15 Elementarni zadaci: Razni zadaci iz ravni i prostora.

1. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2}AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

2. Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB $(A, B \in k,\ S \in AB)$. Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

3. Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

4. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

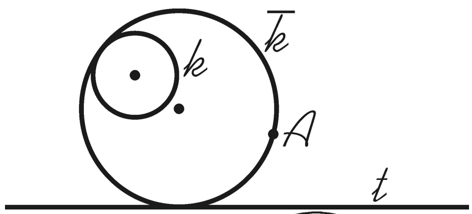
5. U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE $(E \in BC)$ ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od 30°. Naći uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$.

6. Na kraku x ugla $\measuredangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA$.

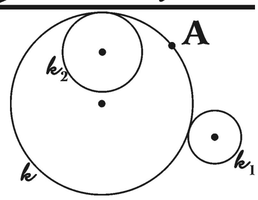
Razni zadaci sa ispitnih rokova.

7. Konstruisati krug koji prolazi kroz datu tačku i dodiruje dva data kruga.

8. Dati je krug $k(O, r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O}, \bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k i pravu t kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



9. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici.



10. Za $\triangle ABC$ vrijedi $2\measuredangle CBA = \measuredangle CAB + \measuredangle ACB$. U unutrašnjosti $\triangle ABC$ je odabrana tačka P tako da vrijedi $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA$. Dokazati da je $PB^2 = PA \cdot PC$.

11. Neka je dat trapez $\square ABCD$ sa osnovicama AB i CD, dat je krug $k(O, r)$ koji prolazi kroz tačke A i D i dodiruje pravu $p(B, C)$ u tački F. Na osnovici AB data je tačka M takva da je $\square AMCD$ paralelogram i $MC \perp BC$. Ako je $\{E\} = p(B, C) \cap p(A, D)$ i G sredina duži AD dokazati da je $\square OFEG$ pravougaonik.

12. Četverougao $\square ABCD$ je tetivni. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom BC siječe dijagonalu CA u tački P, stranicu AB u tački Q i krug opisan oko četverougla $\square ABCD$ u tački R. Prava u tački D paralelna sa pravom AB siječe pravu BC u tački T. Ako je $PQ \cong QR$ dokazati da vrijedi $\frac{AB}{BC} = \frac{BT}{TD}$.

13. Dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ se dodiruju u tački A. Neka su p i q dvije proizvoljne prave koje prolaze kroz tačku A takve da $p \cap k_1 = \{A, E\}$, $p \cap k_2 = \{A, C\}$, $q \cap k_1 = \{A, D\}$ i $q \cap k_2 = \{A, B\}$. Pokazati da je $BC \| DE$.

14. Neka je $\square ABCD$ raznostraničan četverougao čije se dijagonale d_1 i d_2 sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

15. Neka je $\triangle PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P $(\measuredangle QPR = \varphi)$. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) i definicije trigonometriskih funkcija, izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{r \cdot q}{2}\, sin\varphi$ datog trougla.

16. Visina iz vrha A trougla $\triangle ABC$ presjeca stranicu BC u tački D. Krug koji dodiruje stranicu BC u tački D, presjeca stranicu AB u tačkama M i N, a stranicu AC u tačkama P i Q. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$.

17. Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$, i neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Dokazati da je $\dfrac{BF}{FC} = \dfrac{AB}{AC}$.

18. Raznostraničan trougao $\triangle ABC$, ima dužine stranica a, b i c. Neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Znamo da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije stranice, pa imamo $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AC}{BC}$. Iskoristiti ovu jednakost i pokazati da je $BE = \dfrac{ac}{a+b}$.

19. Neka je $\triangle ABC$ raznostraničan trougao i neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Dokazati da $P_{\triangle AEG} = P_{\triangle ABC} \cdot \dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}$.

20. Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

21. Tačka A_1 je presjek simetrale ugla A i naspremne strane BC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

22. Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je $\dfrac{A_2B}{A_2C} = \dfrac{AB}{AC}$.

23. Na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ date su redom tačke A_1, B_1 i C_1, takve da je $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$. Dokazati da je $\triangle A_1B_1C_1$ jednakostraničan ako i samo ako je $\triangle ABC$ jednakostraničan.

24. Dat je romb $\square ABCD$. Pokazati da je $AC \perp BD$ i da su dijagonale ujedno i simetrale uglova.

25. Duž $AC = a$ svojom unutrašnjom tačkom B podjeljena je u odnosu $3:2$. Nad dužima AB i BC, sa raznih strana u odnosu na duž AC, konstruisani su kvadrati $\square ABDE$ i $\square CBFG$. Neka su O i O_1 presjeci dijagonala ovih kvadrata. U kojoj razmjeri stoje površina četverougla $\square OO_1CD$ i površina kvadrata kome je stranica duž AC?

26. Dat je romb $\square ABCD$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice AB, BC, CD, DA romba, redom, u tačkama M, N, P i Q. Pokazati da je četverougao $\square MNPQ$ kvadrat.

27. Osnovne ivice kvadra (pravouglog paralelepipeda) odnose se kao $4:3$, dijagonale bočnih strana odnose se međusobno kao $\sqrt{20} : \sqrt{13}$ a površina dijagonalnog presjeka odnosi se prema zapremini (volumenu) kvadra kao $2:1$. Izračunati površinu i zapreminu ovog kvadra.

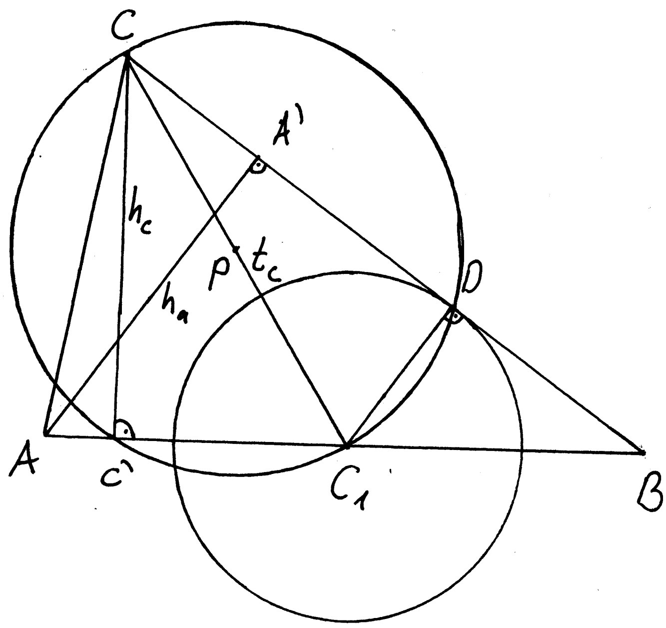
28. Dat je romb $\square ABCD$ sa uglom $\measuredangle BAD = 60°$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice AB, BC, CD, DA romba, redom, u tačkama M, N, P i Q. Ako znamo da je četverougao $\square MNPQ$ kvadrat pokazati da je $AM : MB = \sqrt{3} : 1$

29. Dat je romb $\square ABCD$ sa uglom $\measuredangle BAD = 60°$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice AB, BC, CD, DA romba, redom, u tačkama M, N, P i Q. Ako znamo da je četverougao $\square MNPQ$ kvadrat i da je $AM : MB = \sqrt{3} : 1$ naći razmjeru onih odsječaka veće i manje dijagonale romba, koji leži van četverougla $\square MNPQ$.

30. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i neka su tačke D, E i F takve da su trouglovi $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$ pravilni (jednakostranični) i pri tome su tačke D i C sa raznih strana prave $p(A,B)$, tačke A i E su sa raznih strana prave $p(B,C)$, tačke B i F su sa raznih strana prave $p(A,C)$. Dokazati da su duži AE, BF i CD međusobno podudarne.

(#) Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2} AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

Rješenje:



$AA' = h_a$

Prema pretpostavci zadatka $C_1D = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} h_a$,

Prema tome prvi krug može biti $k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a)$

Trougao ΔCDC_1 je pravougli pa je centar opisanog kruga tog trougla na sredini težišnice $t_c = CC_1$. Označimo tu tačku sa P.

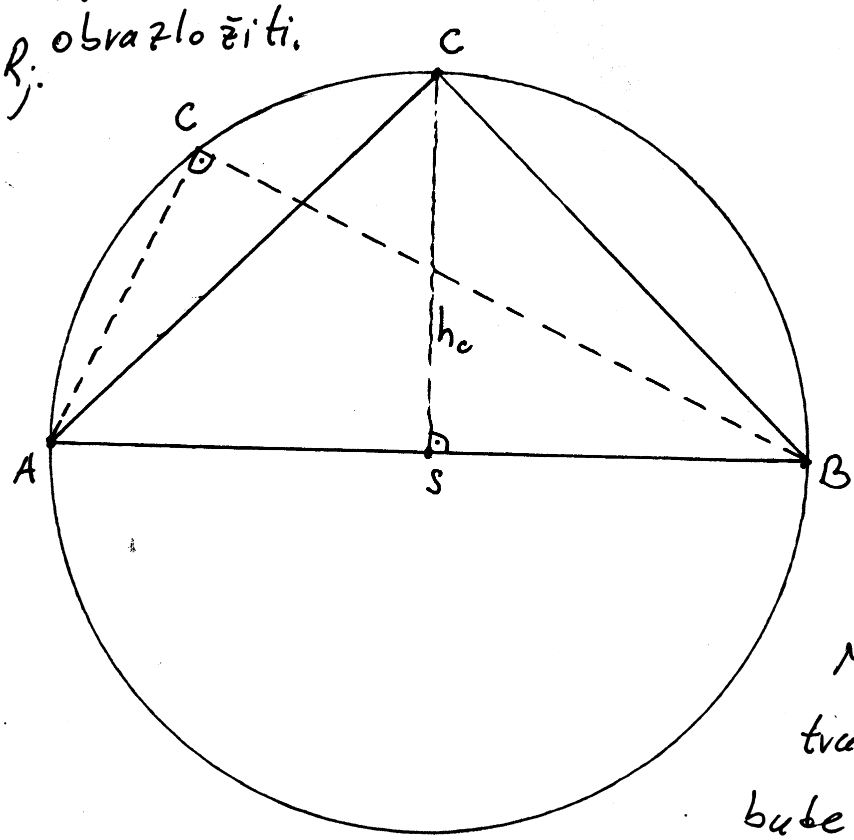
Drugi krug može biti $k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

Na kraju $\{D\} = k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a) \cap k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

q.e.d.

④ Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći;

$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijedi da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$.

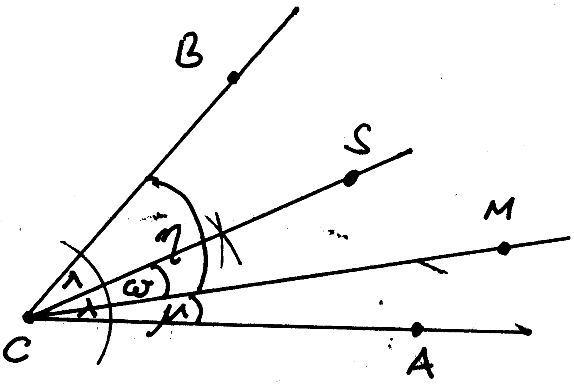
Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

\# Zadani su ugao $\sphericalangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\sphericalangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\sphericalangle ACB$. Dokazati da je

$$\sphericalangle SCM = \frac{1}{2}(\sphericalangle MCA - \sphericalangle MCB).$$

Rj.



Uvedimo oznake:

$\lambda = \sphericalangle ACS \cong \sphericalangle SCB$

$\omega = \sphericalangle SCM$

$\mu = \sphericalangle MCA$ i $\eta = \sphericalangle MCB$.

Trebamo pokazati da je

$$\omega = \frac{1}{2}(\mu - \eta)$$

$\omega = \lambda - \mu$

$\omega = \eta - \lambda$

tj.

$$\sphericalangle SCM = \sphericalangle ACS - \sphericalangle MCA$$

$$\underline{\sphericalangle SCM = \sphericalangle MCB - \sphericalangle SCB} \quad + \quad (\sphericalangle ACS \cong \sphericalangle SCB)$$

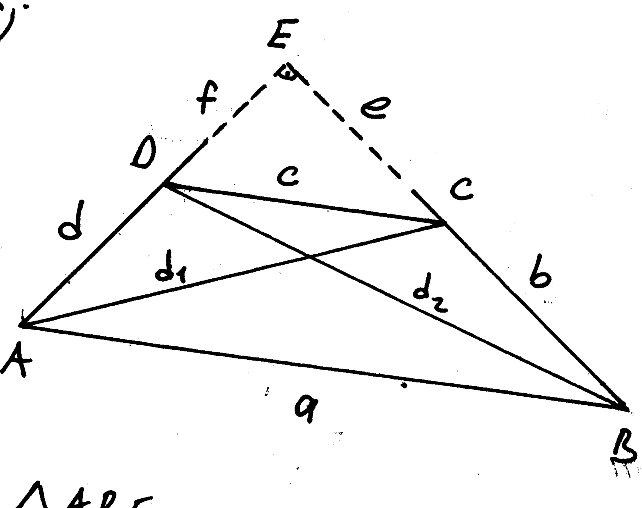
$$2\sphericalangle SCM = \sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA$$

$$\sphericalangle SCM = \frac{1}{2}(\sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA)$$

q.e.d.

\# Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

ΔACE je pravougli sa hipotenuzom AC

$$d_1^2 = (d+f)^2 + e^2 \quad \ldots (1)$$

ΔBDE je pravougli sa hipotenuzom BD

$$d_2^2 = (b+e)^2 + f^2 \quad \ldots (2)$$

ΔABE je pravougli sa hipotenuzom $AB \Rightarrow a^2 = (d+f)^2 + (e+b)^2$

ΔDCE je pravougli sa hipotenuzom $CD \Rightarrow c^2 = e^2 + f^2$

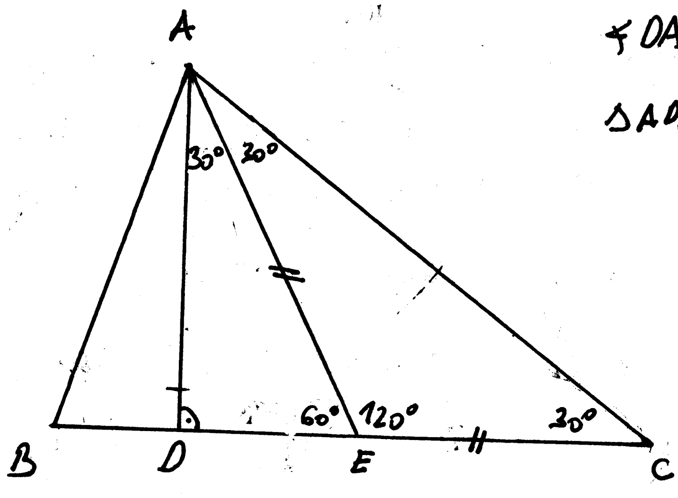
$(1)+(2) \Rightarrow \quad d_1^2 + d_2^2 = (d+f)^2 + e^2 + (b+e)^2 + f^2 = a^2 + c^2$

tj. $\quad d_1^2 + d_2^2 = a^2 + c^2$

q.e.d.

