = \angle BSA - \angle BSK = \angle BSA - \angle ASC = 2\gamma - 2\beta$

Iz pretpostavke zadatka je $\gamma \geq \beta + 30^\circ \Rightarrow 2\gamma - 2\beta \geq 60^\circ$

tj. $\angle KSA \geq 60^\circ$, $\left.\begin{array}{l} \angle KSA = 60^\circ \Rightarrow AK = R \\ \angle KSA > 60^\circ \Rightarrow AK > R \end{array}\right\} \Rightarrow AK \geq R$

tj. $QP \geq R$

$$SP + R = SQ + SC > QC = QP + PC \geq PC + R \Rightarrow SP > PC.$$

U $\triangle PCS$ $\angle PCS > \angle CSP \Rightarrow 90^\circ - \alpha > \lambda$

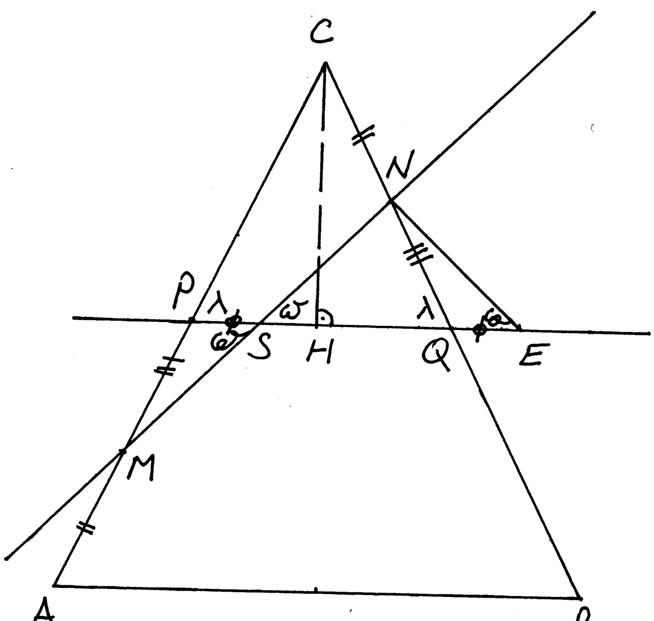
tj. $\alpha + \lambda < 90^\circ \Rightarrow \angle CAB + \angle CSP < 90^\circ$

q.e.d.

(#) Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla ΔABC date su tačke M i N redom, tako da je $CM + CN \cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ jkk sa osnovicom u } AB \\ M \in AC,\ N \in BC \text{ takve } CM + CN \cong AC \\ (M \text{ i } N \text{ nisu sredine stranica}) \\ P \text{ sredina } AC,\ Q \text{ sredina } BC \\ MN \cap PQ = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ sredina duži } MN$$



Ako sa H označim ortogonalnu projekciju iz tačke C na osnovu pravila SSU (ugao od $90°$) možemo zaključiti da je $\measuredangle CPH \cong \measuredangle CQH = \lambda$.

Kako je $CM + CN \cong AC \cong BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AM \cong CN$

P i Q su sredine bočnih strana

$\Rightarrow AP \cong PC \cong QC \cong BQ$ pa imamo $PM \cong QN$.

Uzmimo tačku $E \in pp[P,Q)$ takvu $P-Q-E$ i $QE \cong PS$.

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QN \\ \measuredangle SPM \cong \measuredangle NQE \\ \quad (= 180° - \lambda) \\ PS \cong QE \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta PMS \cong \Delta QNE$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle NEQ \cong \measuredangle MSP = \omega \text{ i } MS \cong NE$$

Kako su uglovi $\measuredangle MSP$ i $\measuredangle NSQ$ unakrsni $\Rightarrow \measuredangle PSM \cong \measuredangle NSE = \omega$

$\Rightarrow \Delta SEN$ je jkk sa osnovicom u SE tj.

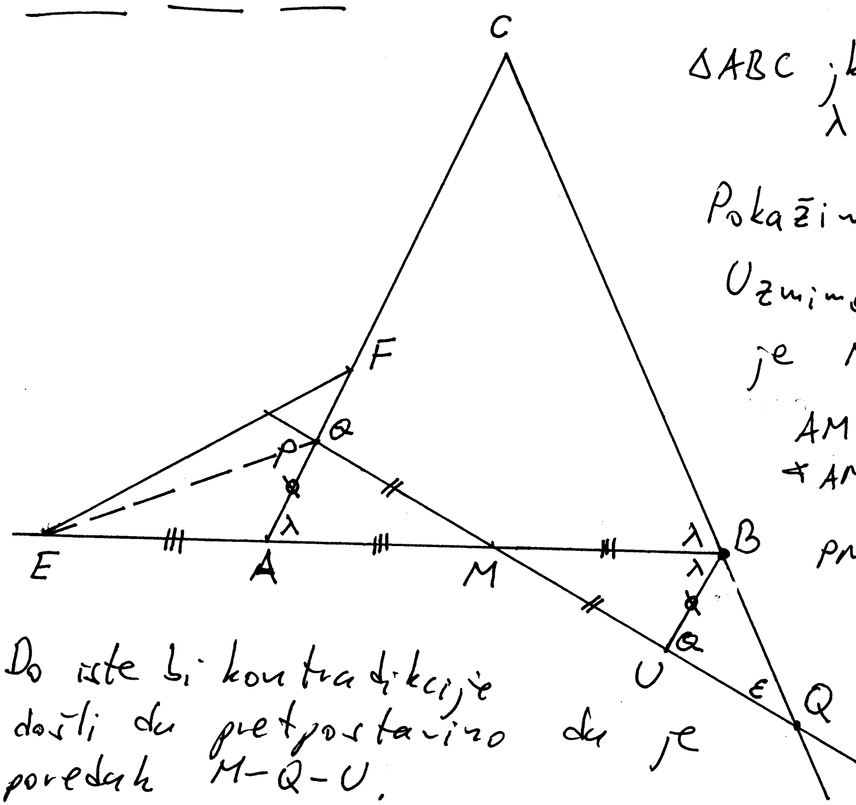
$SN \cong NE \Rightarrow SN \cong SM \Rightarrow S$ sredina duži MN

q.e.d.

(#) Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla ΔABC prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je P-M-Q. Dokazati da je $PQ > AB$.

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ jkk sa osnovicom u } AB \\ M \text{ sredina } AB \\ P \in p(A,C),\ Q \in p(B,C) \text{ t.d. } P\text{-}M\text{-}Q \end{array}\right\} \Rightarrow PQ > AB$$



ΔABC jkk, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \lambda$

λ je oštar ugao

Pokažimo prvo da je $BQ > AP$.

Uzmimo tačku $U \in pp[M,Q)$ takvu da je $MP \cong MU$. Sad imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AM \cong BM \\ \sphericalangle AMP \cong \sphericalangle BMU \\ \text{(unakrsni uglovi)} \\ PM \cong UM \end{array}\right\} \xrightarrow{sus} \Delta AMP \cong \Delta BMU$$

$$\Downarrow$$

$$AP \cong BU \text{ i } \sphericalangle MBU \cong \sphericalangle MAP$$

Sad možemo zaključiti da je poredak M-U-Q (Zašto? Ako bi bilo $U \equiv Q$ imali bi da je $\sphericalangle MBQ = \lambda$ # kontradikciji (λ je oštar ugao))

Do iste bi kontradikcije došli da pretpostavimo da je poredak M-Q-U.

