14 Elementarni zadaci: Neki konstruktivni zadaci.

1. Dat je $\triangle ABC$ i data je duž DE. Konstruisati pravougaonik čija je površina jednaka površini trougla $\triangle ABC$ i čija je jedna stranica jednaka dužini duži DE.

2. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove visine leže na datim pravama.

3. Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B)||t$. Konstruisati krug kroz tačke A i B koja dodiruje datu pravu t.

4. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

Apolonijev problem

5. Konstruisati kružnicu kroz tri date tačke.

6. Konstruisati kružnice kroz dvije date tačke koja dodiruje datu pravu.

7. Konstruisati kružnicu kroz dvije date tačke koja dodiruje datu kružnicu.

8. Konstruisati kružnicu kroz datu tačku koja dodiruje dvije date prave.

9. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i datu kružnicu.

10. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

11. Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date prave.

12. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date prave i datu kružnicu.

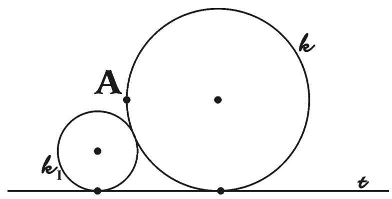
13. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date kružnice i datu pravu.

14. Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date kružnice.

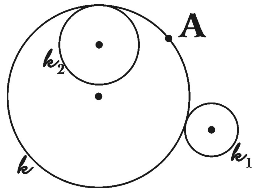
15. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

16. Date su prave p i q, $p \perp q$ i data je tačka A takva da $A \notin p$ i $A \notin q$. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku A i dodiruje dvije date prave p i q.

17. Dati je krug $k_1(O_1, r_1)$, prava t i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A, dodirivati krug k_1 i pravu t kao na skici.



18. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici:



Zadaci za vježbu

19. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

20. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu i datu kružnicu u datoj tački te kružnice.

21. Konstruisati kružnicu kroz datu tačku koja dodiruje datu pravu u datoj tački.

22. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date prave od kojih jednu u datoj tački.

23. Konstruisati kružnicu kroz datu tačku koja dodiruje datu kružnicu u datoj tački.

24. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu i dvije date kružnice jednakih poluprečnika.

25. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja prolazi kroz dvije date tačke.

26. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje datu pravu i prolazi kroz datu tačku.

27. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje datu kružnicu i prolazi kroz datu tačku.

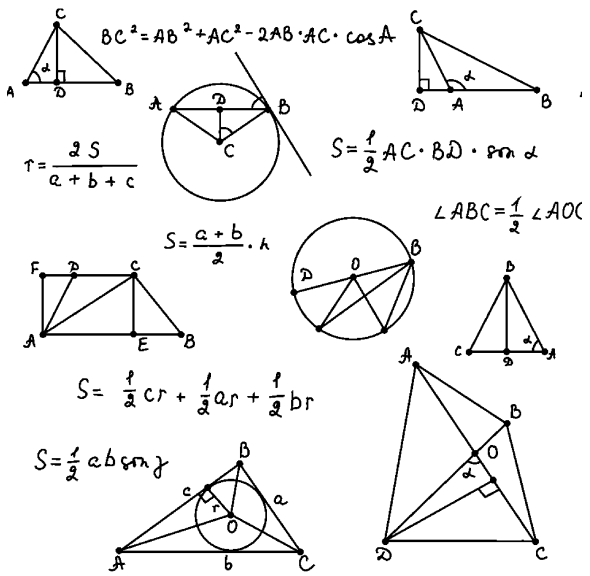
28. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje date prave.

29. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu.

