15 Elementarni zadaci: Razni zadaci iz ravni i prostora.

1. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2}AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

2. Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB $(A, B \in k,\ S \in AB)$. Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

3. Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

4. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

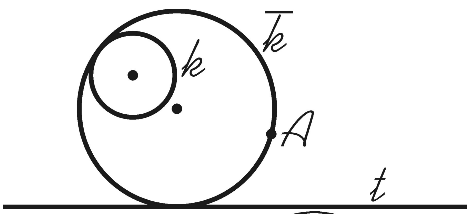
5. U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE $(E \in BC)$ ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Naći uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$.

6. Na kraku x ugla $\measuredangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA$.

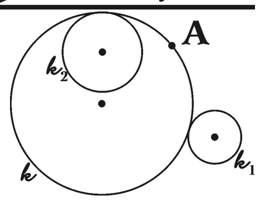
Razni zadaci sa ispitnih rokova.

7. Konstruisati krug koji prolazi kroz datu tačku i dodiruje dva data kruga.

8. Dati je krug $k(O, r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O}, \bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k i pravu t kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



9. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici.



10. Za $\triangle ABC$ vrijedi $2\measuredangle CBA = \measuredangle CAB + \measuredangle ACB$. U unutrašnjosti $\triangle ABC$ je odabrana tačka P tako da vrijedi $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA$. Dokazati da je $PB^2 = PA \cdot PC$.

11. Neka je dat trapez $\square ABCD$ sa osnovicama AB i CD, dat je krug $k(O, r)$ koji prolazi kroz tačke A i D i dodiruje pravu $p(B, C)$ u tački F. Na osnovici AB data je tačka M takva da je $\square AMCD$ paralelogram i $MC \perp BC$. Ako je $\{E\} = p(B, C) \cap p(A, D)$ i G sredina duži AD dokazati da je $\square OFEG$ pravougaonik.

12. Četverougao $\square ABCD$ je tetivni. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom BC siječe dijagonalu CA u tački P, stranicu AB u tački Q i krug opisan oko četverougla $\square ABCD$ u tački R. Prava u tački D paralelna sa pravom AB siječe pravu BC u tački T. Ako je $PQ \cong QR$ dokazati da vrijedi $\frac{AB}{BC} = \frac{BT}{TD}$.

13. Dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ se dodiruju u tački A. Neka su p i q dvije proizvoljne prave koje prolaze kroz tačku A takve da $p \cap k_1 = \{A, E\}$, $p \cap k_2 = \{A, C\}$, $q \cap k_1 = \{A, D\}$ i $q \cap k_2 = \{A, B\}$. Pokazati da je $BC \| DE$.

14. Neka je $\square ABCD$ raznostraničan četverougao čije se dijagonale d_1 i d_2 sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

15. Neka je $\triangle PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P $(\measuredangle QPR = \varphi)$. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) i definicije trigonometriskih funkcija, izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{r \cdot q}{2}\, sin\varphi$ datog trougla.

16. Visina iz vrha A trougla $\triangle ABC$ presjeca stranicu BC u tački D. Krug koji dodiruje stranicu BC u tački D, presjeca stranicu AB u tačkama M i N, a stranicu AC u tačkama P i Q. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$.

17. Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$, i neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Dokazati da je $\dfrac{BF}{FC} = \dfrac{AB}{AC}$.

18. Raznostraničan trougao $\triangle ABC$, ima dužine stranica a, b i c. Neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Znamo da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije stranice, pa imamo $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AC}{BC}$. Iskoristiti ovu jednakost i pokazati da je $BE = \dfrac{ac}{a+b}$.

19. Neka je $\triangle ABC$ raznostraničan trougao i neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Dokazati da $P_{\triangle AEG} = P_{\triangle ABC} \cdot \dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}$.

20. Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

21. Tačka A_1 je presjek simetrale ugla A i naspremne strane BC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

22. Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je $\dfrac{A_2B}{A_2C} = \dfrac{AB}{AC}$.

23. Na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ date su redom tačke A_1, B_1 i C_1, takve da je $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$. Dokazati da je $\triangle A_1B_1C_1$ jednakostraničan ako i samo ako je $\triangle ABC$ jednakostraničan.

24. Dat je romb $\square ABCD$. Pokazati da je $AC \perp BD$ i da su dijagonale ujedno i simetrale uglova.

25. Duž $AC = a$ svojom unutrašnjom tačkom B podjeljena je u odnosu $3:2$. Nad dužima AB i BC, sa raznih strana u odnosu na duž AC, konstruisani su kvadrati $\square ABDE$ i $\square CBFG$. Neka su O i O_1 presjeci dijagonala ovih kvadrata. U kojoj razmjeri stoje površina četverougla $\square OO_1CD$ i površina kvadrata kome je stranica duž AC?

26. Dat je romb $\square ABCD$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice AB, BC, CD, DA romba, redom, u tačkama M, N, P i Q. Pokazati da je četverougao $\square MNPQ$ kvadrat.

27. Osnovne ivice kvadra (pravouglog paralelepipeda) odnose se kao $4:3$, dijagonale bočnih strana odnose se međusobno kao $\sqrt{20} : \sqrt{13}$ a površina dijagonalnog presjeka odnosi se prema zapremini (volumenu) kvadra kao $2:1$. Izračunati površinu i zapreminu ovog kvadra.

28. Dat je romb $\square ABCD$ sa uglom $\measuredangle BAD = 60°$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice AB, BC, CD, DA romba, redom, u tačkama M, N, P i Q. Ako znamo da je četverougao $\square MNPQ$ kvadrat pokazati da je $AM : MB = \sqrt{3} : 1$

29. Dat je romb $\square ABCD$ sa uglom $\measuredangle BAD = 60°$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice AB, BC, CD, DA romba, redom, u tačkama M, N, P i Q. Ako znamo da je četverougao $\square MNPQ$ kvadrat i da je $AM : MB = \sqrt{3} : 1$ naći razmjeru onih odsječaka veće i manje dijagonale romba, koji leži van četverougla $\square MNPQ$.

30. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i neka su tačke D, E i F takve da su trouglovi $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$ pravilni (jednakostranični) i pri tome su tačke D i C sa raznih strana prave $p(A, B)$, tačke A i E su sa raznih strana prave $p(B, C)$, tačke B i F su sa raznih strana prave $p(A, C)$. Dokazati da su duži AE, BF i CD međusobno podudarne.