Primjetimo da je $p(A,P) \parallel p(U,B)$
$\Rightarrow \sphericalangle QPC \cong \sphericalangle QUB = \theta$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ugao } \sphericalangle QPC \text{ je vanjski ugao } \Delta AMQ \Rightarrow \lambda < \theta \\ \text{Označimo sa } \varepsilon = \sphericalangle UQB.\ \text{Ugao } \sphericalangle ABC \text{ je vanjski ugao } \Delta MQB \Rightarrow \varepsilon < \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta > \varepsilon \Rightarrow BQ > BU$ tj. $AP < BQ$.

Uzmimo tačku E takvu da B-A-E i $AE \cong AM$.

Uzmimo tačku F takvu da A-F-C i $AF \cong BQ$. Kako je $AP < BQ$ to je poredak A-P-F. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AE \cong MB \\ \sphericalangle EAF \cong \sphericalangle MBQ \\ (=180^\circ - \lambda) \\ AF \cong BQ \end{array}\right\} \xrightarrow{sus} \Delta EAF \cong \Delta MBQ$$

$$\Downarrow$$

$$EF \cong MQ.$$

Primjetimo da je $EF > EP$ (Zašto?) i da je u ΔEPM $EP + PM > EM$.

Sad imamo $PQ = PM + MQ = EF + PM > EP + PM > EM = EA + AM = AM + MB = AB$

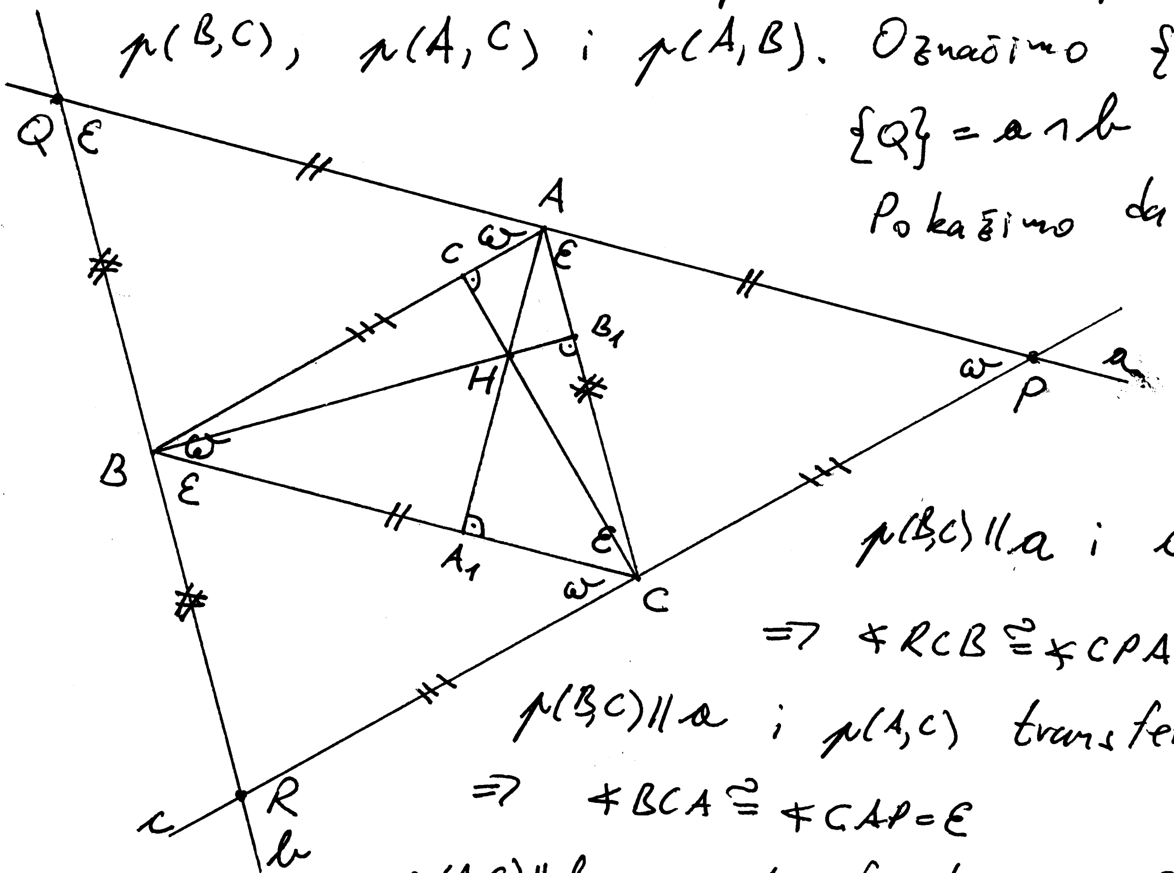
tj. $PQ > AB$ q.e.d.

(7) Dokazati da se visine trougla sijeku u jednoj tački H (H zovemo ortocentar trougla).

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ AA_1,\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine trougla} \end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$$

Neka prave a, b i c redom prolaze kroz tačke A, B i C i neka su redom paralelne sa pravama $p(B,C)$, $p(A,C)$ i $p(A,B)$. Označimo $\{P\} = a \cap c$, $\{Q\} = a \cap b$ i $\{R\} = c \cap b$.



Pokažimo da su trouglovi ΔRCB, ΔAPC i ΔQAB podudarni.

$p(B,C) \parallel a$ i c transferzala $\Rightarrow \measuredangle RCB \cong \measuredangle CPA = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle BCA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon$

$p(A,C) \parallel b$ i a transferzala $\Rightarrow \measuredangle BQA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon$

$p(A,B) \parallel c$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle RCB \cong \measuredangle CBA = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CBA \cong \measuredangle BAQ = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQB \cong \measuredangle CBR = \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ABC \cong \measuredangle APC = \omega \\ \measuredangle BCA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon \\ AC \cong AC \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta ABC \cong \Delta CPA \Downarrow BC \cong AP$$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle BCA \cong \measuredangle BQA = \varepsilon \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAQ = \omega \\ AB \cong AB \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta ABC \cong \Delta ABQ \Downarrow BC \cong AQ$$

