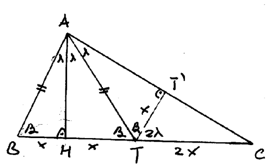
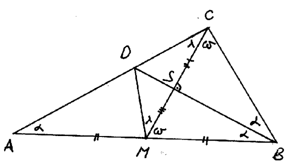
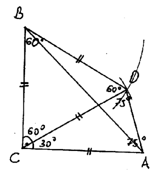
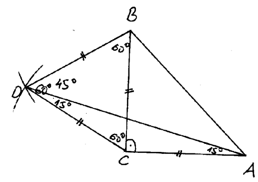
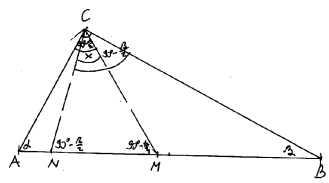
Elementarni zadaci iz EG I - Računanje uglova u trouglu

1. Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$. $[\alpha = 90°, \beta = 60°, \gamma = 30°]$

2. U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na simetralu BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$. $[\alpha = 30°, \beta = 60°, \gamma = 90°]$

3. Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A, B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B, C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$. $[1°\measuredangle ADB = 135°;\ 2°\measuredangle ADB = 45°]$

4. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N tako da je $AM = AC$, $BN = BC$ i poredak $A - N - M - B$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$. $[\measuredangle NCM = 45°]$

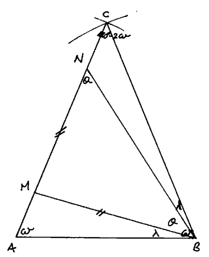
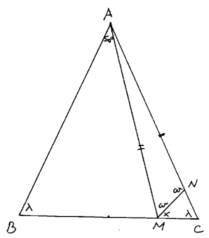
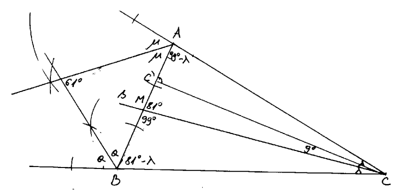
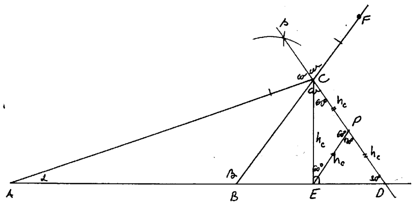






5. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$? $[\measuredangle ABN = 60°]$

6. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$. $[\measuredangle CMN = 25°]$

7. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove $\triangle ABC$. $[\alpha = 70°, \beta = 52°, \gamma = 58°]$

8. Nacrtati trougao $\triangle ABC$, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označimo sa E. Produžimo stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A, B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$. $[\beta - \alpha = 60°]$

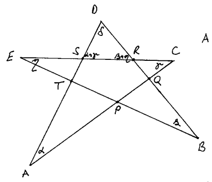
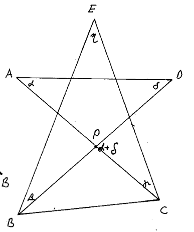
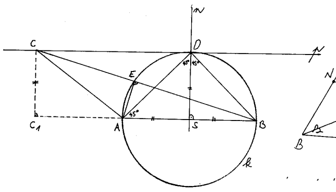
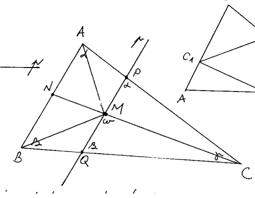
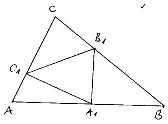
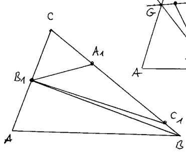
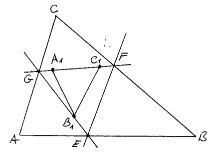
Ponavljanje gradiva iz EG I - Podudarnost trougla

9. Naći zbir $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta$ uglova u tjemenima "petokrake zvijezde". (Zvijezda je nacrtana slobodno).

10. U trouglu je jedna stranica podudarna dvostruko odgovarajućoj visini. Dokazati da ugao naspram te stranice ne može da bude tup.

11. Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Naći uglove trougla.

12. Dokazati da se simetrale stranica trougla sijeku u jednoj tački S (S je centar opisane kružnice trougla).

13. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

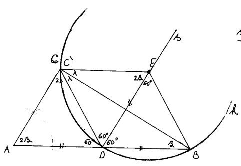
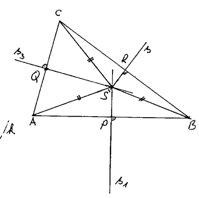
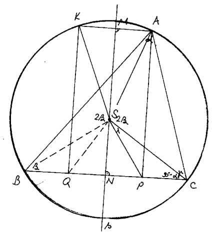
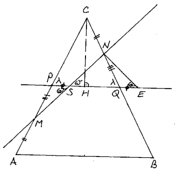
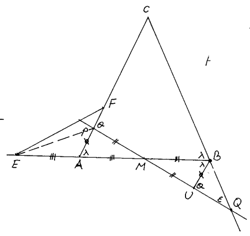
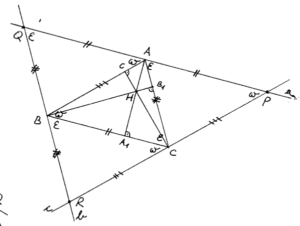
14. Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N redom, tako da je $CM + CN \cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

15. Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A, C)$ i $p(B, C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je $(P - M - Q)$. Dokazati da je $PQ > AB$.

16. Dokazati da se visine trougla sijeku u jednoj tački H (H zovemo ortocentar trougla).

17. Unutar $\triangle ABC$ uzeta je tačka M takva da je $\measuredangle MBA = 30°$, $\measuredangle MAB = 10°$. Odrediti ugao $\measuredangle AMC$, ako je $\measuredangle ACB = 80°$ i $AC \cong BC$.

18. Odrediti uglove trougla kod kojeg je centar opisane kružnice simetričan centru upisane kružnice u odnosu na jednu od njegovih stranica.

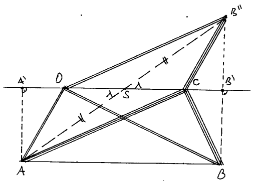
     

19. U unutrašnjosti kvadrata $\square ABCD$ data je tačka E takva da je $\triangle CDE$ jednakokraki sa uglovima kod C i D od $15°$. Dokazati da je $\triangle ABE$ jednakostraničan.

20. Duž koja spaja sredine dvije susjedne stranice trougla se zove srednja linija trougla. Neka su P i Q redom sredine stranica AB i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $PQ = \frac{1}{2}BC$ i da je $p(P, Q) || p(B, C)$.

21. Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

22. Dijagonala AC konveksnog četverougla $\square ABCD$ polovi njegov obim, a njena sredina pripada dijagonali BD. Dokazati da je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.



23. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od tjemena CD su podudarna, a pored toga je $AC + CB \cong AD + DB$. Dokazati da je $AD \cong BC$ i $AC \cong BD$.

24. Dokazati da većoj visini odgovara manja stranica i obrnuto.

25. Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A, C)$ i $p(B, C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

26. U trouglu $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko trougla $\triangle BCI$ nalazi na presjeku poluprave $pp[A, I)$ i kružnice koja je opisana oko trougla $\triangle ABC$.

27. Neka je I centar upisane kružnice trougla $\triangle ABC$. U unutrašnjosti $\triangle ABC$ data je tačka P takva da je $\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB$. Dokazati da je $AP \geq AI$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se tačka P podudara sa tačkom I.