(#) U trouglu ΔABC je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\sphericalangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Nađi uglove trougla ΔABC i dokazati da je $AE = EC$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



$\sphericalangle DAE \cong \sphericalangle CAE = 30°$

ΔADE pravougli $\Rightarrow \sphericalangle AEC = 120°$

(vanjski ugao ΔADE)

$\Rightarrow \sphericalangle ACE = 30° \Rightarrow \Delta AEC$ jkk

tj. $AE = EC$

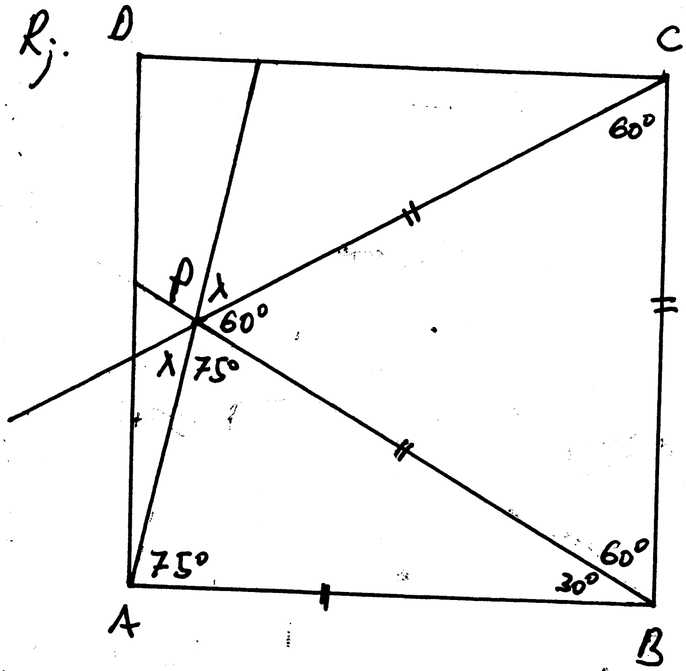
ΔABC jkk $\Rightarrow$

$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA = 75°$

$\alpha = 75°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 30°$

(#) Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao ΔBCP jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\sphericalangle CPE$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



ΔBCP jkk $\Rightarrow$ ima uglove po $60°$

$\sphericalangle ABC = 90° \Rightarrow \sphericalangle ABP = 30°$

$AB \cong BP \cong BC \Rightarrow \Delta ABP$ jkk

$\Rightarrow \sphericalangle BAP \cong \sphericalangle APB = 75°$

$\lambda + 60° + 75° = 180°$

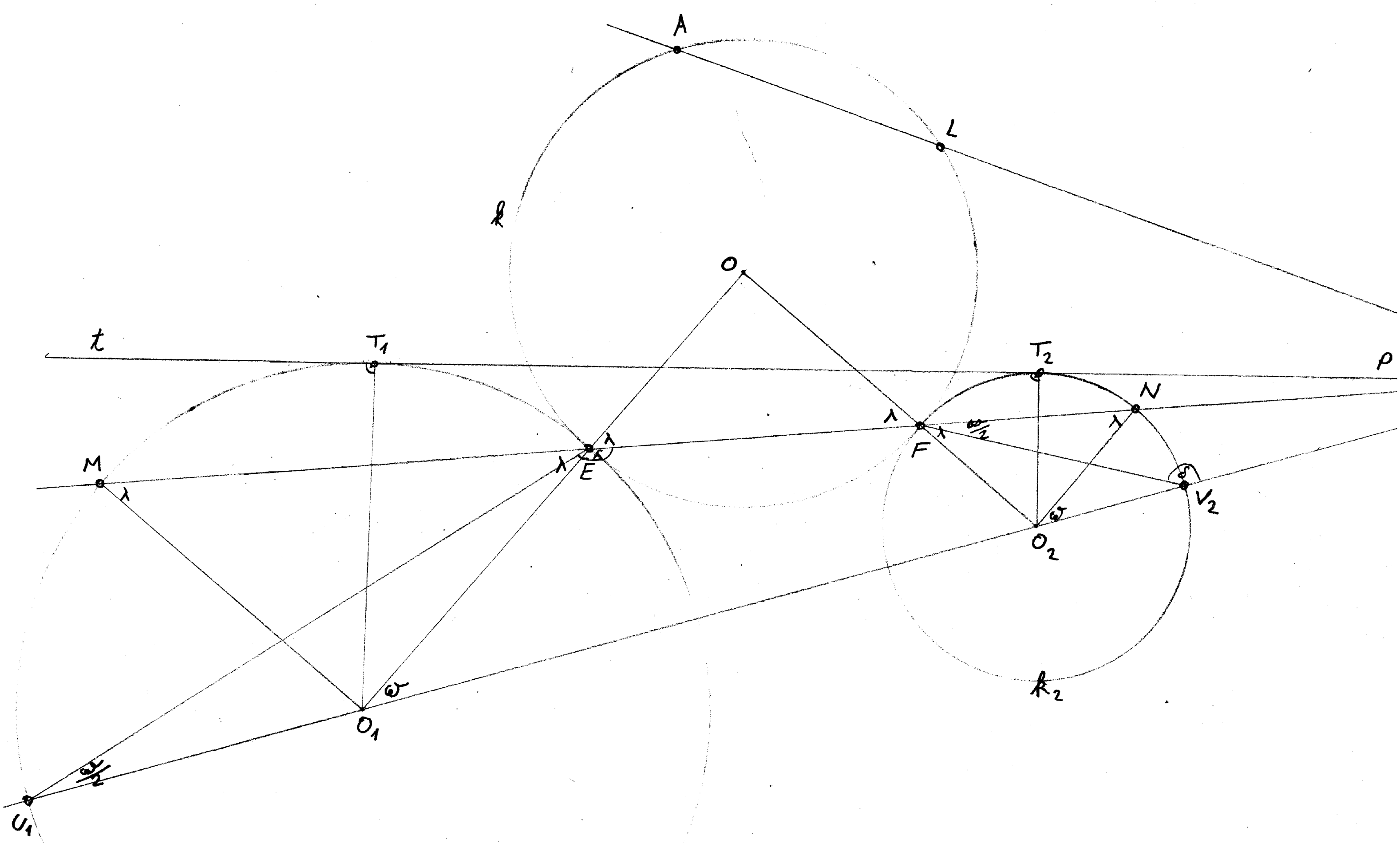
$\lambda = 45°$

Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.
Neka tražena kružnica $k(O,r)$ dodiruje kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ redom u tačkama E i F, i prolazi kroz tačku A. Kako je E dodirna tačka kružnica k_1 i k_2 to su tačke O_1, E i O kolinearne. Primjetimo da su i tačke O, F i O_2 kolinearne. Označimo sa $\{P\} = p(O_1,O_2) \cap p(E,F)$.
Dalje neka je $p(E,F) \cap k_1 = \{M,E\}$ i $p(E,F) \cap k_2 = \{F,N\}$.
Primjetimo da su trouglovi $\triangle MO_1E$, $\triangle EFO$ i $\triangle FO_2N$ jkk a kako imaju podudarne unakrsne uglove to je i $\measuredangle EMO_1 = \measuredangle O_1EM = \measuredangle OEF = \measuredangle EFO = \measuredangle NFO = \measuredangle O_2NF = \lambda$.
Kako su tačke N, F, E i M na istoj pravoj

$\Rightarrow p(O_1,M) \parallel p(O_2,F)$ i $p(O_1,E) \parallel p(O_2,N)$



Označimo sa $\{U_1, U_2\} = p(O_1, O_2) \cap k_1$ i $\{V_1, V_2\} = p(O_1, O_2) \cap k_2$.

Kako je ω centralni ugao $\Rightarrow \measuredangle EU_1P = \measuredangle PF_2 = \frac{\omega}{2}$.

Imamo
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle EPU_1 = \measuredangle V_2PF \\ \measuredangle EU_1P = \measuredangle PFV_2 = \frac{\omega}{2} \\ \measuredangle PEV_1 = \measuredangle FV_2P \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta EU_1P \sim \Delta V_2PF$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{PU_1}{PF} = \frac{PE}{PV_2} \Rightarrow PE \cdot PF = PU_1 \cdot PV_2 \quad \dots (*)$$

Primjetimo da je i $PA \cdot PL = PE \cdot PF \quad \dots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow PA \cdot PL = PU_1 \cdot PV_2 \Rightarrow PL = \dfrac{PU_1 \cdot PV_2}{PA}$

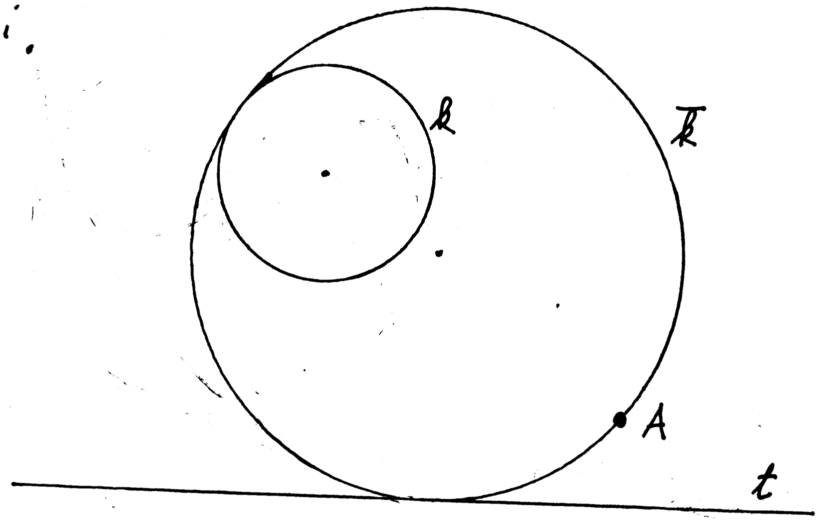
Da bi mogli konstruisati tačku L potrebna nam je tačka P.

$$\left.\begin{array}{l} p(O_1, M) \parallel p(O_2, F) \xRightarrow{T_0T_0} \dfrac{PM}{PF} = \dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{MO_1}{FO_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \\ p(O_1, E) \parallel p(O_2, N) \xRightarrow{T_0T_0} \dfrac{PE}{PN} = \dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{O_1E}{O_2N} = \dfrac{r_1}{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P$ je centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 sa koeficijentom sličnosti $\frac{r_1}{r_2}$.

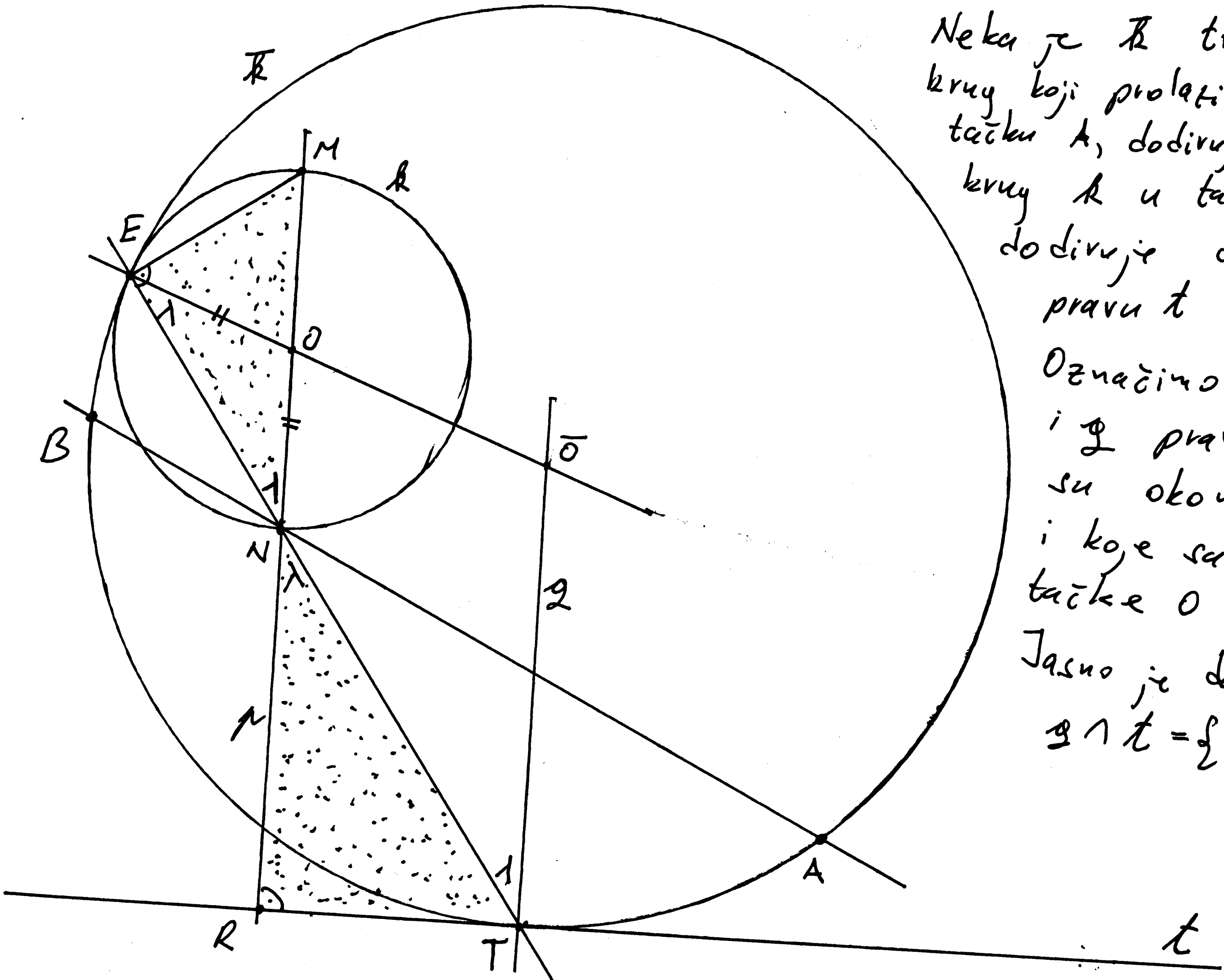
Ako pretpostavimo da je $p(P, T_2)$ tangenta kružnice k_2 (gdje je $T_2 \in k_2$), kako je P centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 to i tačku $T_2 \in k_2$ preslikava u tačku $T_1 \in k_1$ $\Rightarrow p(P, T_1)$ je tangenta kružnice k_1. Prema tome tačku P možemo konstruisati ($p(O_1, O_2) \cap p(T_1, T_2) = \{P\}$). Poslije tačke P možemo konstruisati tačku L pa se zadatak svodi na Apolonijev problem.

(#) Dat je krug $k(O,r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O},\bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A, i dodiruje krug k i pravu t kao na skici.



Rj. <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\bar{k}$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug k u tački E i dodiruje datu pravu t u tački T. Označimo sa p i q prave koje su okomite na t i koje sadrže redom tačke O i $\bar{O}$. Jasno je da $q \cap t = \{T\}$.

Dalje, neka je $t \cap p = \{R\}$ i $p \cap k = \{M, N\}$ t.d. $R-N-M$. Prava $p(\bar{O}, E)$ prolazi kroz tačku O (ZAŠTO? Objasniti ovo). Posmatrajmo sad trouglove ΔEON i $\Delta E\bar{O}T$.

Trougao $\Delta E\bar{O}T$ je jednakokraki ($E\bar{O} \cong T\bar{O}$) pa je $\sphericalangle \bar{O}ET \cong \sphericalangle \bar{O}TE = \lambda$. Isto tako ΔEON je jkk ($OE \cong ON$) pa je $\sphericalangle OEN \cong \sphericalangle ONE = \lambda$. Želimo pokazati da $N \in p(E,T)$. Kako je $p \parallel q$ i $p(N,T)$ transferzala to je $\sphericalangle TNR = \lambda$

Sad na pravoj p imamo $\sphericalangle TNR = \lambda = \sphericalangle ONE \Rightarrow N \in p(E,T)$

Posmatrajmo ΔRTN i ΔENM. U njima imamo po jedan ugao od $90°$, ugao λ pa je i treći ugao podudaran.

$$\overset{(\text{slič. UUU})}{\Longrightarrow} \Delta RTN \sim \Delta ENM$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{NT}{NM} = \frac{NR}{NE} \Rightarrow NT \cdot NE = NM \cdot NR \quad \ldots (1)$$

Posmatrajmo pravu $p(N,A)$. Neka je $p(N,A) \cap k = \{A, B\}$ t. d. $B - N - A$. Ako posmatramo krug k imamo

$$NA \cdot NB = NT \cdot NE \quad \ldots (2)$$

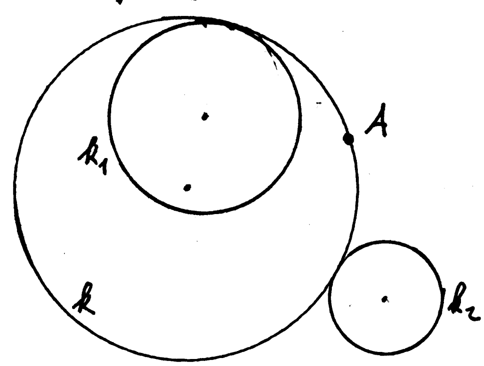
$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow NA \cdot NB = NM \cdot NR$$

$$NB = \frac{NM \cdot NR}{NA} \quad \ldots (3)$$

Sad, kako su nam poznate tačke A, N, M, R to možemo prema (3) možemo konstruisati tačku B pa smo naš problem sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje datu pravu. Ovaj problem smo već imali, nije teško konstruisati pomoćni krug i uz pomoć njega dobiti tačku T.