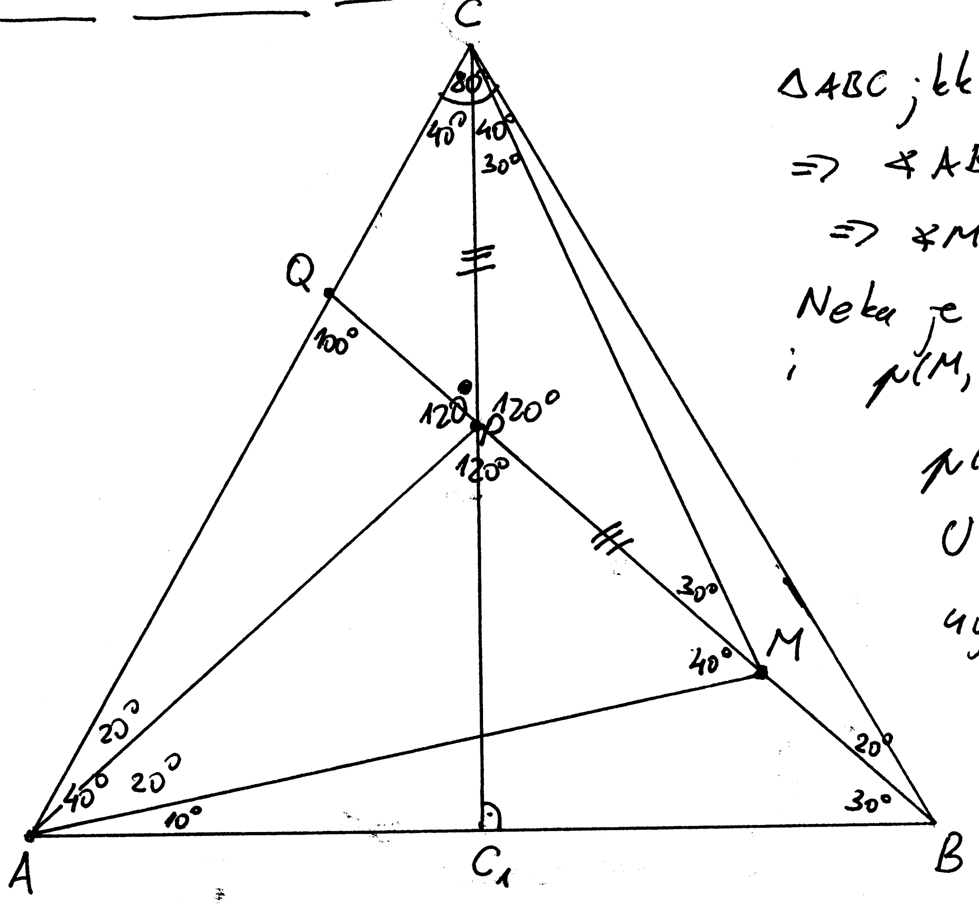
Možemo primjetiti da su ΔBRC, ΔACP i ΔQBA podudarni (zbog pravila USU)

U trouglu ΔPQR prave $p(A,A_1)$, $p(B,B_1)$ i $p(C,C_1)$ su simetrale stranica pa prema ranije urađenom zadatku one se sijeku u jednoj tački H. Prema tome $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$ q.e.d.

Unutar $\triangle ABC$ uzeta je tačka M takva da je $\angle MBA = 30°$, $\angle MAB = 10°$. Odrediti ugao $\angle AMC$ ako je $\angle ACB = 80°$ i $AC \cong BC$.

Rj: postavka zadatka

$\triangle ABC$ jkk sa osnovicom AB
M tačka unutar $\triangle ABC$ takva $\angle MBA = 30°$ i $\angle MAB = 10°$
$\angle ACB = 80°$
$\Rightarrow \angle AMC = ?$



$\triangle ABC$ jkk i $\angle ACB = 80° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC \cong \angle BAC = 50° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle MAC = 40°$ i $\angle MBC = 20°$

Neka je CC_1 visina $\triangle ABC$ i $p(M,B) \cap CC_1 = \{P\}$ i $p(M,B) \cap AC = \{Q\}$.

U $\triangle ABQ$ znamo dva ugla $\Rightarrow \angle AQB = 100°$
$\Rightarrow AMQ = 40°$.

$\angle APM = 120°$

$\Uparrow$

$$\left.\begin{array}{c} AC_1 \cong BC_1 \\ \angle AC_1P \cong \angle BC_1P = 90° \\ PC_1 \cong PC_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle AC_1P \cong \triangle BC_1P$$

$\Downarrow$

$\angle C_1AP \cong \angle C_1BP = 30° \Rightarrow \angle PAM = 20°$

U $\triangle APC$ znamo da su $\angle CAP = 20°$ i $\angle ACC_1 = 40° \Rightarrow \angle APC = 120°$
$\Rightarrow \angle MPC = 120°$. Posmatrajmo $\triangle AMP$ i $\triangle ACP$.

$$\left.\begin{array}{c} \angle MAP \cong \angle CAP = 20° \\ AP \cong AP \\ \angle MPA \cong \angle CPA = 120° \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle AMP \cong \triangle ACP$$

$\Downarrow$

$PC \cong MP \Rightarrow$

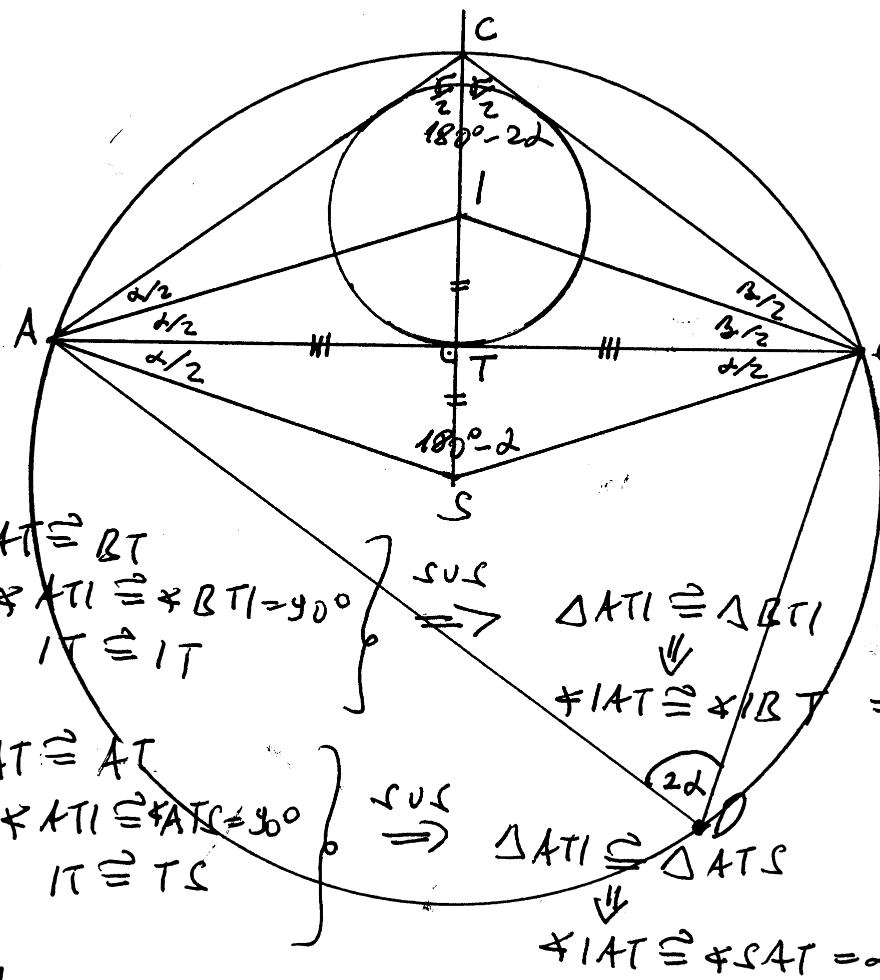
$\Rightarrow \triangle PMC$ je jkk sa osnovicom MC i $\angle MPC = 120° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PMC \cong \angle PCM = 30° \Rightarrow \angle AMC = 70°$

što je i trebalo pronaći

(#) Odrediti uglove trougla kod kojeg je centar opisane kružnice simetričan centru upisane kružnice u odnosu na jednu od njegovih stranica.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC,\ I \text{ centar upisane kružnice,}\\ S \text{ centar opisane kružnice}\\ \text{tačka } S \text{ simetrična tački } I \text{ u}\\ \text{odnosu na stranicu } AB\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\measuredangle ABC=?\\ \measuredangle ACB=?\\ \measuredangle CAB=?\end{array}$$



Neka je $\{T\}=SI\cap AB$

Tačka I pripada presjeku simetrala uglova, koje ćemo označiti sa α, β i γ.