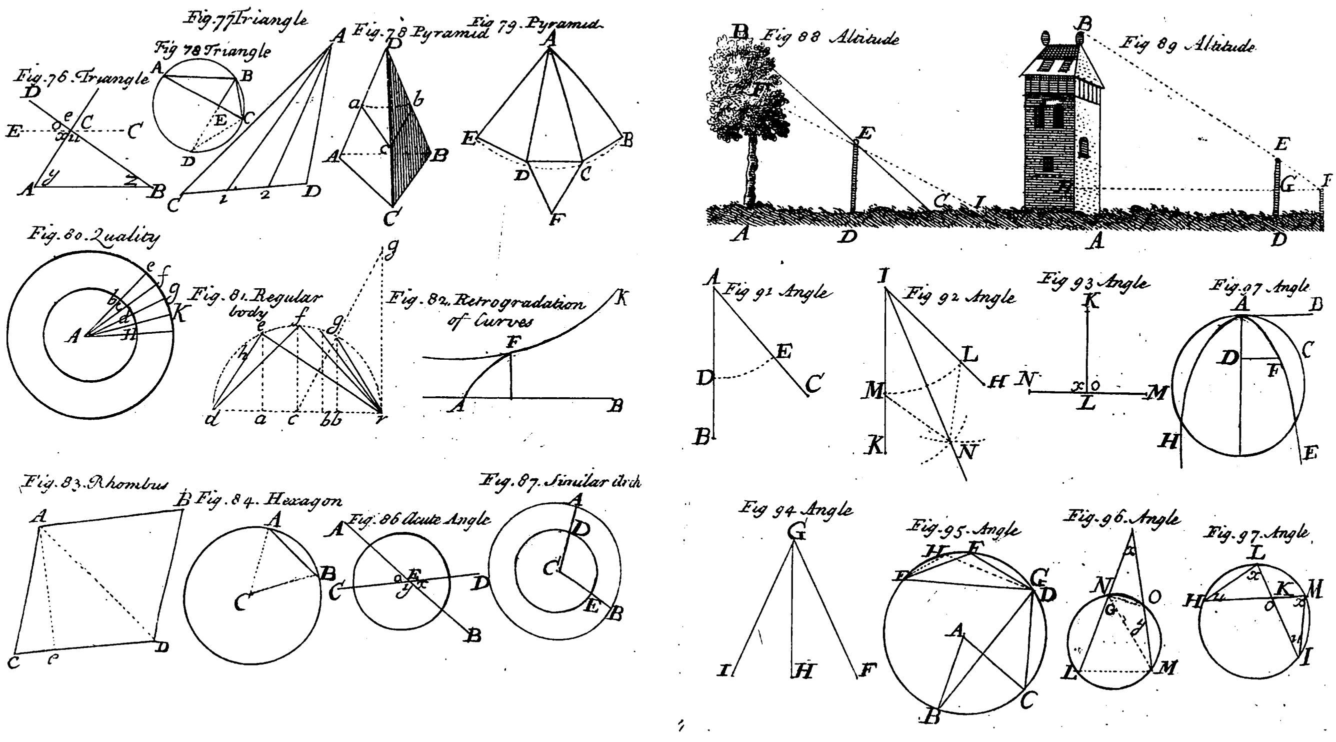
30. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje dvije date kružnice.

Razni zadaci

31. Provjeriti da li su sve formule na slici ispod ispravne. Postoji najmanje jedna pogrešna oznaka na slici ispod - o kojoj oznaci je riječ?



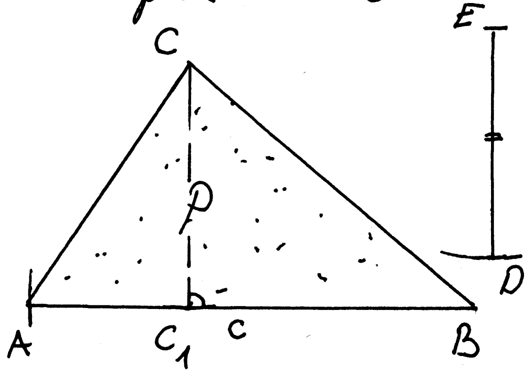
32. Obrazložiti šta predstavljaju figure na slici ispod.