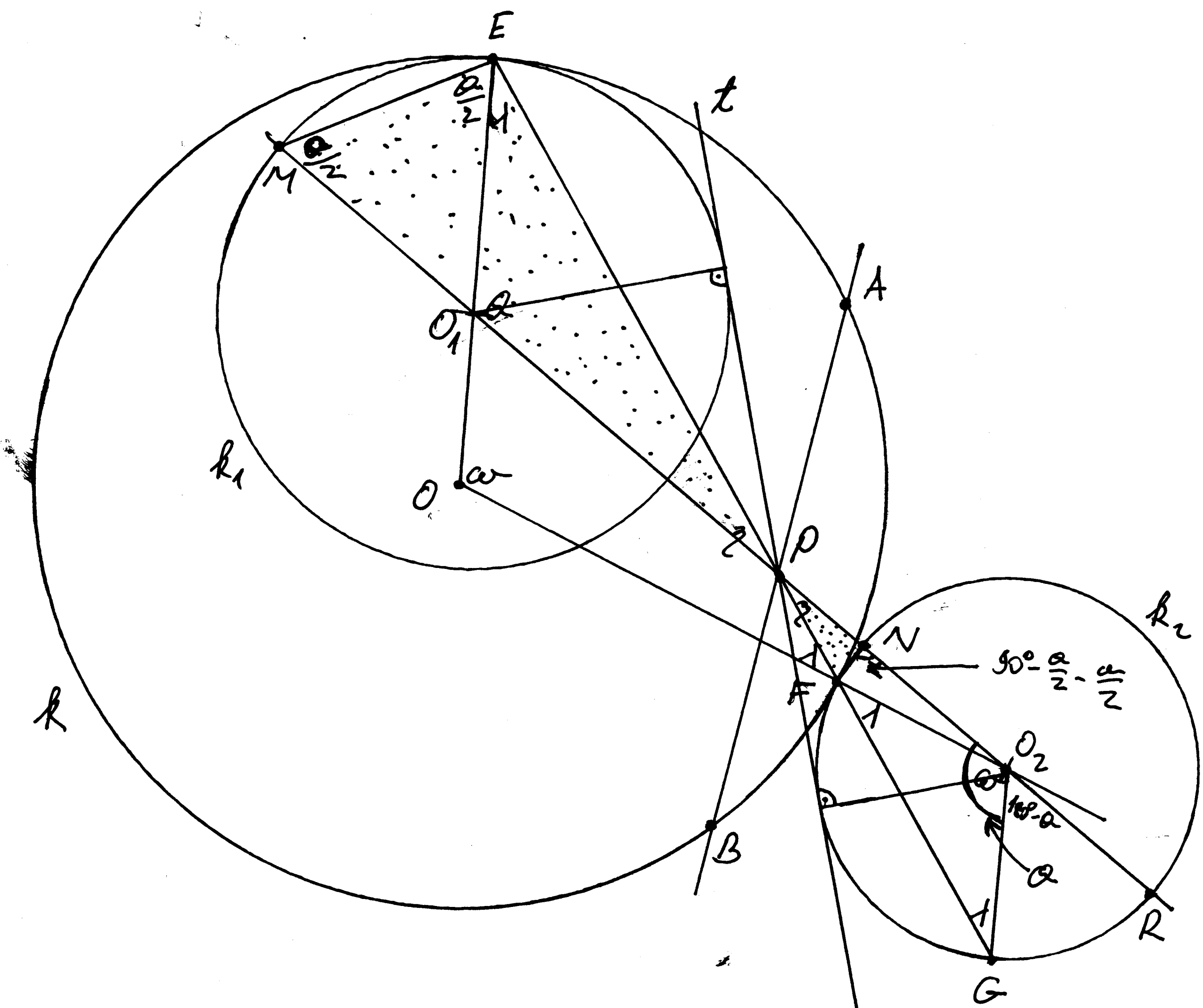
Prema tome, traženi krug možemo konstruisati.

(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug $k(O, r)$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici.



Rj: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O, r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ redom u tačkama E i F.



Označimo sa M i N tačke na pravoj $p(O_1, O_2)$ tako da je $M-O_1-N-O_2$ i $M \in k_1$, $N \in k_2$. Dalje neka je P tačka

$\{P\} = p(O_1, O_2) \cap p(E, F)$.

Kako je F dodirna tačka krugova k i k_2 znamo da je $O-F-O_2$

Neka je $\{G\} = p(E, F) \cap k_2$

Ako označimo sa λ ugao $\measuredangle O_2FG$ imamo da je i

$\measuredangle OFE = \lambda$ (unakrsni) $\Rightarrow \measuredangle OEF \cong \measuredangle FGO_2 = \lambda$ (trouglovi ΔOFE i ΔFGO_2 su jkk) $\Rightarrow \measuredangle EOF \cong \measuredangle GO_2F = \omega$.

Pa na pravoj $p(O, O_2)$ imamo ugao ω $\Rightarrow p(O, E) \parallel p(O_2, G)$.

Dalje, želimo pokazati da su trouglovi ΔMEP i ΔPFN slični. Neka je $R \in k_2$ t.d. $N-O_2-R$. Posmatrajmo oštri periferiski ugao $\measuredangle FNR$ nad lukom FGR. Njemu odgovarajući centralni je $\measuredangle FO_2R$ (nad istim lukom) Ako označim sa θ ugao $\measuredangle NO_2G$ imamo da je $\measuredangle RO_2G = 180° - \theta$.

Isto tako, kako je $p(O, E) \parallel p(G, O_2)$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala $\measuredangle EO_1P = \theta$. Sad oštri periferiski ugao $\measuredangle FNR$ iznosi $90° - \frac{\theta}{2} + \frac{\omega}{2}$ (zato što je centralni $\measuredangle FO_2R = \omega + 180° - \theta$).

Prema tome možemo zaključiti da je $\measuredangle FNP = 90° + \frac{\theta}{2} - \frac{\omega}{2}$.

Trougao ΔMO_1E je jkk sa osnovicom EM i vanjskim uglom kod vrha O_1 θ pa je $\measuredangle O_1ME \cong \measuredangle O_1EM = \frac{\theta}{2}$.

Znamo da je $2\lambda + \omega = 180° \Rightarrow \lambda = 90° - \frac{\omega}{2}$ tj. imamo da je $\measuredangle MEP = \frac{\theta}{2} + 90° - \frac{\omega}{2}$. Možemo zaključiti

$$\left.\begin{aligned} &\measuredangle PNF \cong \measuredangle MEP = 90° + \frac{\theta}{2} - \frac{\omega}{2} \\ &\measuredangle NPF \cong \measuredangle EPM \text{ (unakrsni)} \\ &\measuredangle EMP \cong \measuredangle PFN \text{ (treći ugao)} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(slič. UUU)}} \Delta PFN \sim \Delta PME$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MP}{PF} = \frac{PE}{PN}$$

tj. $MP \cdot PN = PE \cdot PF$ ...(1)

Sad ako označimo sa B tačku na k t.d. $A-P-B$ zbog potencije tačke imamo $PA \cdot PB = PE \cdot PF$ ...(2)

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \quad PA \cdot PB = PM \cdot PN$$

$$PB = \frac{PM \cdot PN}{PA}$$

Pa kako imamo tačke M i N, ako bi mogli konstruisati tačku P odmah bi mogli konstruisati i tačka B.

Posmatrajmo tačke M, O_1 i E. Pokazaćemo da se one redom homotetično preslikavaju u tačke R, O_2 i G, sa centrom homotetije u tački P.

Trouglovi ΔEO_1P i ΔGO_2P su slični (trivijalno)

$$\frac{PE}{PG} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1E}{O_2G} = \frac{r_1}{r_2} \quad ...(3)$$

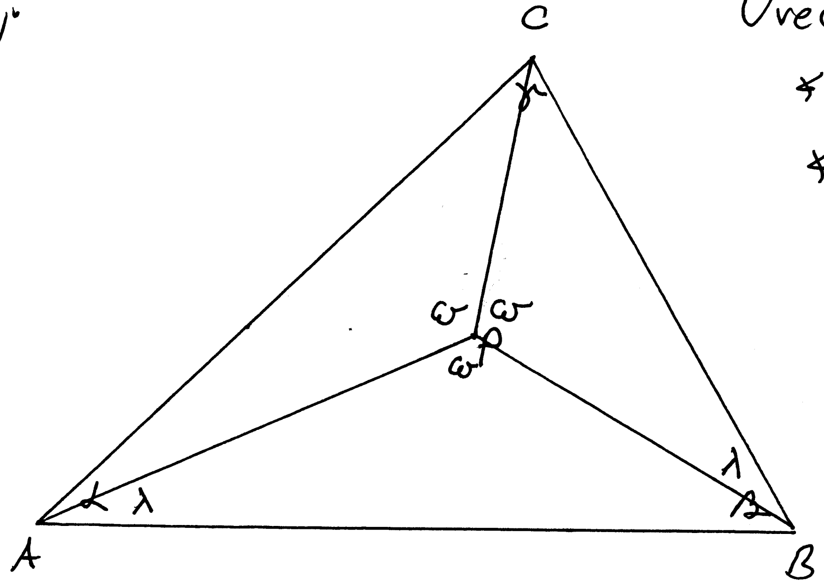
Isto tako $\Delta PME \sim \Delta PRG$ (ZAŠTO?) pa

$$\frac{PM}{PR} = \frac{PE}{PG} = \frac{ME}{GR} \overset{(3)}{=} \frac{r_1}{r_2} \quad ...(4)$$

(3) i (4) $\Rightarrow$ krug k_1 se homotetično preslikava u krug k_2 sa centrom homotetije u tački P. Pa ako je t tangenta na k_1, prava t će biti tangenta i na krug k_2. Kako pravu t sad možemo konstruisati to možemo dobiti tačku P a poslije toga i tačku B. Naš problem smo sad sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje dati krug k_1 (ili k_2), a tu konstrukciju znamo od ranije pa je nije teško konstruisati.

(#) Za ΔABC vrijedi $2\sphericalangle CBA = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB$. U unutrašnjosti ΔABC je odabrana tačka P tako da vrijedi $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA$. Dokazati da je $PB^2 = PA \cdot PC$.

Rj.



Uvedimo oznake

$\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \omega$,

$\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle CBA = \beta$.

Prema postavci zadatka

$$2\beta = \alpha + \gamma .$$

Kako je $\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$ to je

$$2\beta = 180^\circ - \beta$$
$$\beta = 60^\circ$$

Dalje $3\omega = 360^\circ \Rightarrow \omega = 120^\circ$.

Sad imamo

$$\sphericalangle PAB = 180^\circ - \omega - \sphericalangle PBA = 60^\circ - \sphericalangle PBA = \sphericalangle ABC - \sphericalangle PBA = \sphericalangle PBC$$

tj. $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \lambda$

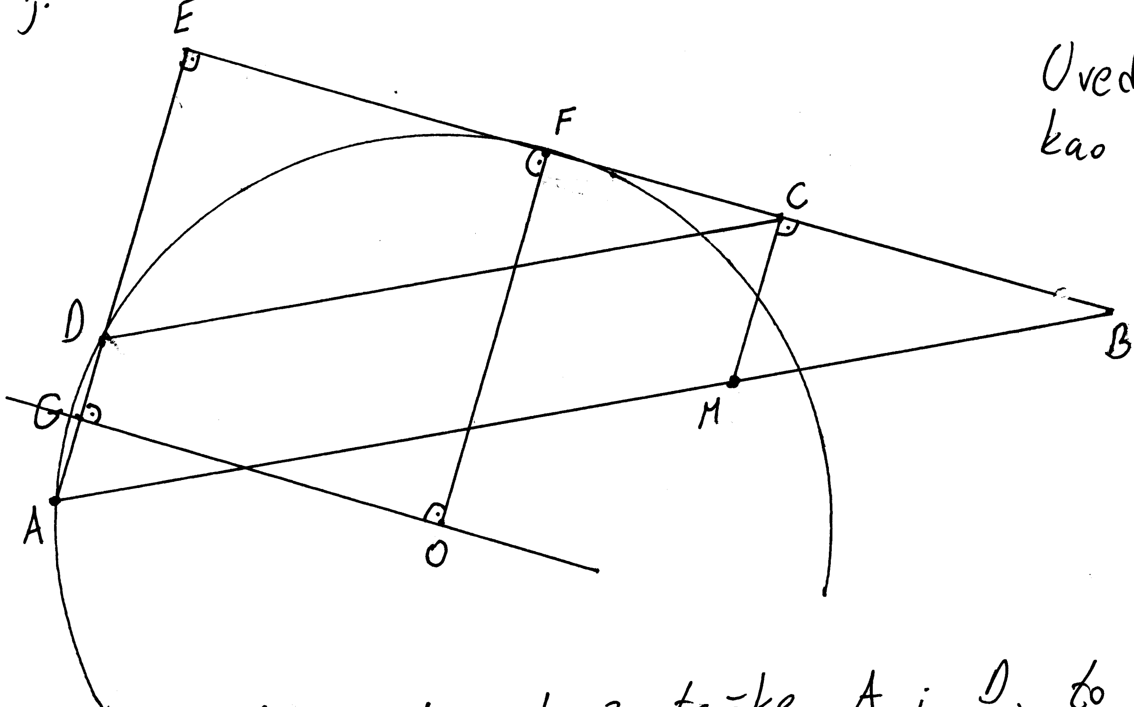
Kako su u trouglovima ΔABP i ΔPBC podudarna dva ugla to je podudaran i treći ugao pa prema sličnost SUU

$$\Delta ABP \sim \Delta PBC$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{AP}{PB} = \frac{PB}{PC} \Rightarrow PB^2 = PA \cdot PC$$

q.e.d.

(#) Neka je dat trapez $\square ABCD$ sa osnovicama AB i CD, i neka je dat krug $k(O,r)$ koji prolazi kroz tačkama tačke A i D i dodiruje pravu $p(B,C)$ u tački F. Na osnovici AB data je tačka M taka da je $\square AMCD$ paralelogram i $MC \perp BC$. Ako je $\{E\} = p(B,C) \cap p(A,D)$ i G sredina duži AD dokazati da je $\square OFEG$ pravougaonik.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Kako krug $k(O,r)$ prolazi kroz tačke A i D, to tačka O pripada simetrali duži AD. G je sredina AD pa je $OG \perp AD$.

Kako je $\square AMCD$ paralelogram to $p(A,D) \parallel p(M,C)$, a iz postavke zadatka znamo da je $BC \perp MC \Rightarrow AE \perp BE$.