Tačka S pripada presjeku simetrala stranica $\triangle ABC$ pa je $p(I,S)$ simetrala stranice AB $\Rightarrow$

$\Rightarrow AT \cong BT$

$$\left.\begin{array}{l}AT\cong BT\\ \measuredangle ATI\cong\measuredangle BTI=90^\circ\\ IT\cong IT\end{array}\right\}\overset{SUS}{\Rightarrow}\triangle ATI\cong\triangle BTI$$

$\Downarrow$

$\measuredangle IAT\cong\measuredangle IBT \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha=\beta$

$$\left.\begin{array}{l}AT\cong AT\\ \measuredangle ATI\cong\measuredangle ATS=90^\circ\\ IT\cong TS\end{array}\right\}\overset{SUS}{\Rightarrow}\triangle ATI\cong\triangle ATS$$

$\Downarrow$

$\measuredangle IAT\cong\measuredangle SAT=\alpha/2$

I način:

Primjetimo da je $\triangle ASC$ jkk $(AS=SC=R)$ pa $3\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\gamma}{2}$ tj. $\gamma=3\alpha$. Kako je $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ tj. $5\alpha=180^\circ \Rightarrow \alpha=\beta=36^\circ$

$\gamma=108^\circ$ što je i trebalo naći

II način:

U $\triangle ABC$, $\alpha=\beta \Rightarrow \gamma=180^\circ-2\alpha$

$\measuredangle ACB$ je tupi periferiski ugao nad tetivom AB. Neka je D proizvoljna tačka na kružnici takva da je $\measuredangle ADB$ oštri periferiski ugao $\Rightarrow \measuredangle ACB+\measuredangle ADB=180^\circ \Rightarrow \measuredangle ADB=2\alpha$. Kako je $\triangle AST\cong\triangle BST$ (prema pravilu sus) to je $\measuredangle SBT=\alpha/2 \Rightarrow \measuredangle ASB=180^\circ-\alpha$.

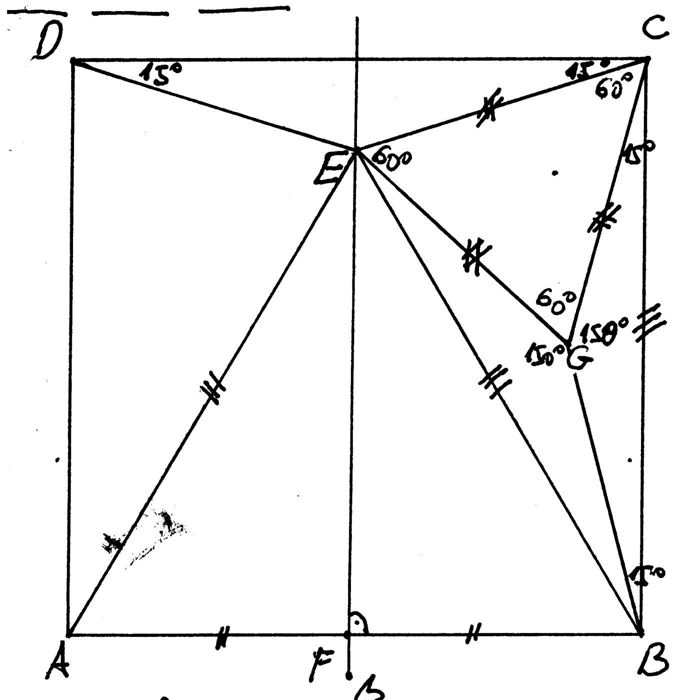
ZAVRŠITE SAMI (Uputa: Kakva je veza između $\measuredangle ASB$ i $\measuredangle ADB$?)

#) U unutrašnjosti kvadrata $\square ABCD$ data je tačka E takva da je $\triangle CDE$ jednakokraki sa uglovima kod C i D od $15°$. Dokazati da je $\triangle ABE$ jednakostraničan.

Rj. postavka zadatka

$\square ABCD$ kvadrat
E tačka u unutrašnjosti kvadrata
$\triangle CDE$ jkk sa uglovima $\measuredangle ECD \cong \measuredangle EDC = 15°$

$\Rightarrow$ $\triangle ABE$ jednakostraničan



Kako je $\triangle CDE$ jkk to E leži na simetrali s duži CD a time i duži AB. Imamo $\{F\} = s \cap AB$

$$\left.\begin{array}{l} AF \cong BF \\ \measuredangle AFE \cong \measuredangle BFE = 90° \\ EF \cong EF \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle AFE \cong \triangle BFE \Downarrow AE \cong BE$$

Uzmimo tačku G u unutrašnjosti $\triangle BCE$ takvu da je $\measuredangle GBC \cong \measuredangle GCB = 15°$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle EDC \cong \measuredangle GBC = 15° \\ DC \cong BC \\ \measuredangle ECD \cong \measuredangle GCB = 15° \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle DEC \cong \triangle BCG$$

$\Downarrow$

$CE \cong GC$, a kako je još $\measuredangle ECG = 60°$

to je $\triangle ECG$ jks (ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je $60°$)

Primjetimo da su $\measuredangle DEC \cong \measuredangle CGB = 150°$ pa je i $\measuredangle BGE = 150°$.

$$\left.\begin{array}{l} EG \cong CG \\ \measuredangle EGB \cong \measuredangle CGB = 150° \\ GB \cong GB \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle EGB \cong \triangle CGB$$

$\Downarrow$

$EB \cong BC$

Kako je $BC \cong AB$ ($\square ABCD$ kvadrat) to je $AE \cong BE \cong AB$

tj. $\triangle ABE$ jednakostranični

q.e.d.