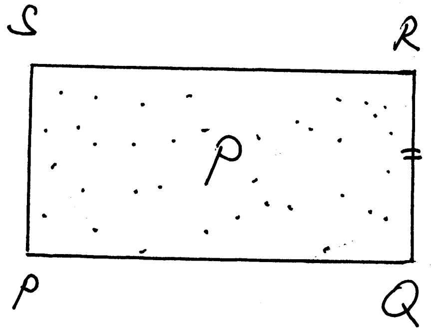
(#) Dat je $\triangle ABC$ i data je duž DE. Konstruisati pravougaonik čija je površina jednaka površini trougla $\triangle ABC$ i čija je jedna strana jednaka dužini duži DE.

Rj: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat $\triangle ABC$, duž DE i neka je $\square PQRS$ četverougao čija je površina jednaka površini $\triangle ABC$ i $RQ \cong DE$



$$P_{\square PQRS} = |PQ|\cdot|RQ| = |PQ|\cdot|ED|$$

$$P_{\triangle ABC} = c\cdot h_c = |AB|\cdot|CC_1|$$

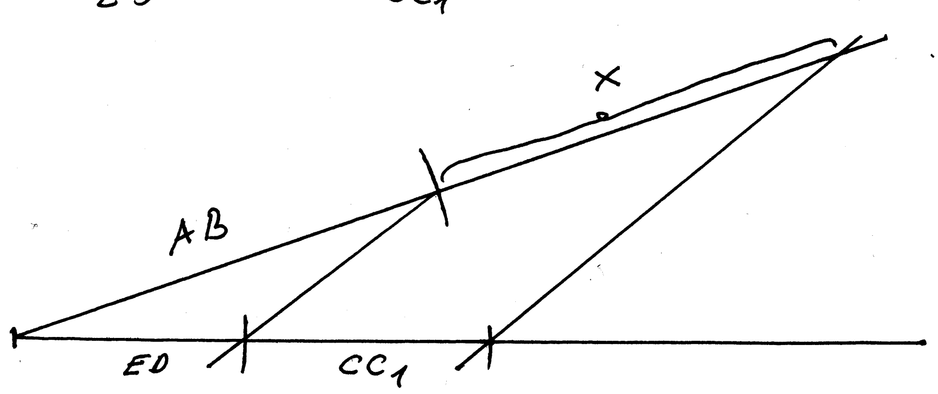
$$|PQ|\cdot|ED| = |AB|\cdot|CC_1|$$

$$|PQ| = \frac{|AB|\cdot|CC_1|}{|ED|}$$

Kako su nam poznate duži AB, CC_1, ED to nije teško konstruisati duž PQ, a time i $\square PQRS$ (pošto su nam poznate duži PQ i QR).

Uputa za konstrukciju duži PQ.

$$\frac{\overset{=x}{PQ}}{AB} = \frac{CC_1}{ED} \Rightarrow \frac{ED}{CC_1} = \frac{AB}{x}$$