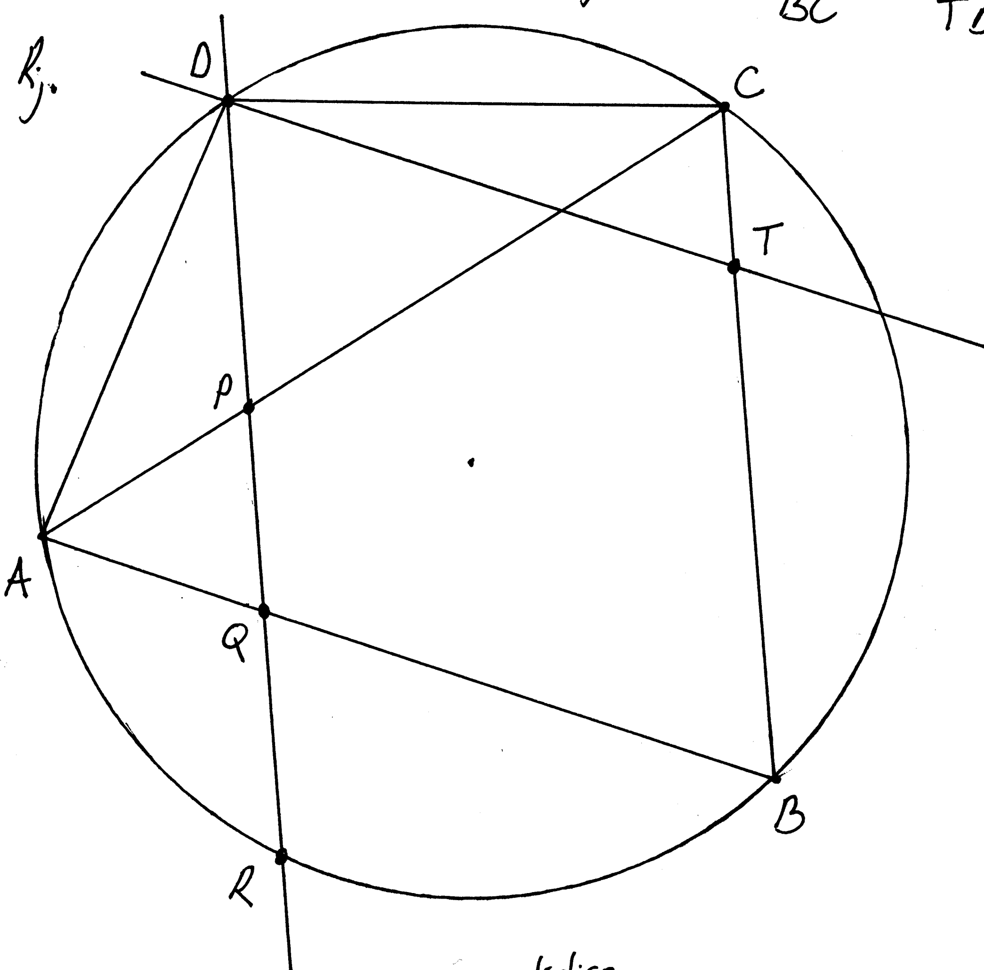
F je dodirna tačka kruga $k(O,r)$ i prave $p(B,C)$ pa je $OF \perp BE$. Na kraju, kako je $p(B,C) \parallel p(O,G)$ (zato što na pravoj $p(A,E)$ imamo $\measuredangle OGE \cong \measuredangle FEG = 90°$) i kako je $OF \perp BE$ to je $OF \perp GO$.

Pokazali smo da su svi uglovi u $\square OFEG$ pravi uglovi

$\Rightarrow$ $\square OFEG$ je pravougaonik

\# Četverougao $\square ABCD$ je tetivni. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom BC siječe dijagonalu CA u tački P, stranicu AB u tački Q i krug opisan oko četverougla $\square ABCD$ u tački R. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom AB siječe pravu BC u tački T. Ako je $PQ \cong QR$ Dokazati da vrijedi $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BT}{TD}$.

Rj.



Posmatrajmo četverougao $\square ARBD$. Njegove tačke se sijeku u tački Q pa imamo $AQ \cdot QB = QR \cdot QD$

tj. $\dfrac{AQ}{QR} = \dfrac{DQ}{BQ}$

Kako je $QR \cong PQ$ to je

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{DQ}{BQ} \quad \ldots (*)$$

$$p(P,Q) \parallel p(B,C) \xRightarrow[\text{}]{\substack{\text{posljedice} \\ T_o T_o}} \frac{AQ}{QP} = \frac{AB}{BC} \quad \ldots (**)$$

$$(*) \wedge (**) \Rightarrow \frac{DQ}{BQ} = \frac{AB}{BC} \quad \ldots (\square)$$

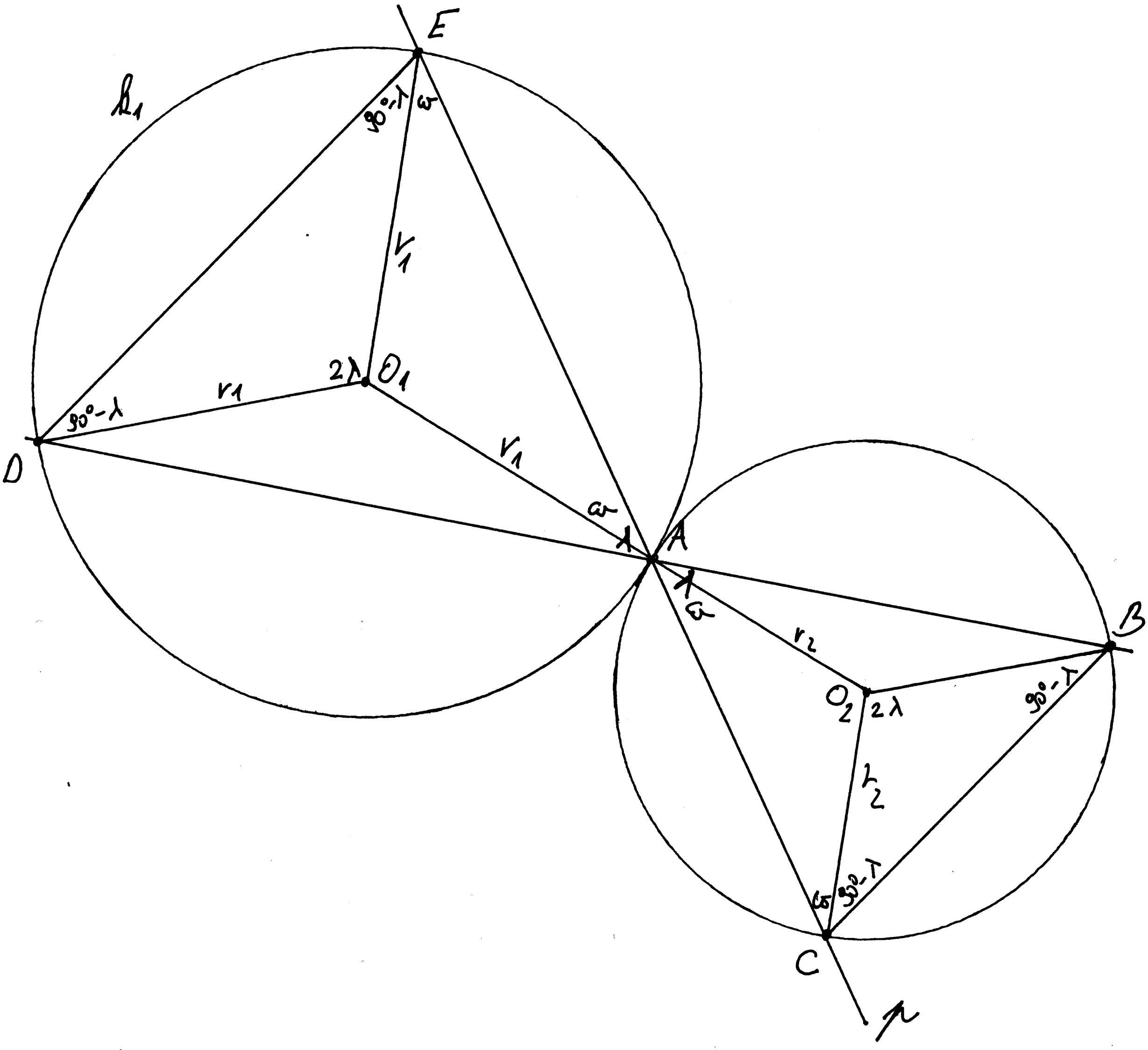
Primjetimo da je $\square QBTD$ paralelogram (Zašto?). Prema tome $DQ \cong BT \wedge BQ \cong TD$. Sad na osnovu $(\square)$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BT}{TD}$$

q.e.d.

(#) Dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ se dodiruju u tački A. Neka su p i q dvije proizvoljne prave koje prolaze kroz tačku A takve da $p \cap k_1 = \{A, E\}$, $p \cap k_2 = \{A, C\}$, $q \cap k_1 = \{A, D\}$ i $q \cap k_2 = \{A, B\}$. Pokazati da je $BC \parallel DE$.

Rj.



Dva unakrsna ugla $\measuredangle DAE$ i $\measuredangle BAC$ označimo sa λ. Kako su $\measuredangle DO_1E$ i $\measuredangle DAE$ centralni i periferijski uglovi nad tetivom DE to je $\measuredangle DO_1E = 2\lambda \overset{DO_1 \cong O_1E = r}{\Longrightarrow} \measuredangle O_1ED \cong \measuredangle O_1DE = 90° - \lambda$

Slično zaključimo da je $\measuredangle CO_2B = 2\lambda$ i $\measuredangle O_2CB \cong \measuredangle O_2BC = 90° - \lambda$.

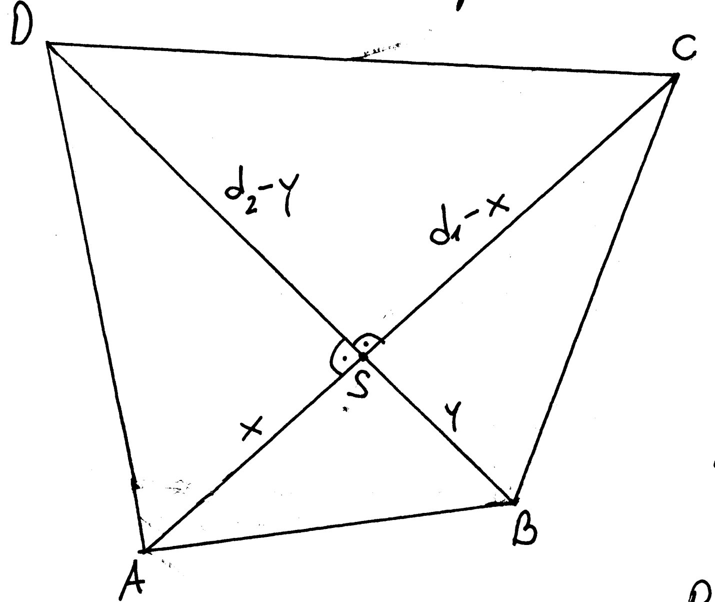
Prava $p(O_1, O_2)$ prolazi kroz tačku A, i unakrsne uglove $\measuredangle O_1AE \cong \measuredangle O_2AC$ označimo sa ω. Kako su trouglovi ΔAEO_1 i ΔACO_2 jkk sa jednim uglom ω na osnovici $\Rightarrow \measuredangle ACO_2 \cong \measuredangle AEO_1 = \omega$

Sad na pravoj $p(C, E)$ imamo dva podudarna ugla

$\measuredangle AED \cong \measuredangle ACB = \omega + 90° - \lambda \Rightarrow CB \parallel ED$ q.e.d.

(#) Neka je □ABCD raznostraničan četverougao čije se dijagonale d_1 i d_2 sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) izvesti formulu za površinu $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

R.j.



Tačku presjeka dijagonala označimo sa S, označimo sa x duž AS i sa Y duž BS.

Tada je $CS=d_1-x$, $DS=d_2-Y$

$P_{\triangle ABS}=\frac{x\cdot Y}{2}$, $P_{\triangle BCS}=\frac{Y\cdot(d_1-x)}{2}$

$P_{\triangle CDS}=\frac{(d_2-Y)(d_1-x)}{2}$, $P_{\triangle ASD}=\frac{x\cdot(d_2-Y)}{2}$

$$P_{\square ABCD}=P_{\triangle ABS}+P_{\triangle BCS}+P_{\triangle CDS}+P_{\triangle ASD}=\frac{\cancel{xY}+Yd_1\cancel{-xY}+d_1d_2\boxed{-d_2x}-d_1Y\cancel{+xY}\boxed{+d_2x}\cancel{-xY}}{2}$$

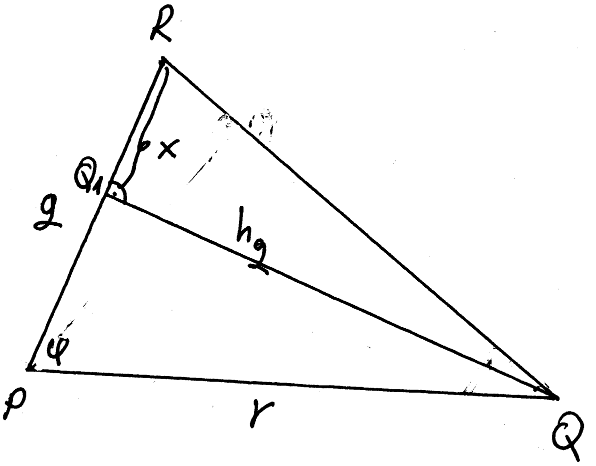
$$=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$$

tj. $P_{\square ABCD}=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$

q.e.d.

(#) Neka je ΔPQR dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR=\varphi$). Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) i definicije trigonometrijskih f-ja izvesti formulu za površinu datog trougla. $P=\frac{r\cdot g}{2}\sin\varphi$.

Rj.



Neka je $QQ_1=h_g$ visina datog trougla. Tada

$$\sin\varphi=\frac{h_g}{r} \Rightarrow$$

$$h_g=r\sin\varphi \qquad \dots(1)$$

Površina datog trougla se može izračunati po formuli $P=\frac{h_g\cdot g}{2}$. Ovo nije teško izvesti (neka je $x=RQ_1$)

$$P_{\Delta PQR}=P_{\Delta PQQ_1}+P_{\Delta QRQ_1}=\frac{(g-x)\,h_g}{2}+\frac{x\cdot h_g}{2}=\frac{g\cdot h_g}{2}$$

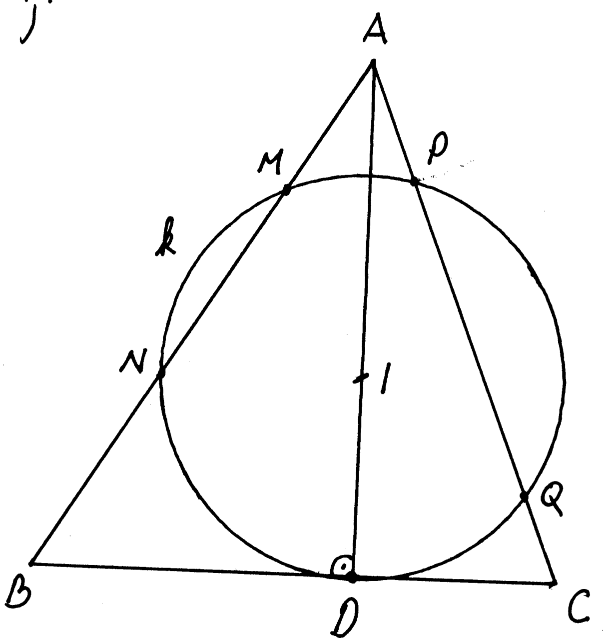
Prema tome

$$P_{\Delta PQR}=\frac{h_g\cdot g}{2}\overset{(1)}{=}\frac{r\cdot g}{2}\sin\varphi$$

q.e.d.

(#) Visina iz vrha A trougla ΔABC presjeca stranicu BC u tački D. Krug koji dodiruje stranicu BC u tački D, presjeca stranicu AB u tačkama M i N, a stranicu AC u tačkama P i Q. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$.

R.:



Kako krug k dodiruje stranicu BC u tački D to je njegov centar I na visini AD.