(#) Duž koja spaja sredine dvije susjedne stranice u trouglu se zove srednja linija trougla. Neka su P i Q redom sredine stranica AB i AC trougla ΔABC, Dokazati da je $PQ = \frac{1}{2}BC$ i da je $p(P,Q) \parallel p(B,C)$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ P \text{ sredina } AB \\ Q \text{ sredina } AC \end{array}\right\} \Longrightarrow PQ = \frac{1}{2}BC \ \text{ i } \ p(B,C) \parallel p(P,Q)$$

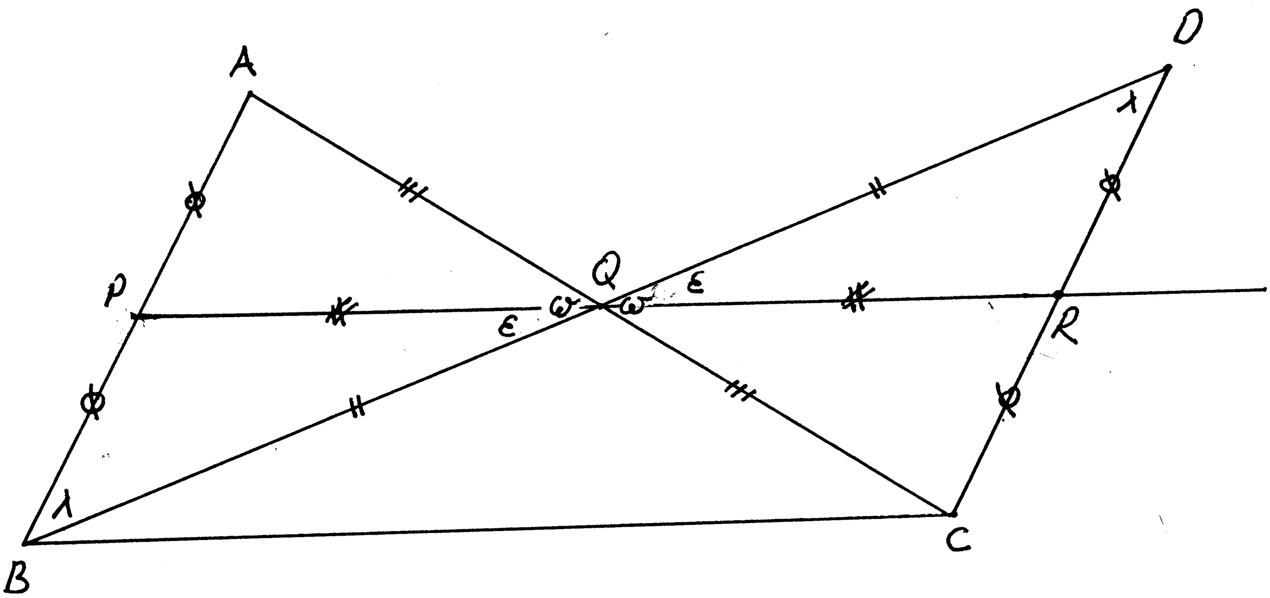
Na pravoj $p(B,Q)$ uzmimo tačku D tako da je $B-Q-D$ i $BQ \cong QD$. Primjetimo

$$\left.\begin{array}{c} BQ \cong QD \\ \measuredangle BQA \cong \measuredangle DQC = \omega \\ AQ \cong CQ \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta AQB \cong \Delta CQD$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ABQ \cong \measuredangle CDQ = \lambda \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p(B,A) \parallel p(C,D). \text{ Označimo sa } \{R\} = p(P,Q) \cap CD. \qquad AB \cong CD$$



$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle P\ Q \cong \measuredangle QDR = \lambda \\ BQ \cong DQ. \\ \measuredangle PQB \cong \measuredangle DQR = \varepsilon \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta PQB \cong \Delta RQD \nearrow PQ \cong QR$$

$$\Downarrow$$

$PB \cong DR$ a kako je $AB \cong CD$ to je i $CR \cong DR$. (P je sredina AB).

U četverouglu $\square BCRP$ imamo $PB \cong CR$ i $p(P,B) \parallel p(C,R) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \square BCRP$ paralelogram $\Longrightarrow p(P,Q) \parallel p(B,C)$

q.e.d

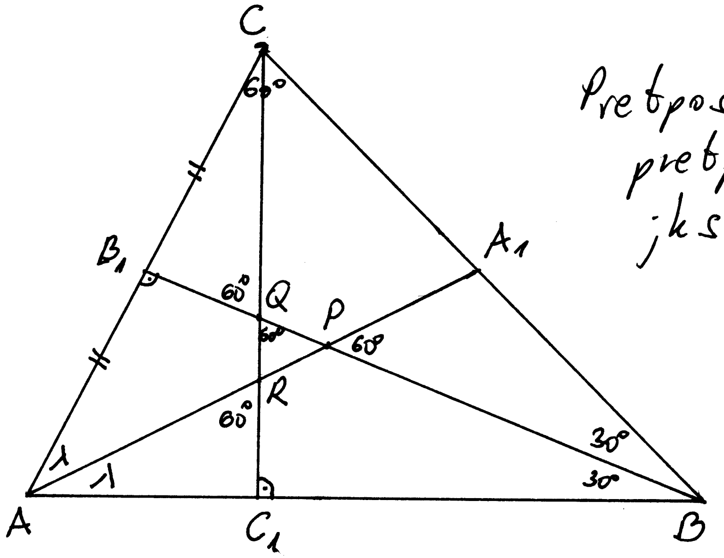
a kako je $PR \cong BC$ i. $PQ \cong QR \Longrightarrow PQ = \frac{1}{2}BC$ q.e.d.

(#) Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC,\ CC_1 \text{ visina trougla} \\ AA_1 \text{ simetrala } \measuredangle BAC \\ BB_1 \text{ težišna duž} \\ AA_1 \cap CC_1 = \{R\},\ AA_1 \cap BB_1 = \{P\} \\ BB_1 \cap CC_1 = \{Q\} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PQR \text{ nije jednakostraničan}$$

— — —



$\triangle ABC$ je raznostraničan trougao.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $\triangle PQR$ jks, tj. $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle PQR \cong \measuredangle QRP = 60^\circ$.

$\triangle AC_1R \Rightarrow \lambda = 30^\circ$

pa je $\measuredangle BAC = 60^\circ$

$\triangle C_1BQ \Rightarrow \measuredangle ABB_1 = 30^\circ$

$\triangle ABB_1\ (\measuredangle B_1AB = 60^\circ,\ \measuredangle ABB_1 = 30^\circ) \Rightarrow \measuredangle BB_1A = 90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \cong CB_1 \\ \measuredangle BB_1A \cong \measuredangle BB_1C = 90^\circ \\ BB_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \triangle BB_1A \cong \triangle BB_1C$$

$\Downarrow$

$\measuredangle ABB_1 \cong \measuredangle B_1BC = 30^\circ$

i $\measuredangle B_1AB \cong \measuredangle B_1CB = 60^\circ$

$\triangle ABC$ je jks $\Rightarrow P \equiv Q \equiv R$

#kontradikcija

(sa pretpostavkom da je $\triangle ABC$ raznostraničan ili sa pretpostavkom da postoji $\triangle PQR$)

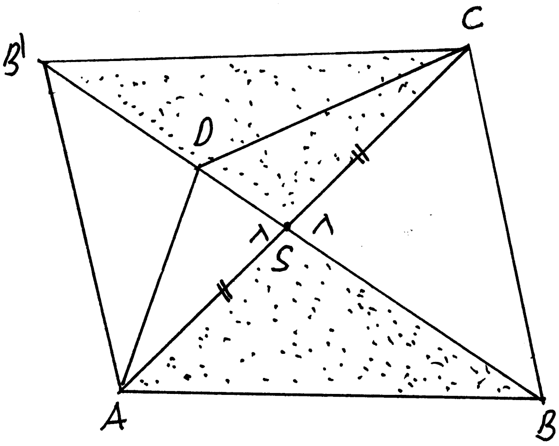
Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\triangle PQR$ ne može biti jks

q.e.d.

(#) Dijagonala AC konveksnog četverougla $\square ABCD$ polovi njegov obim, a njena sredina pripada dijagonali BD. Dokazati da je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konveksan četverougao} \\ AB+BC \cong AD+CD = \frac{O}{2} \\ AC \cap BD = \{S\},\ S \text{ sredina } AC \end{array}\right\} \Longrightarrow AB \cong CD \ \text{ i } \ AD \cong BC$$



Na polupravoj ~~pp~~ $[S,D)$ uzmimo tačku B' tako da je $SB' \cong SB$. Moguća su tri slučaja:

1° $S-D-B'$

2° $S-B'-D$

3° $D \equiv B'$

Bez obzira koji od ovih slučajeva da se desi, imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle ASB' \cong CSB = \lambda \\ \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ BS \cong SB' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASB' \cong \triangle CSB \Downarrow AB' \cong BC$$

Isto tako

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle ASB \cong \measuredangle CSB' \\ \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ BS \cong SB' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASB \cong \triangle CSB' \Downarrow CB' \cong AB$$

Kako je $AB+BC \cong AD+CD$ to je i $AB'+CB' \cong AD+DC$ ...(*)

Sad, ako bi bilo $S-D-B'$ imali bi $AD+DC < AB'+CB'$ #kontradikcija (sa *)

Ako bi bilo $S-B'-D$ imali bi $AB'+B'C < AD+DC$ #kontradikcija (sa *)

Prema tome $B' \equiv D \Rightarrow AD \cong AB'$ i $CD \cong CB'$

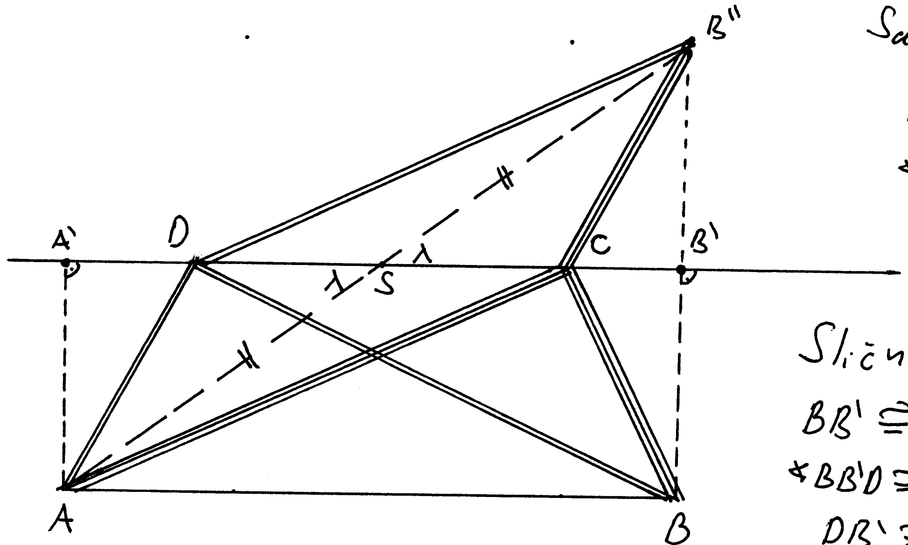
pa je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$

q.e.d.

\# U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od prave $p(C,D)$ su podudarna, a pored toga je $AC+CB \cong AD+DB$. Dokazati da je $AD \cong BC$ i $AC \cong BD$.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konveksan, } A' \text{ ortog. proj. tač } A \text{ na } p(C,D) \\ B' \text{ ortog. proj. tač } B \text{ na } p(C,D),\ AA' \cong BB' \\ AC+CB \cong AD+BD \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} AD \cong BC \\ i \\ AC \cong BD \end{array}$$



Uzmimo tačku B'' takvu da je $BB' \cong BB''$ i $B-B'-B''$

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} BB' \cong B'B'' \\ \measuredangle CB'B \cong \measuredangle CB'B'' = \text{prav} \\ B'C \cong B'C \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta CB'B \cong \Delta CB'B'' \Downarrow BC \cong B''C$$

Slično:

$$\left.\begin{array}{l} BB' \cong B'B'' \\ \measuredangle BB'D \cong \measuredangle B''B'D = \text{prav} \\ DB' \cong DB' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta DB'B \cong \Delta DB'B'' \Downarrow BD \cong B''D$$

Posmatrajmo dijagonalu AB'' četverougla $\square ACB''D$ $(AC + CB'' \cong AD + DB'')$

Označimo sa $\{S\} = AB'' \cap CD$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle SA'A \cong \measuredangle SB'B'' \\ \quad \text{(prav ugao)} \\ \measuredangle A'SA \cong \measuredangle B'SB'' = \lambda \\ \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ AA' \cong B''B' \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta ASA' \cong \Delta B''SB' \Downarrow AS \cong SB''$$

Sad ako duž SD nanesem na polupravu $p[S,C)$ nije teško pokazati da se mora desiti slučaj $SD \cong SC$, tj. u $\square ACB''D$ dijagonale se polove.

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong B''S \\ \measuredangle ASD \cong B''SC = \lambda \\ CS \cong SD \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta ASD \cong B''SC$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong B''C \\ B''C \cong BC \end{array}\right\} \Rightarrow AD \cong BC$$

q.e.d.

Kako je još $AC + \underline{\underline{CB}} \cong \underline{\underline{AD}} + BD$ i $AD \cong BC$

$$\Downarrow$$

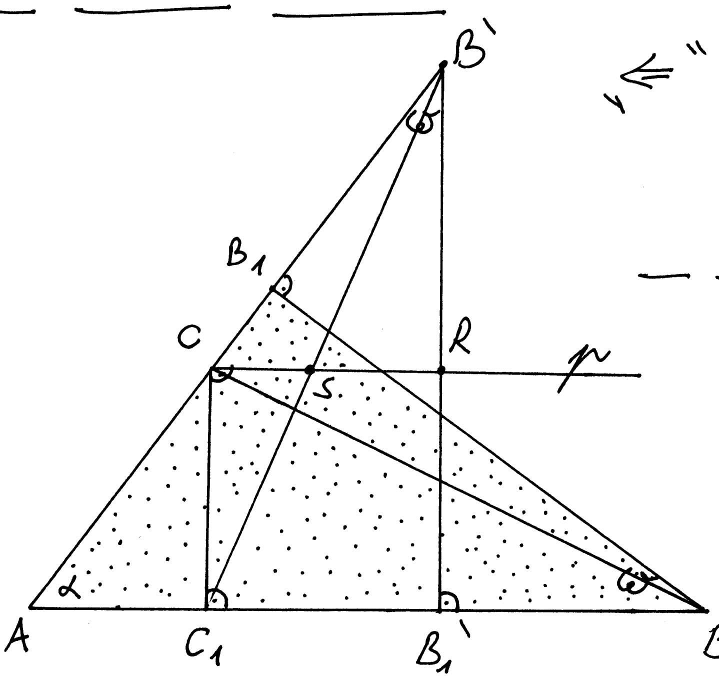
$$AC \cong BD$$

q.e.d.

Dokazati da većoj visini trougla odgovara manja stranica i obrnuto.