ΔABD pravougli

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 \quad \ldots (1)$$

Dalje iz potencije tačke B u odnosu na krug k imamo

$$BD^2 = BN \cdot BM \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 - BN \cdot BM \\ &= AB^2 - (AB - AN)(AB - AM) \\ &= \cancel{AB^2 - AB^2} + AB \cdot AM + AB\,AN - AM\,AN \end{aligned}$$

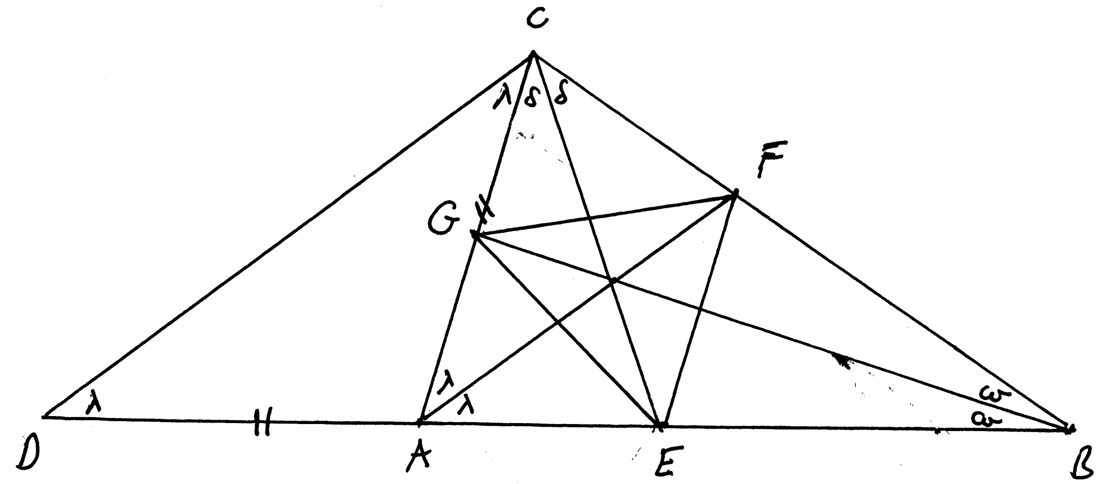
$$AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$$

q.e.d.

(#) Dat je raznostraničan ΔABC, i neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Dokazati da

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}.$$

Rj.



U ovom zadatku se u stvari traži da pokažemo da simetrala AF unutrašnjeg ugla $\measuredangle BAC$ ΔABC dijeli stranicu BC u omjeru druge dvije stranice.

Izaberimo tačku $D \in p(B,A)$ t.d. $B-A-D$ i $AD \cong AC$

ΔACD jkk $\Rightarrow$ $\measuredangle ADC = \measuredangle DCA = \lambda$

$\measuredangle CAB$ je vanjski ugao ΔADC $\Rightarrow$ $\measuredangle CAB = 2\lambda$

AF simetrala $\measuredangle BAC$ $\Rightarrow$ $\measuredangle BAF \cong \measuredangle CAF = \lambda$

$\measuredangle BAF \cong \measuredangle BDC = \lambda$ na pravoj $p(B,D)$ $\Rightarrow$ $p(A,F) \parallel p(D,C)$

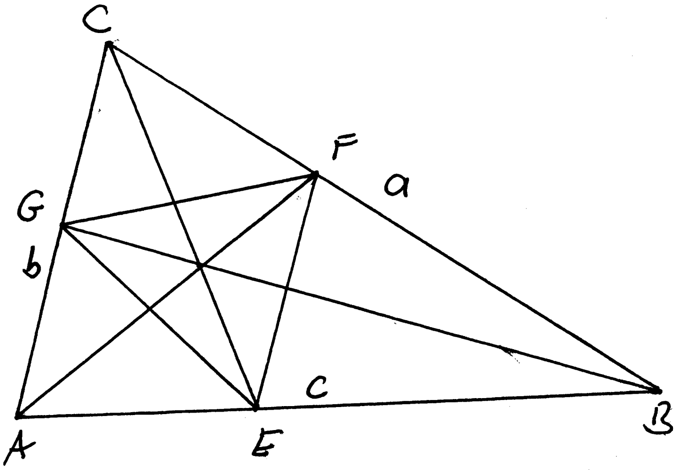
$$p(A,F) \parallel p(D,C) \xRightarrow{T.T.} \frac{BA}{AD} = \frac{BF}{FC}$$

$$\xRightarrow{AD \cong AC} \frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

(#) Raznostraničan trougao ΔABC ima dužine stranica a, b i c. Neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Znamo da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije stranice, pa imamo $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$. Iskoristiti ovu jednakost i pokazati da je $BE = \frac{ac}{a+b}$.

Rj.



CE simetrala $\measuredangle ACB$

$$\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}, \quad AC = b, \quad BC = a,$$

$BE = c - AE$ pa imamo

$$\frac{AE}{c-AE} = \frac{b}{a} \Rightarrow AE = \frac{b}{a}(c - AE)$$

$$AE + \frac{b}{a}AE = \frac{bc}{a}$$

$$AE\left(\frac{a+b}{a}\right) = \frac{bc}{a}$$

$$AE = \frac{bc}{a+b}$$

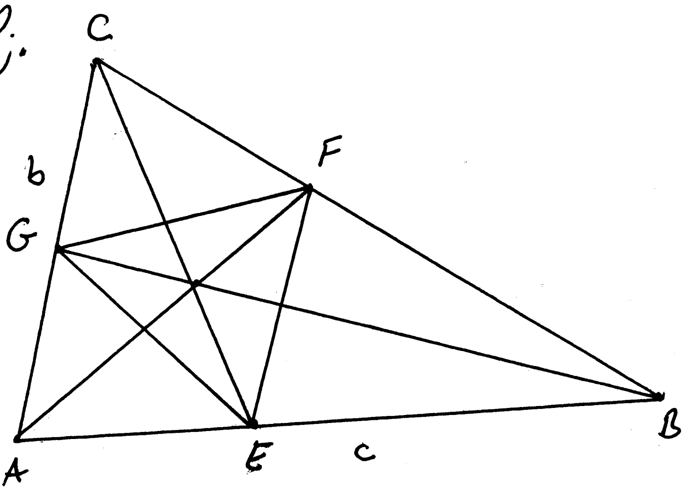
$$BE = c - AE = c - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a+b) - bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b}$$

q.e.d.

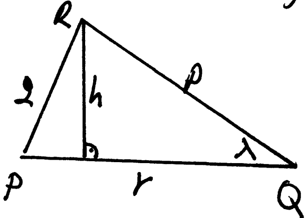
(#) Neka je ΔABC raznostraničan trougao i neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Dokazati da

$$P_{\Delta AEG} = P_{\Delta ABC} \frac{bc}{(a+c)(a+b)} .$$

Rj.



Od ranije znamo da za proizvoljan ΔPQR gdje je $\measuredangle PQR = \lambda$ vrijedi



$$P_{\Delta PQR} = \frac{r \cdot p}{2} \sin\lambda$$

Ovu formulu nije teško izvesti

$$\sin\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow h = p\sin\lambda$$

$$P_{\Delta PQR} = \frac{r \cdot h}{2} = \frac{r \cdot p}{2}\sin\lambda$$

$$P_{\Delta AEG} = \frac{AE \cdot AG}{2} \sin\alpha$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin\alpha = \frac{b \cdot c}{2} \sin\alpha$$

Simetrala unutrašnjeg ugla u Δ dijeli naspramnu stranicu u omjeru druge dvije pa imamo

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{c - AE} = \frac{b}{c} \xRightarrow{\text{ZA VJEŽBU}} \ldots \Rightarrow AE = \frac{bc}{a+b}$$

Slično

$$\frac{AG}{GC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AG}{b - AG} = \frac{c}{a} \xRightarrow{\text{ZA VJEŽBU}} \ldots \Rightarrow AG = \frac{bc}{a+c}$$

Prema tome

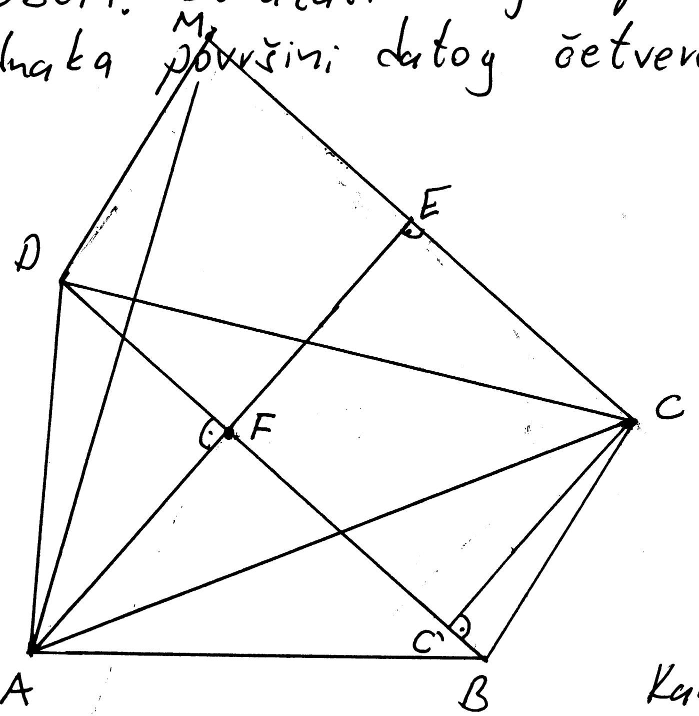
$$P_{\Delta AEG} = \frac{1}{2} AE \cdot AG \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \frac{bc}{(a+b)} \cdot \frac{bc}{(a+c)} \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} bc \sin\alpha \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = P_{\Delta ABC} \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$$

q.e.d.

(#) Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

Rj.



Neka je AE visina trougla $\triangle ACM$.

Tada

$$P_{\triangle ACM} = \frac{AE \cdot CM}{2} \quad \dots (*)$$

Označimo sa F presječnu tačku od BD i AE.

Kako je $BD \parallel MC$ i $AE \perp MC$ to je $AE \perp BD \Rightarrow AF$ visina $\triangle ABD$.

$$P_{\triangle ABD} = \frac{AF \cdot BD}{2} = \frac{AF \cdot MC}{2} \quad \dots (**)$$

Posmatrajmo $\triangle BCD$, i visinu CC' iz vrha C na stranicu BD.

Imamo $CC' \parallel EF$ i $CE \parallel C'F \Rightarrow \square C'CEF$ paralelogram

$$\Rightarrow CC' \cong EF \Rightarrow P_{\triangle BCD} = \frac{CC' \cdot BD}{2} = \frac{EF \cdot MC}{2} \quad \dots (***)$$

Prema tome

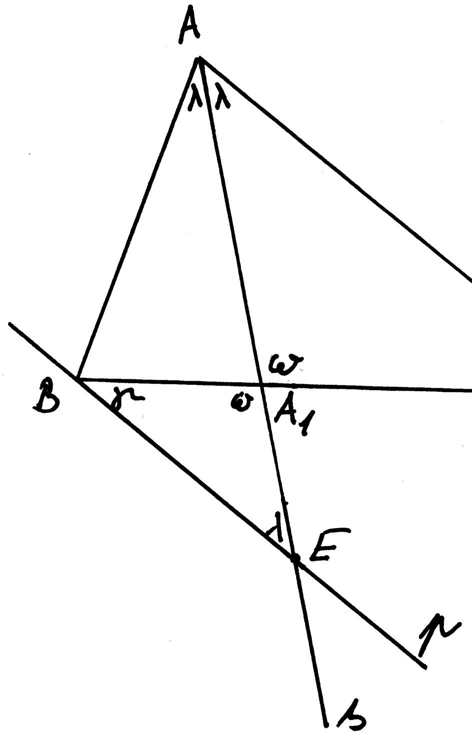
$$P_{\triangle ABC} \overset{(*)}{=} \frac{AE \cdot MC}{2} = \frac{(AF + FE) \cdot MC}{2} = \frac{AF \cdot MC}{2} + \frac{FE \cdot MC}{2}$$

$$\overset{(**) \text{ i } (***)}{=} P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} = P_{\square ABCD}$$

q.e.d.

(#) Tačka A_1 je presjek simetrale ugla A i naspremne strane BC trougla ΔABC. Dokazati da je $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$.

Rj.



Neka je dat ΔABC i neka je s simetrala ugla $\measuredangle CAB$. Sa A_1 označimo presjek $\{A_1\} = s \cap BC$.

Neka je p prava takva da $B \in p$ i $p \parallel p(A,C)$.

Neka je $\{E\} = s \cap p$

Posmatrajmo trouglove ΔBA_1E i ΔAA_1C.

Pokažimo da je $\Delta AA_1C \sim \Delta BA_1E$

$p(B,E) \parallel p(A,C)$ i $p(A,E)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BEA_1 \cong \measuredangle CAA_1 = \lambda$

$\measuredangle BA_1E \cong \measuredangle CA_1A$ (unakrsni)

$p(B,E) \parallel p(A,C)$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle A_1CA \cong \measuredangle ABE = \gamma$.

Prema sličnosti UUU $\Rightarrow \Delta AA_1C \sim \Delta BA_1E$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BE}{AC} \qquad \dots (*)$$

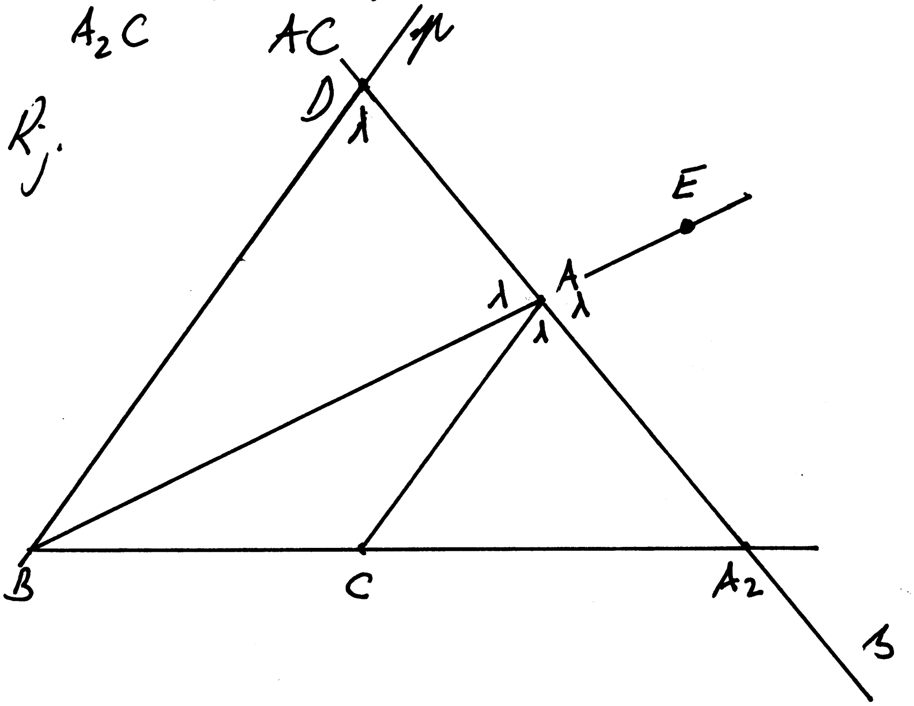
Primjetimo da je ΔBEA jkk ($\measuredangle BEA \cong \measuredangle BAE$) $\Rightarrow BE \cong BA$

Sad prema $(*)$ $\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$ q.e.d.

(#) Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla ΔABC siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$$

Rj:



Neka je dat trougao ΔABC, i neka je s simetrala spoljašnjeg ugla A trougla. Sa A_2 označimo tačku

$$\{A_2\} = s \cap p(B,C).$$

Neka je p prava takva da $p \parallel p(A,C)$ i $B \in p$. Tada, kako je $p(B,D) \parallel p(A,C)$, gdje je $\{D\} = s \cap p$, prema $T_o T_o$

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{BD}{AC} \quad \dots (*)$$

Pokažimo još da je $BD \cong AB$ tj. da je ΔABD jkk. Neka je E proizvoljna tačka na pp$[B,A)$ t.d. B-A-E. Primjetimo da je $\measuredangle A_2AE \cong \measuredangle BAD = \lambda$ (unakrsni uglovi). Kako je $p(B,D) \parallel p(A,C)$ i $p(D,A_2)$ transferzala to je $\measuredangle CAA_2 \cong \measuredangle BDA_2 = \lambda$. Prema tome $\measuredangle BDA \cong \measuredangle BAD = \lambda$

$\Rightarrow \Delta ABD$ jkk $\Rightarrow BD \cong BA$

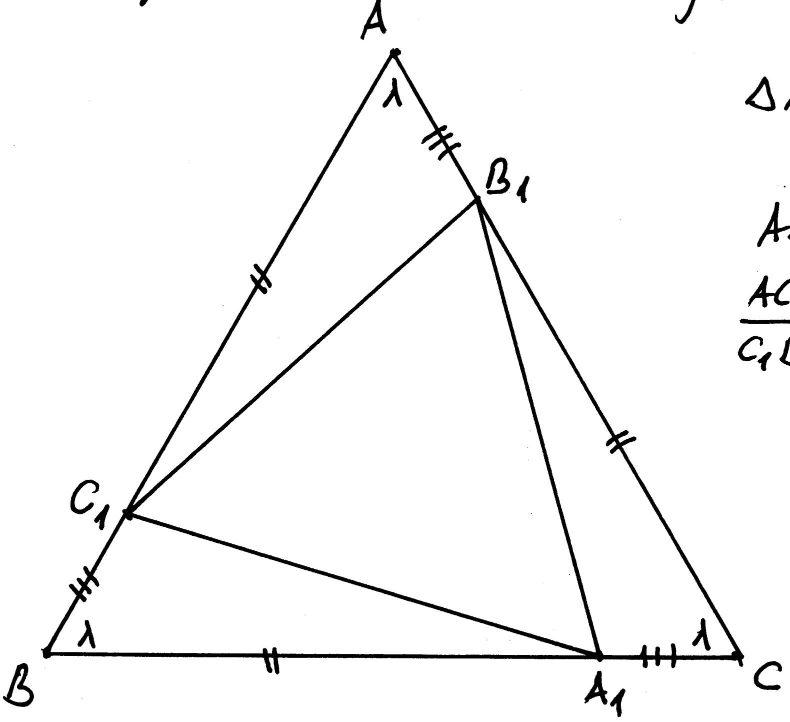
$$(*) \Rightarrow \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

(#) Na stranicama BC, CA i AB trougla ABC date su redom tačke A_1, B_1 i C_1, takve da je $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Dokazati da je $\Delta A_1B_1C_1$ jednakostraničan ako i samo ako je ΔABC jednakostraničan.

Rj.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je ΔABC jednakostraničan i pokažimo da tada slijedi da je $\Delta A_1B_1C_1$ jks.



ΔABC jks $\Rightarrow$ $AB \cong BC \cong CA$

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong BC \\ \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} \end{array}\right\} \Rightarrow AC_1 \cong BA_1 \text{ i } C_1B \cong A_1C$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \cong CA \\ \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} \end{array}\right\} \Rightarrow BA_1 \cong CB_1 \text{ i } A_1C \cong B_1A$$

$\Rightarrow$ $BA_1 \cong CB_1 \cong AC_1$; $A_1C \cong B_1A \cong C_1B$.

Kako je ΔABC jks $\Rightarrow$ $\sphericalangle C_1BA_1 \cong \sphericalangle A_1CB_1 \cong \sphericalangle B_1AC_1 = \lambda$.

Sad prema podudarnosti SUS $\Rightarrow$ $\Delta C_1BA_1 \cong \Delta A_1CB_1 \cong B_1AC_1$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

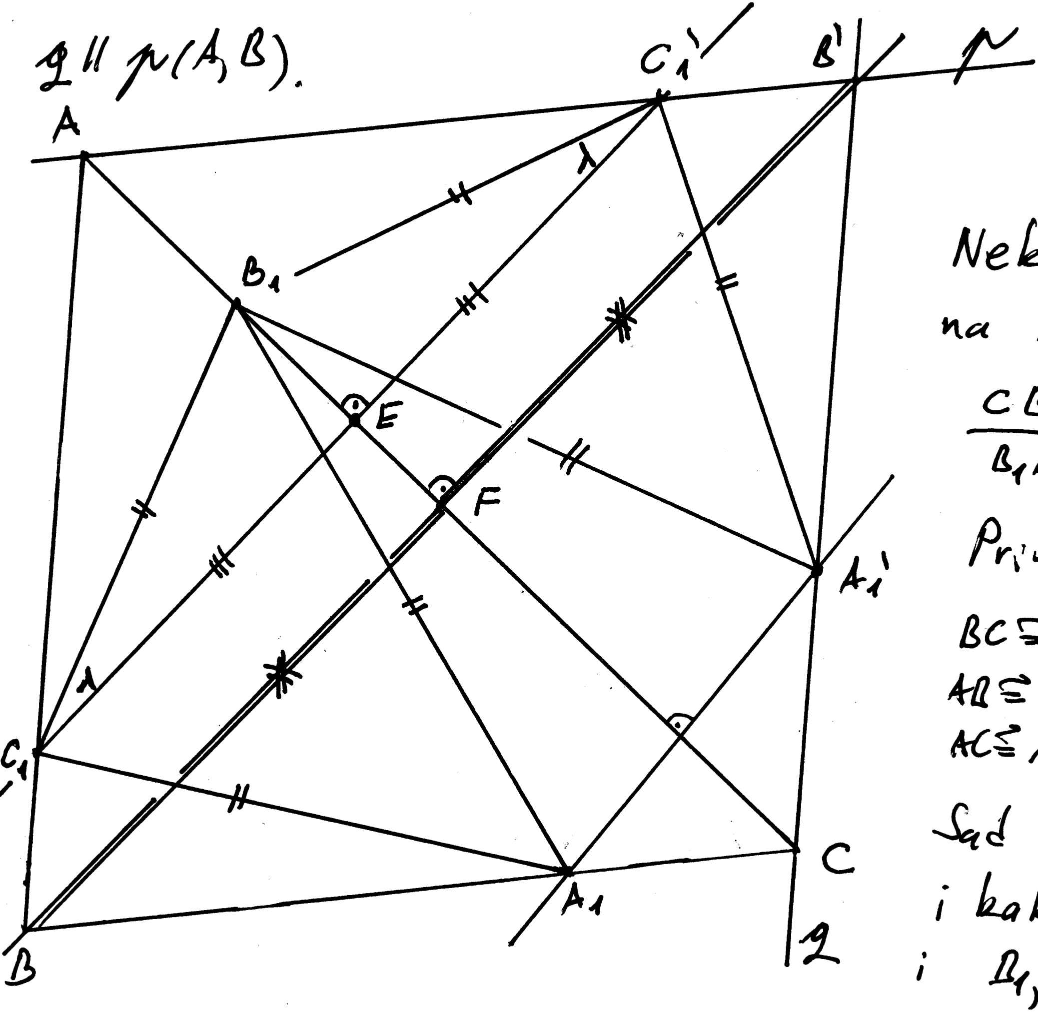
$$C_1A_1 \cong A_1B_1 \cong B_1C_1$$

$\Rightarrow$ $\Delta A_1B_1C_1$ jks q.e.d.

„$\Rightarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je $\Delta A_1B_1C_1$ jks i pokažimo da je tada ΔABC jks.

Nacrtajmo novu sliku. Kroz tačku A provucimo pravu p t.d. $p \parallel p(BC)$, a kroz tačku C provucimo pravu q t.d.

$q \parallel p(A,B)$.



Neka je B'

$\{B'\} = p \cap q$.

Neka su C_1' i A_1' redom tačke na AB' i $B'C$ takve da

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1'}{C_1'B'} = \frac{B'A_1'}{A_1'C}.$$

Primjetimo da

$$\left.\begin{aligned} BC &\cong AB' \\ AB &\cong B'C \\ AC &\cong AC \end{aligned}\right\} \xRightarrow{SSS} \Delta ABC \cong \Delta ACB'$$

Sad kako je $\Delta ABC \cong \Delta CB'A$ i kako za tačke A_1, B_1, C_1 i B_1, C_1', A_1' vrijede isti odnosi to je i $\Delta B_1A_1'C_1'$ jks. Dalje primjetimo

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} \quad i \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1'}{C_1'B'} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_1'}{C_1'B} \xRightarrow{O.T.T.} p(B,B') \parallel p(C_1, C_1')$$

Slično

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} \quad i \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{B'A_1'}{A_1'C} \Rightarrow \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_1'}{A_1'B} \xRightarrow{O.T.T.} p(A_1, A_1') \parallel p(B,B')$$

Neka je $\{E\} = C_1C_1' \cap AC$ i posmatrajmo ΔB_1C_1E i $\Delta B_1C_1'E$.
Prvo pokažimo da je E sredina stranice C_1C_1' pa pokažimo $\Delta B_1C_1E \cong \Delta B_1C_1'E$.
Znamo da se dijagonale paralelograma polove, pa neka se dijagonale paralelograma $ABCB'$ polove u tački F.

$$p(C_1, C_1') \parallel p(B, B') \xRightarrow{T.T.} \frac{AB'}{AC_1'} = \frac{AF}{AE} = \frac{B'F}{EC_1'} = \frac{AB}{AC_1} = \frac{BF}{C_1E} \Rightarrow \overbrace{\frac{B'F}{BF}}^{=1} = \frac{EC_1'}{C_1E}$$

$\Rightarrow EC_1' \cong C_1E \Rightarrow E$ sredina C_1C_1'

$$\left.\begin{aligned} C_1B_1 &\cong C_1'B_1 \\ \measuredangle EC_1B_1 &\cong \measuredangle EC_1'B_1 = \lambda \\ B_1E &\cong B_1E \end{aligned}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta B_1C_1E \cong \Delta B_1C_1'E$$

$\Downarrow$

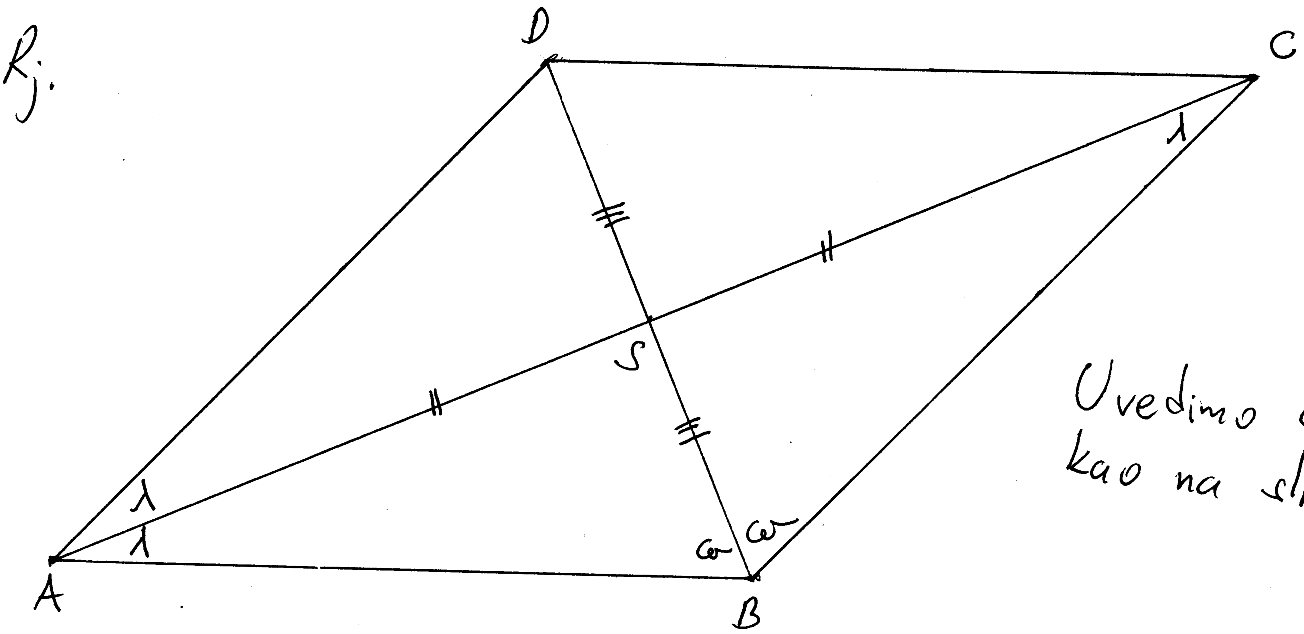
$\measuredangle B_1EC_1 \cong \measuredangle B_1EC_1' = 90^\circ$

$\measuredangle BFA \cong \measuredangle B'FA = 90^\circ$

ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

Dat je romb $\square ABCD$. Pokazati da je $AC \perp BD$ i da su dijagonale ujedno i simetrale uglova romba.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Iz osobina romba znamo $AB \cong BC \cong CD \cong AD$ i $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

$\triangle ABC$ jkk $(AB \cong BC) \Rightarrow \measuredangle BAS \cong \measuredangle BCS = \lambda$

$AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow$ romb je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ BS \cong BS \\ AB \cong BC \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle ABS \cong \triangle CBS$$

$\Downarrow$

$\measuredangle ASB \cong \measuredangle CSB$ a kako su ovo dva naporedna ugla $\Rightarrow AC \perp BD$

q.e.d.

i $\measuredangle ABS \cong \measuredangle CBS = \omega \Rightarrow BD$ simetrala $\measuredangle ABC$

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong AS \\ AB \cong AD \\ BS \cong DS \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle ASD \cong \triangle ASB$$

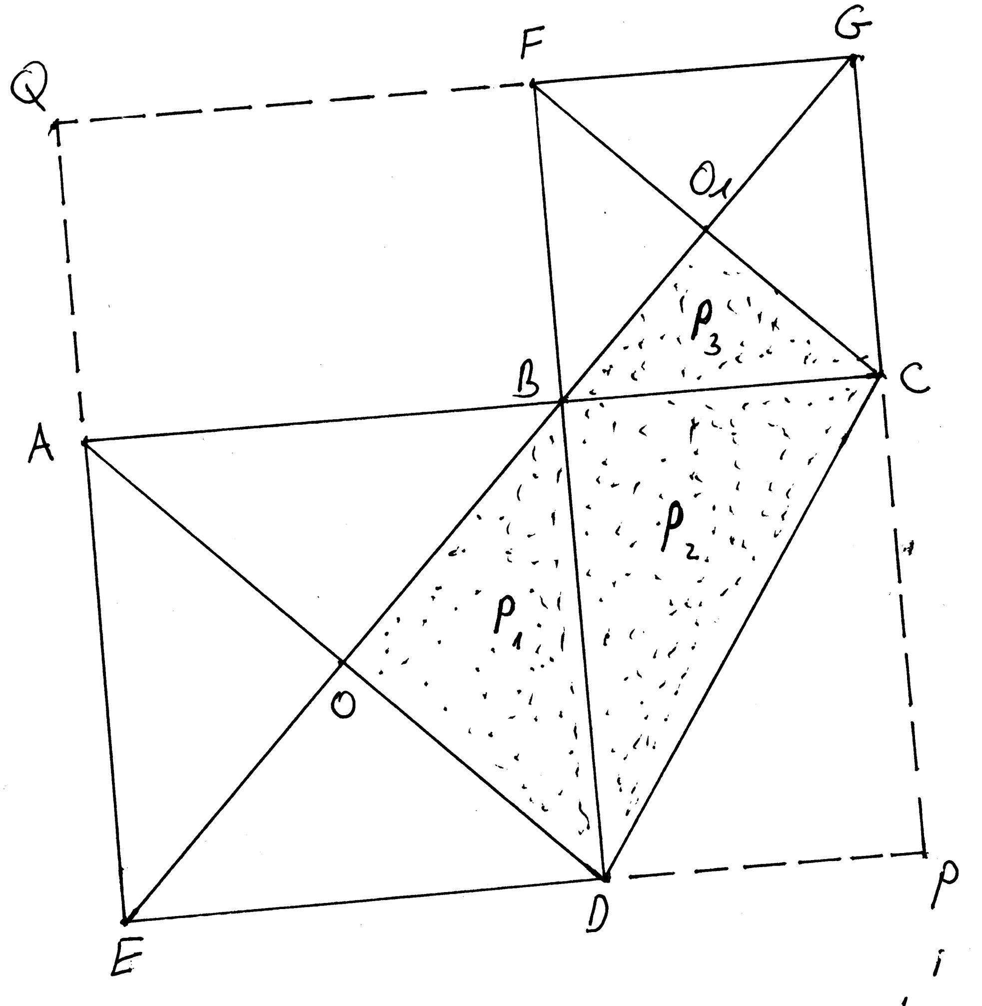
$\Downarrow$

$\measuredangle BAS \cong \measuredangle SAD = \lambda \Rightarrow AC$ simetrala $\measuredangle BAD$.