Rj: postavka zadatka

ΔABC, BB_1 i CC_1 visine trougla $\Rightarrow$ $BB_1 > CC_1$ akko $AC < AB$



"$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC, \\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine} \\ AC < AB\end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 > CC_1$

Kako je $AC < AB$ na $p(A,C)$ postoji tačka B' takva da je $A-C-B'$ i $AB' \cong AB$. Neka je B_1' ortogonalna projekcija tačke B' na pravu $p(A,B)$.

Pokažimo da je $CC_1 < B'B_1'$. ...(*)

$\measuredangle C_1CB'$ je vanjski ugao ΔACC_1 pa možemo zaključiti da je tup. U njegovoj unutrašnjosti uzmimo polupravu p takvu da je $\measuredangle C_1Cp = 90°$. Označimo sa $\{R\} = p \cap B'B_1'$ (ovaj presjek postoji zato što postoji $\{S\} = p \cap B'C_1$ a p ne može sjeći duž C_1B_1' zato što $p \parallel p(A,B)$). Nije teško pokazati da je $CC_1 \cong RB_1'$.

Kako $B_1' - R - B'$ i $RB_1' \cong CC_1$ $\Rightarrow$ $CC_1 < B'B_1'$.

Posmatrajmo ΔABB_1 i $\Delta AB'B_1'$. Ti trouglovi imaju dva ugla jednaka (α i ugao od $90°$) pa imaju i treći ugao podudaran.

Sad imamo: $\left.\begin{array}{c}\measuredangle B_1AB \cong \measuredangle B'AB_1' = \alpha \\ AB \cong AB' \\ \measuredangle ABB_1 \cong \measuredangle AB'B_1' = \omega\end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta ABB_1 \cong \Delta AB'B_1' \Downarrow BB_1 \cong B'B_1'$

(*) $\Rightarrow$ $CC_1 < BB_1$ q.e.d.

"$\Rightarrow$": $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine} \\ BB_1 > CC_1\end{array}\right\} \Rightarrow AC < AB$

Završiti sami. Uputa: Koristiti "$\Leftarrow$".

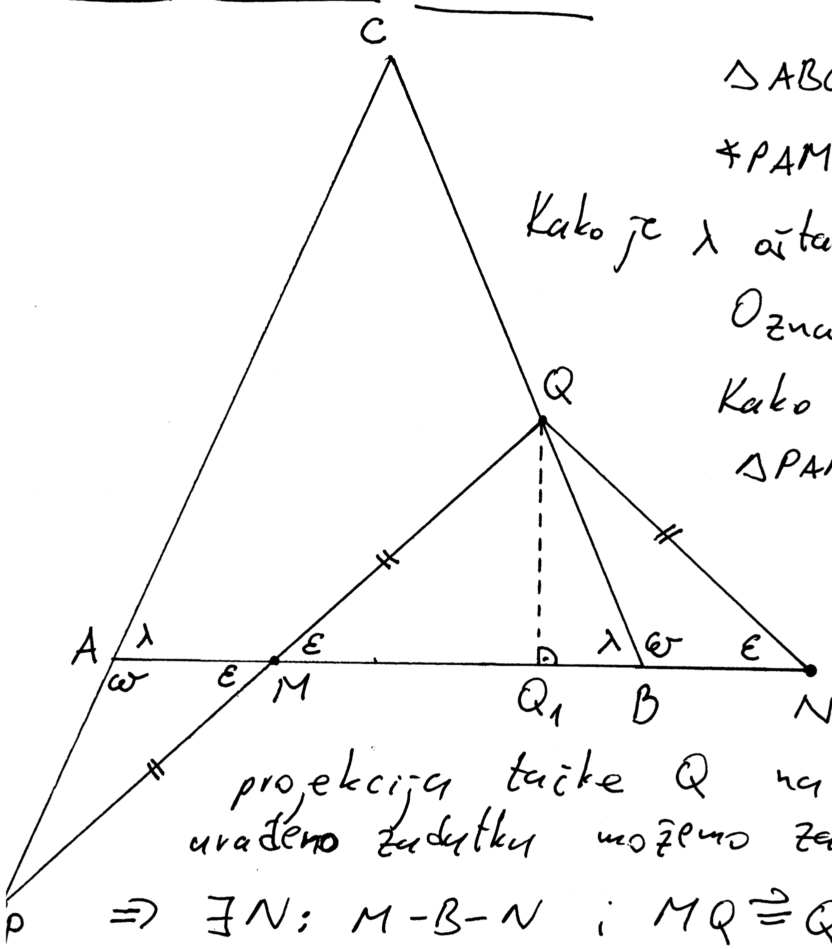
[Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. ...]

(#) Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog ΔABC prolazi prava koja siječe prave AC i BC u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

Rj: postavka zadatka

ΔABC jkk sa osnovicom AB
$M \in AB$, $P \in p(A,C)$, $Q \in p(B,C)$
$\underline{P-M-Q}$ i $\underline{PM \cong MQ}$

$\Big\} \Rightarrow AP \cong BQ$



ΔABC jkk $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle ABC = \lambda$

$\measuredangle PAM + \measuredangle BAC = \omega + \lambda = 180°$

Kako je λ oštar ugao $\Rightarrow$ ω tup

Označimo sa $\varepsilon = \measuredangle PMA$

Kako je $\measuredangle BAC$ vanjski ugao $\Delta PAM \Rightarrow \lambda > \varepsilon$

$\Delta MBQ \Rightarrow \varepsilon < \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow MQ > BQ$.

Neka je Q_1 ortogonalna projekcija tačke Q na stranicu MB. Prema ranije urađenom zadatku možemo zaključiti da je $MQ_1 > Q_1B$

$\Rightarrow \exists N: M-B-N$ i $MQ \cong QN$.

$MQ_1 \cong NQ_1$,
$\measuredangle MQ_1Q \cong \measuredangle NQ_1Q = 90°$
$QQ_1 \cong QQ_1$

$\Big\} \xRightarrow{SUS} \Delta MQ_1Q \cong NQ_1Q$

$\Downarrow$

$MQ \cong NQ$ i $\measuredangle Q_1MQ \cong \measuredangle Q_1NQ = \varepsilon$

Sad imamo:

$\measuredangle NBQ \cong \measuredangle MAP = \omega$
$\measuredangle BNQ \cong \measuredangle PMA = \varepsilon$
$PM \cong QN$