Na sličan način bi pokazali da je BD simetrala $\measuredangle ADC$ i AC sim $\measuredangle BCD$.

(#) Duž $AC = a$ svojom unutrašnjom tačkom B podjeljena je u odnosu $3:2$. Nad dužima AB i BC, sa raznih strana u odnosu na duž AC, konstruisani su kvadrati $\square ABDE$ i $\square CBFG$. Neka su O i O_1 presjeci dijagonala ovih kvadrata. U kojoj razmjeri stoje površina četverougla OO_1CD i površina kvadrata kome je stranica duž AC?

Rj.



Formirajmo kvadrat koji će sadržavati dva data kvadrata i uvedimo oznake kao na slici iznad. Primjetimo da je $AC \cong QG \cong EP \cong GP \cong QE$

P_1 je $\frac{1}{4}$ površine kvadrata $\square AEDB$

P_2 je $\frac{1}{4}$ površine $P_{\square DPCB} + P_{\square ABFQ}$

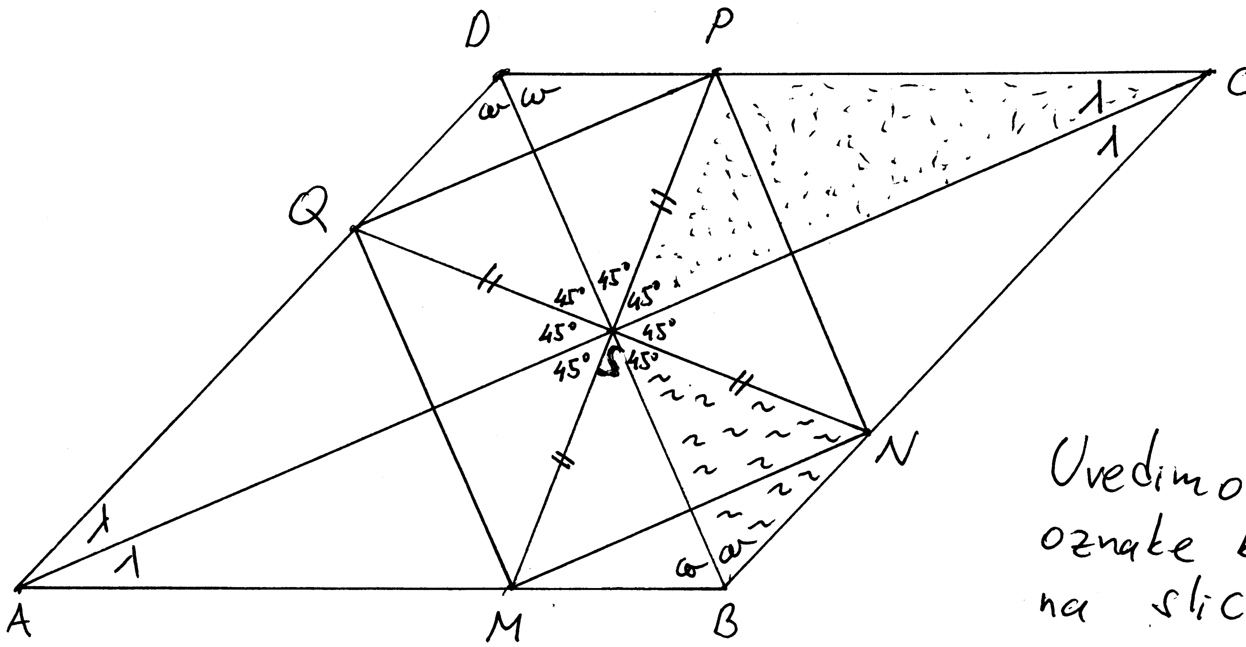
P_3 je $\frac{1}{4}$ površine kvadrata $\square BCGF$

Kako je $P_{\square EPGQ} = P_{\square AEDB} + (P_{\square DPCB} + P_{\square ABFQ}) + P_{\square BCGF}$ to je

$$P_{\square EPGQ} : P_{\square ODCO_1} = 4 : 1$$

(#) Dat je romb $\square ABCD$. Simetrale uglova između dijagonala romba sijeku stranice AB, BC, CD, DA redom u tačkama M, N, P i Q. Pokazati da je četverougao $\square MNPQ$ kvadrat.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Znamo da se dijagonale romba polove pod pravim uglom, pa simetrale uglova između dijagonala sa stranicom grade ugao od 45°. Isto tako znamo da su dijagonale romba ujedno i simetrale uglova romba pa je

$$\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SAQ \cong \sphericalangle SCN \cong \sphericalangle SCP = \lambda$$

$$\text{i} \quad \sphericalangle SBA \cong \sphericalangle SBC \cong \sphericalangle SDA \cong \sphericalangle SDC = \omega.$$

Posmatrajmo $\triangle SPC$ i $\triangle SNC$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle NSC \cong \sphericalangle PSC = 45^\circ \\ SC \cong SC \\ \sphericalangle SCN \cong \sphericalangle SCP \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle SPC \cong \triangle SNC$$

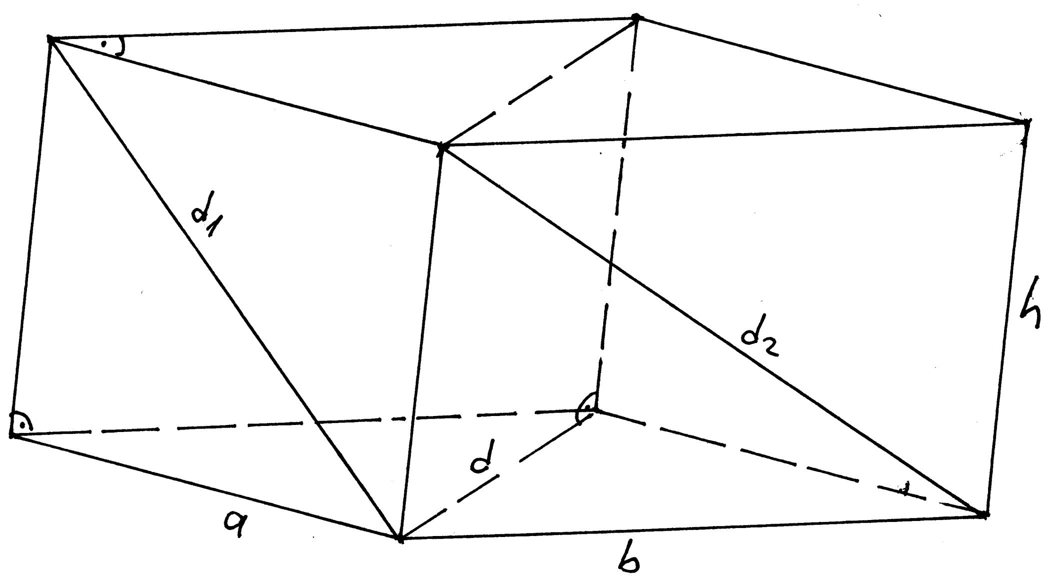
$$\Downarrow$$

$$PS \cong SN$$

Na osnovu istog pravila (USU) nije teško vidjeti da je $\triangle BSN \cong \triangle BMS$, $\triangle AMS \cong \triangle ASQ$ iz čega slijedi da se dijagonale polove i da su jednake. Kako se još sijeku pod pravim uglom $\Rightarrow \square MNPQ$ je kvadrat

Osnovne ivice kvadra (pravouglog paralelepipeda) odnose se kao 4:3, dijagonale bočnih strana odnose se međusobno kao $\sqrt{20}:\sqrt{13}$ a površina dijagonalnog presjeka odnosi se prema zapremini (volumenu) kvadra kao 2:1. Izračunati površinu i zapreminu ovog kvadra.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici. Iz datih razmjera dobijamo proporcije

$$a:b=4:3 \quad \ldots(1)$$

$$d_1:d_2=\sqrt{20}:\sqrt{13}$$

$$dh:abh=2:1$$

Odavde imamo $\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{20}{13} \Rightarrow \frac{a^2+h^2}{b^2+h^2}=\frac{20}{13} \quad \ldots(3)$

i $\frac{d}{ab}=\frac{2}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}=\frac{2}{1} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{4}{1} \quad \ldots(2)$

$$\boxed{\begin{aligned} P&=2ab+2ah+2bh\\ &=\frac{325}{144}\\ V&=abh=\frac{125}{576}\end{aligned}}$$

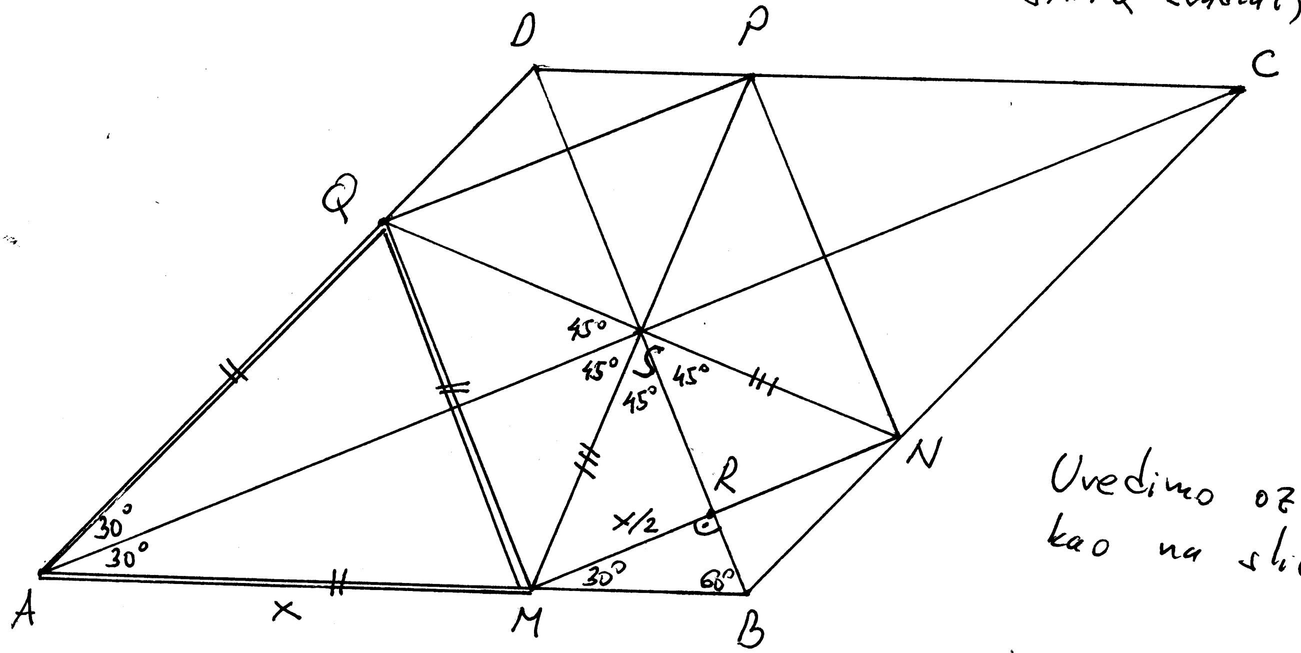
Na osnovu (1) i (2) $\Rightarrow$ $4b=3a$ i $a^2+b^2=4a^2b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+\frac{9a^2}{16}=\frac{9a^4}{4} \Rightarrow a^2=\frac{25}{36} \Rightarrow a=\frac{5}{6} \Rightarrow b=\frac{5}{8}$

Sad iz (3) dobijamo $\frac{\frac{25}{36}+h^2}{\frac{25}{64}+h^2}=\frac{20}{13} \Rightarrow h^2=\frac{25}{144} \Rightarrow h=\frac{5}{12} \Rightarrow$

(#) Dat je romb $\square ABCD$ sa uglom $\measuredangle BAD = 60°$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice AB, BC, CD i DA romba, redom u tačkama M, N, P i Q. Pokazati da je $AM : MB = \sqrt{3} : 1$. (ako znamo da je $\square MNPQ$ kvadrat)

Rj:



Uvedimo oznake kao na slici.

Prema ranije urađenom zadatku znamo da je $\square MNPQ$ kvadrat, i da je $\measuredangle ASM = \measuredangle ASQ = 45°$. Posmatrajmo $\triangle AMS$ i $\triangle AQS$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAS \cong \measuredangle QAS = 30° \\ AS \cong AS \\ \measuredangle ASM \cong \measuredangle ASQ = 45° \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle AMS \cong \triangle AQS \Downarrow AM \cong AQ$$

Kako je još $\measuredangle MAQ = 60° \Rightarrow \triangle AMQ$ jednakostranični trougao

Označimo dužinu AM sa x (iz čega slijedi $QM = x = MN$)

Neka je $\{R\} = MN \cap BS$. Kako R pripada simetrali $\measuredangle MSN$ jednakokrakog trougla $\triangle MNS \Rightarrow R$ sredina $MN \Rightarrow MR = \frac{x}{2}$.

Iz podudarnosti trouglova $\triangle MSR$ i $\triangle NSR \Rightarrow \measuredangle MRS \cong \measuredangle NRS = 90°$.

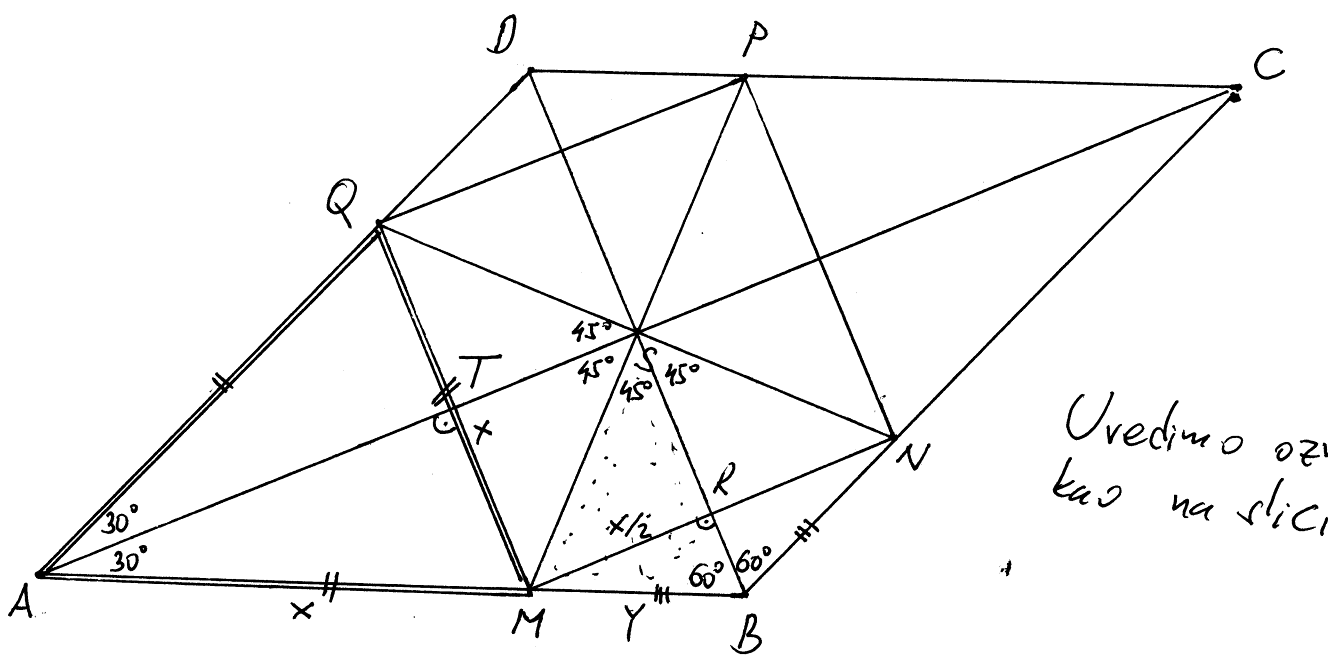
Kako je u rombu $\square ABCD$, $\measuredangle BAD = 60° \Rightarrow \measuredangle ABC = 120° \Rightarrow \measuredangle MBS = 60°$

pa je $\measuredangle NMB = 30°$, $\cos 30° = \frac{MR}{MB} \Rightarrow MR = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$ tj. $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$

$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \sqrt{3}$ tj. $AM : MB = \sqrt{3} : 1$.

(#) Dat je romb $\square ABCD$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice romba u tačkama M, N, P i Q. Ako je $\measuredangle BAD = 60°$, $AM : MB = \sqrt{3} : 1$ i $\square MNPQ$ kvadrat, nađi razmjeru onih odsječaka veće i manje dijagonale romba, koji leži van četverougla $\square MNPQ$.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Iz osobina romba znamo da je dijagonala ujedno i simetrala ugla i da su dijagonale okomite (i da se polove). Prema podudarnosti USU imamo $\triangle AMS \cong \triangle AQS$ a kako je $\measuredangle MAQ = 60°$ $\Rightarrow$ $\triangle AMQ$ jks

$\Downarrow$ $AM \cong AQ$

Uvedimo oznake $AM = x$ i $MB = Y$. Prema postavci zadatka znamo da je $\frac{x}{Y} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $Y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$.

Prema podudarnosti USU $\Rightarrow$ $\triangle MBS \cong \triangle NBS$ pa imamo

$\Downarrow$ $MB \cong NB$

$$\left.\begin{array}{l} MB \cong NB \\ \measuredangle MBR \cong \measuredangle NBR = 60° \\ BR \cong BR \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle MBR \cong \triangle NBR$$

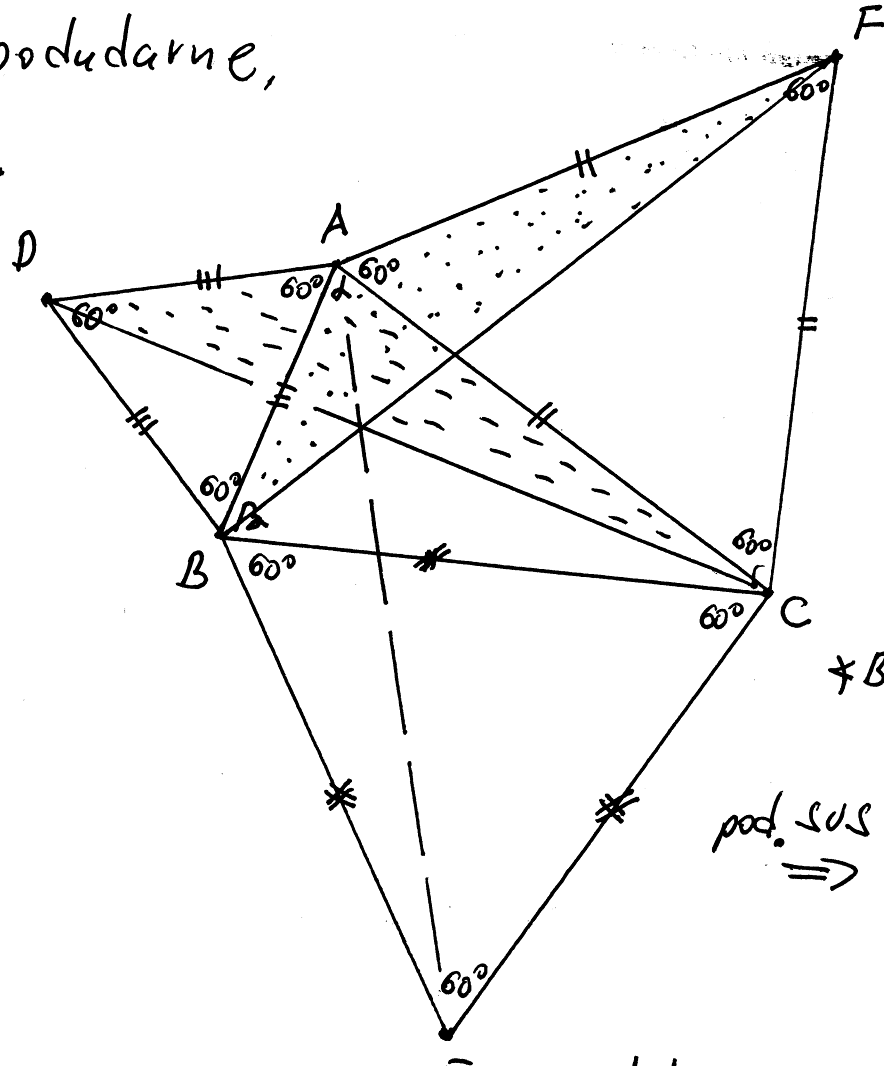
$\Downarrow$

$\measuredangle MRB \cong \measuredangle NRB$ (a kako su ovo dva naporedna ugla oni su pravi uglovi) i $MR = \frac{x}{2}$

$BR^2 = Y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{12} x^2$, $AT^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{AT}{BR} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{x}{2\sqrt{3}}} = \frac{3}{1}$

Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i neka su tačke D, E i F takve da su trouglovi $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$ pravilni (jednakostranični) i pri tome su tačke D i C sa raznih strana prave $p(A,B)$, tačke A i E su sa raznih strana prave BC, tačke B i F su sa raznih strana prave $p(A,C)$. Dokazati da su duži AE, BF i CD međusobno podudarne.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Posmatrajmo $\triangle ABF$ i $\triangle ADC$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong AD \\ AF \cong AC \\ \measuredangle BAF \cong \measuredangle CAD = \alpha + 60^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS}$$

$$\xRightarrow{\text{pod. } SUS} \triangle ABF \cong \triangle ADC$$

$$\Downarrow$$

$$BF \cong CD$$

(kako su $\triangle ADB$, $\triangle AFC$, $\triangle BEC$ jks svi uglovi unutar njih su po 60°)

Slično se pokaže da je $\triangle ABE \cong \triangle CBD$

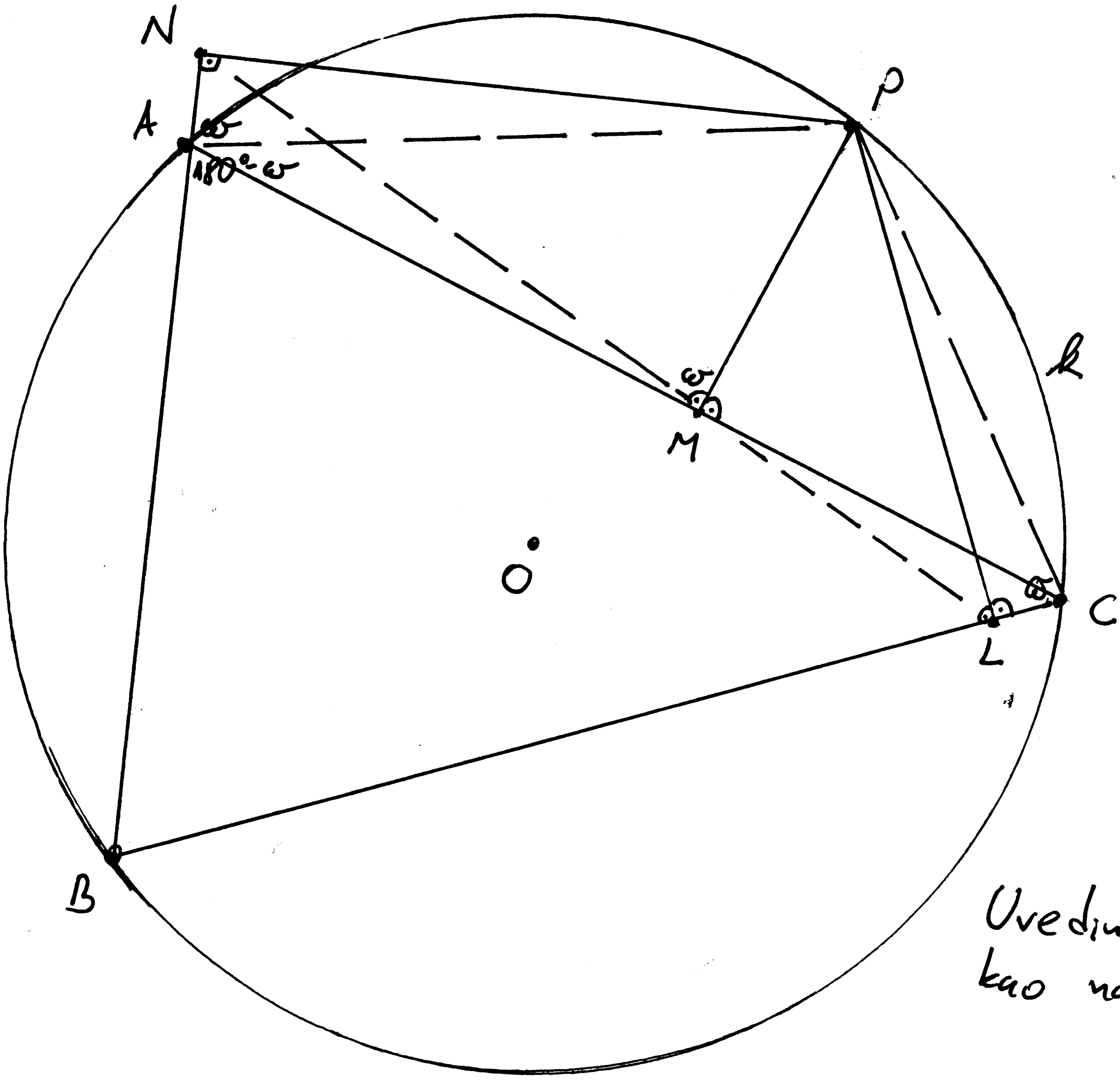
$$\Downarrow$$

$$CD \cong AE$$

Prema tome $AE \cong BF \cong CD$ q.e.d.

(#) Neka je $k(O, r)$ opisani krug oko $\triangle ABC$. Pokazati da su projekcije proizvoljne tačke kruga na stranice trougla kolinearne.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\square AMPN$ je tetivni $(\sphericalangle AMP + \sphericalangle ANP = 180°) \Rightarrow \sphericalangle NMP \cong \sphericalangle PAN = \omega$

$\sphericalangle NAP + \sphericalangle PAB = 180° \Rightarrow \sphericalangle PAB = 180° - \omega$

$\square PABC$ je tetivni (k prolazi kroz tačke A, B, C, P) $\Rightarrow \sphericalangle BCP = \omega$

$\square MLCP$ je tetivni $(\sphericalangle PLC \cong \sphericalangle PMC = 90°) \Rightarrow \sphericalangle LMP = 180° - \omega$

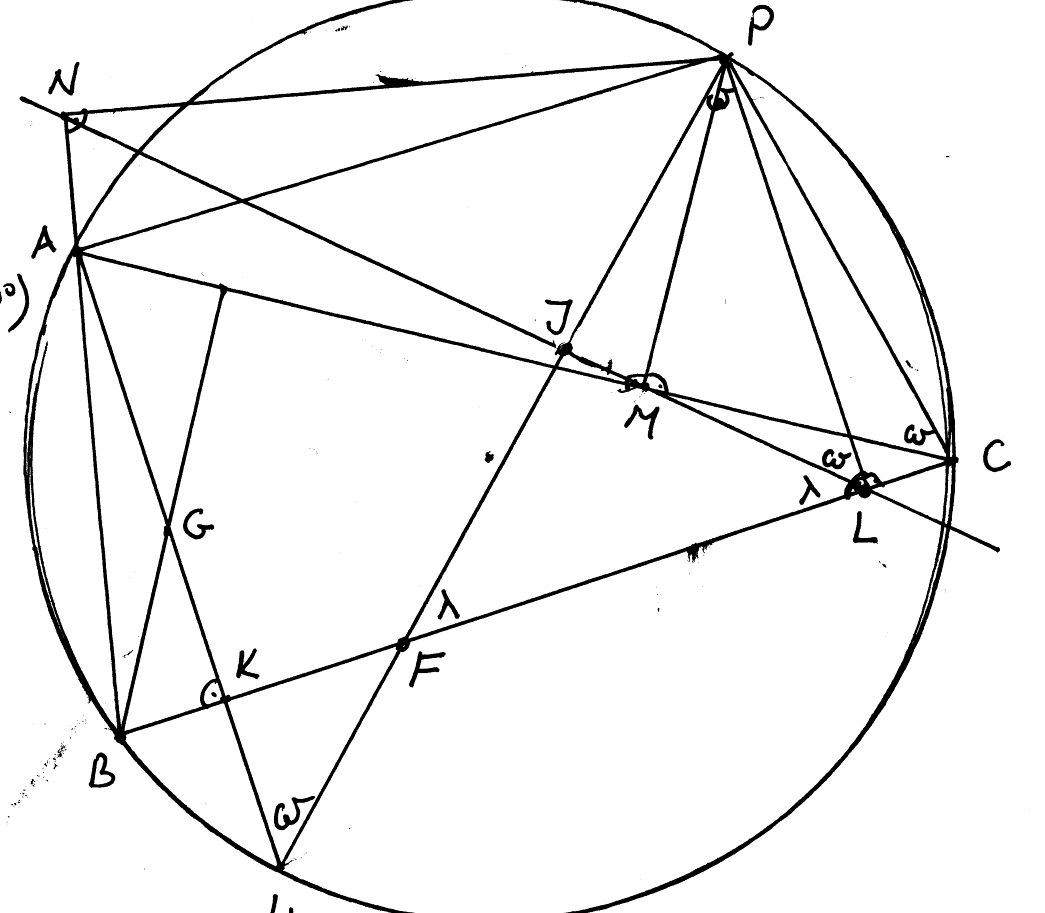
Prema tome imamo $\sphericalangle LMP + \sphericalangle PMN = 180° - \omega + \omega = 180°$

$\Rightarrow$ L, M i N su kolinearne tačke

q.e.d.

(#) Neka je $k(O,r)$ krug opisan oko trougla ΔABC, i neka je P proizvoljna tačka kruga. Neka su L, M i N projekcije od P redom na $p(B,C)$, $p(C,A)$, $p(A,B)$. Dalje neka je AK visina a G ortocentar ΔABC. Neka $p(A,K)$ sijeće krug k u tački H i neka je $\{F\} = PH \cap BC$, $\{J\} = PH \cap LN$. Ako su L, M i N kolinearne pokazati da vrijedi $JL \cong JP \cong JF$.

Rj.



$\square PMLC$ je tetivni ($\angle PLC \cong \angle PMC = 90^\circ$)

$\Rightarrow \angle PLM \cong \angle PCM = \omega$

$\Rightarrow \angle PCA \cong \angle PLN = \omega$

$\square BCPA$ tetivni (prema postavci)

$\Rightarrow \angle PCA \cong \angle PHA = \omega$

$AK \perp BC$ i $PL \perp BC$

$\Rightarrow p(A,K) \parallel p(P,L)$ i ako posmatramo $p(P,H)$ kao transferzalu imamo $\angle AHP \cong \angle LPH = \omega$

Time smo dobili da je u ΔPJL, $\angle LPJ \cong \angle JLP = \omega$

$\Rightarrow JP \cong JL$ ...(1)

$\boxed{\text{Iz (1) i (2) slijedi tvrdnja zadatka.}}$

Primijetimo da je ΔPFL pravougli i da je $\angle FPL + \angle PFL = \omega + \lambda = 90^\circ$, pa kako je $\angle PLJ = \omega \Rightarrow \angle FLJ = \lambda \Rightarrow JF \cong JL$ ...(2)

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*