$\Big\} \xRightarrow{UUS} \Delta BNQ \cong \Delta PAM$

$\Downarrow$

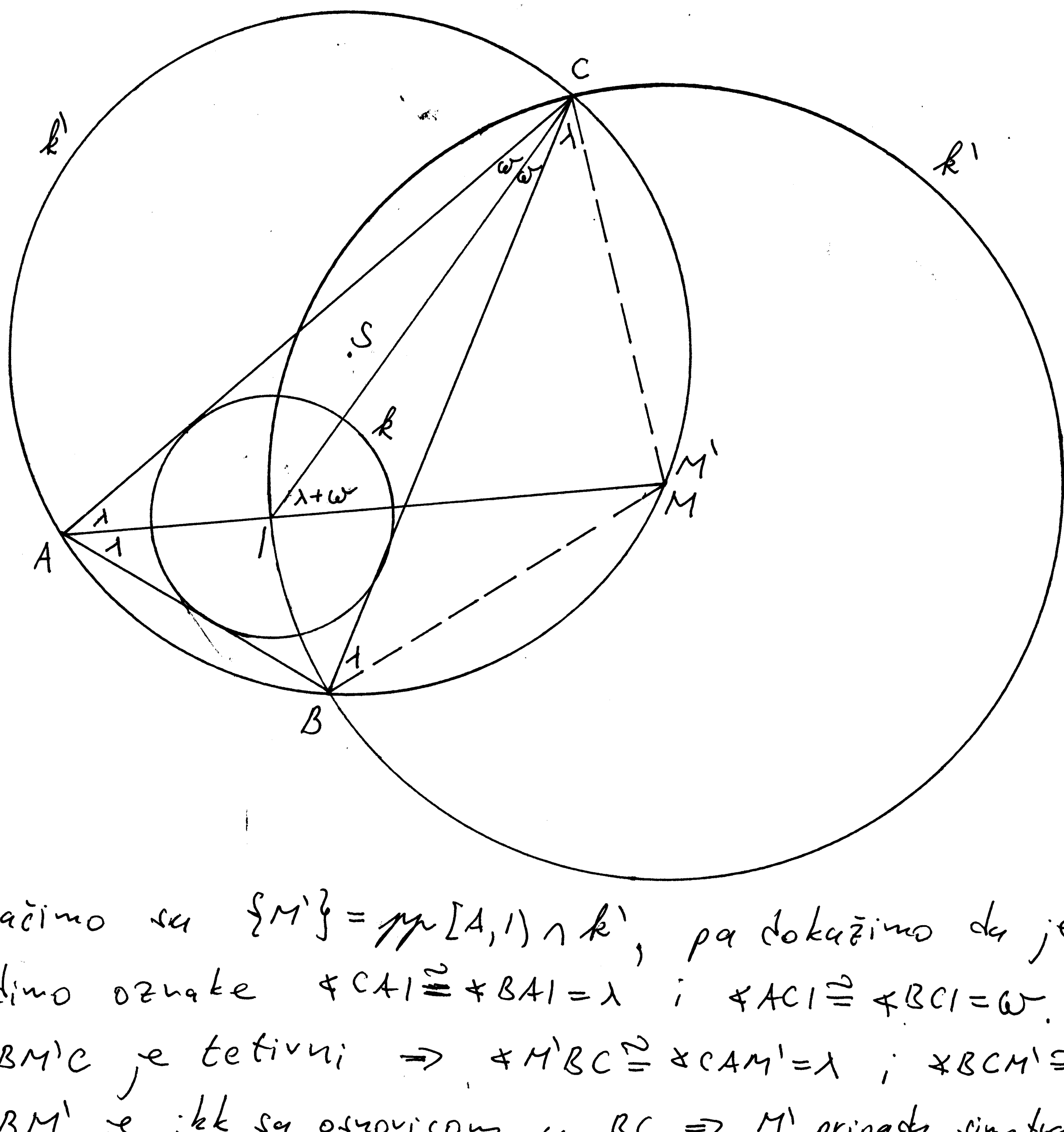
$PM \cong QN$

q.e.d.

U $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko $\triangle BCI$ nalazi na presjeku $pp[A,I)$ i kružnice koja je opisana oko $\triangle ABC$.

Rj. postavka zadatka $\triangle ABC$,

$$\left.\begin{array}{l} k(I,r) \text{ upisana kružnica u } \triangle ABC \\ k'(S,r') \text{ kružnica opisana oko } \triangle ABC \\ k''(M,r'') \text{ kružnica opisana oko } \triangle BCI \end{array}\right\} \Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$$



Označimo sa $\{M'\} = pp[A,I) \cap k'$, pa dokažimo da je $M' \equiv M$.

Uvedimo oznake $\measuredangle CAI \cong \measuredangle BAI = \lambda$ i $\measuredangle ACI \cong \measuredangle BCI = \omega$.

$\square ABM'C$ je tetivni $\Rightarrow \measuredangle M'BC \cong \measuredangle CAM' = \lambda$ i $\measuredangle BCM' \cong \measuredangle BAM' = \lambda$

$\triangle CBM'$ je jkk sa osnovicom u $BC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice BC ...(*)

$\measuredangle M'IC$ je vanjski ugao $\triangle AIC \Rightarrow \measuredangle M'IC = \lambda + \omega$.

$\triangle M'CI$ je jkk sa osnovicom u $IC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice IC ...(**)

Iz (*) i (**) $\Rightarrow M'$ je centar opisane kružnice $\triangle CIB \Rightarrow M \equiv M'$

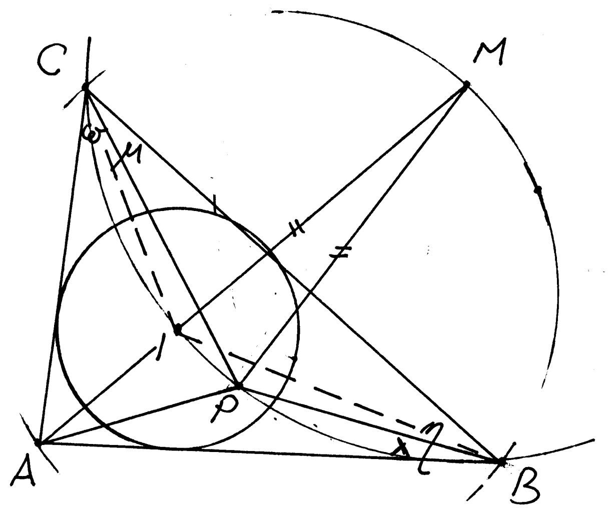
$\Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$ q.e.d.

(#) Neka je I centar upisane kružnice ΔABC. U unutrašnjosti ΔABC data je tačka P takva da je

$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$$

Dokazati da je $AP \geq AI$ te da jednakost vrijedi akko se tačka P podudara sa tačkom I.

Rj.



postavka zadatka

ΔABC
$k(I, r)$ kružnica upisana u ΔABC
P tačka u unutrašnjosti ΔABC takva
$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$

$\Rightarrow AP \geq AI$

Uvedimo oznake $\measuredangle PBA = \lambda$, $\measuredangle PCA = \omega$, $\measuredangle PBC = \eta$, $\measuredangle PCB = \mu$.

$\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$

Tada
$$\left.\begin{array}{l} \lambda + \omega = \mu + \eta \\ \lambda + \omega + \mu + \eta = \beta + \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + \omega = \mu + \eta = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad /:2$$

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \qquad \text{pa} \quad \mu + \eta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\measuredangle BPC = 180^\circ - (\mu + \eta) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \quad \ldots (*)$$

$$\measuredangle BIC = 180^\circ - (\measuredangle IBC + \measuredangle ICB) = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \quad \ldots (**)$$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $\square IPBC$ je tetivni četverougao.

Prema prethodnom zadatku centar opisane kružnice ΔBCI se nalazi na presjeku $p[A, I)$ i kružnice opisane oko ΔABC. Označimo tu tačku sa M. Imamo $IM \cong PM$.

Posmatramo ΔAMP. Imamo $AM < AP + PM$ tj. $AI + MI < AP + PM$

$\Rightarrow AI < AP$ q.e.d.

(Jednakost vrijedi samo u slučaju kada $P \equiv I$).