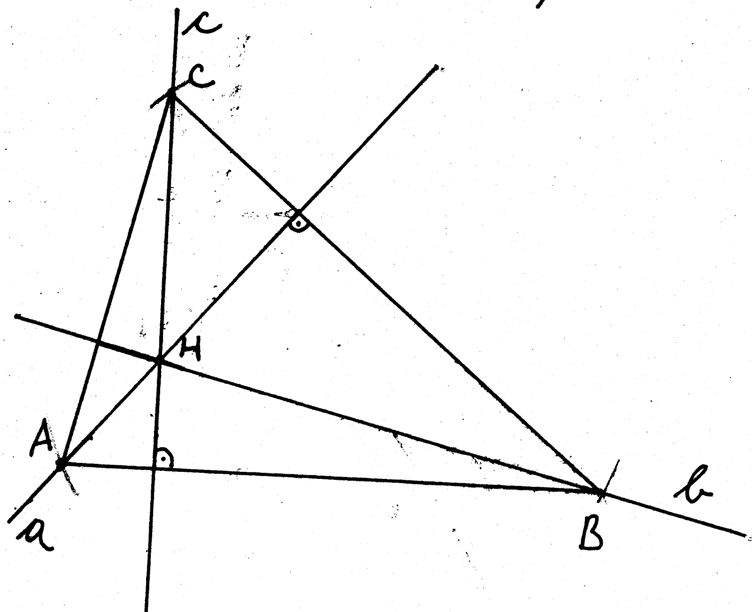


(#) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove visine leže na datim pravama.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su date tri prave a, b i c koje se sijeku u tački H, neka je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$, i neka a, b i c sadrže visine trougla ΔABC.

Primetimo da postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku A i okomita je na pravu c.

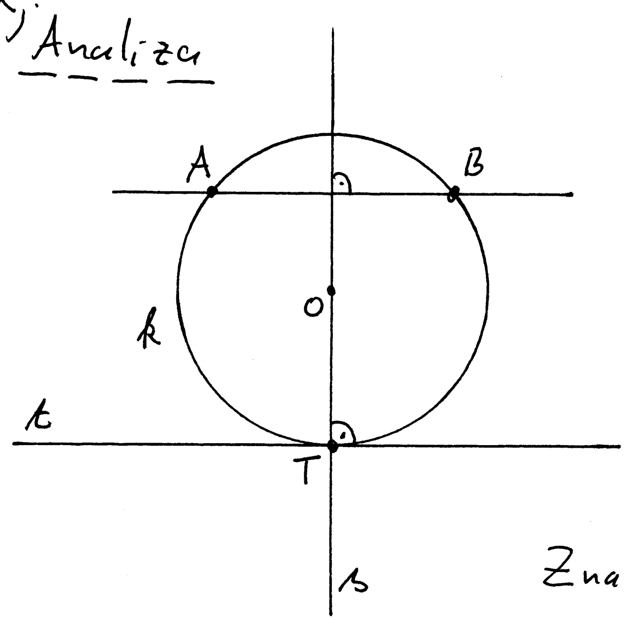
Isto tako, postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku B i okomita je na pravu a.

Kako su nam date prave a, b i c i tačka A to nije teško konstruisati tačku B i C.

Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B) \parallel t$. Konstruisati kružnicu kroz tačke A, B koja dodiruje datu pravu t.

Rj:

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje pravu t u tački T i koja prolazi kroz tačke A i B.

Neka je s simetrala duži AB. Tačka $O \in s$ a kako je $p(AB) \parallel t$ to $s \perp t$.

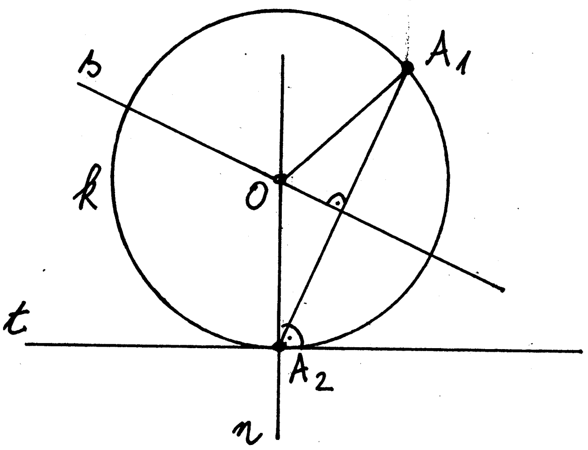
Znamo da je $OT \perp t$ a kako je i $s \perp t$ to je $s \cap t = \{T\}$. Tačka O se nalazi na presjeku simetrala duži AB, AT i BT.

Prema tome kako su date tačke A i B, prava t to nije teško konstruisati simetralu s duži AB, dobiti tačku T a poslije toga i $k(O,r)$.

(#) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

R: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava t tačke $A_2 \in t$ i $A_1 \notin t$, i neka je k tražena kružnica.

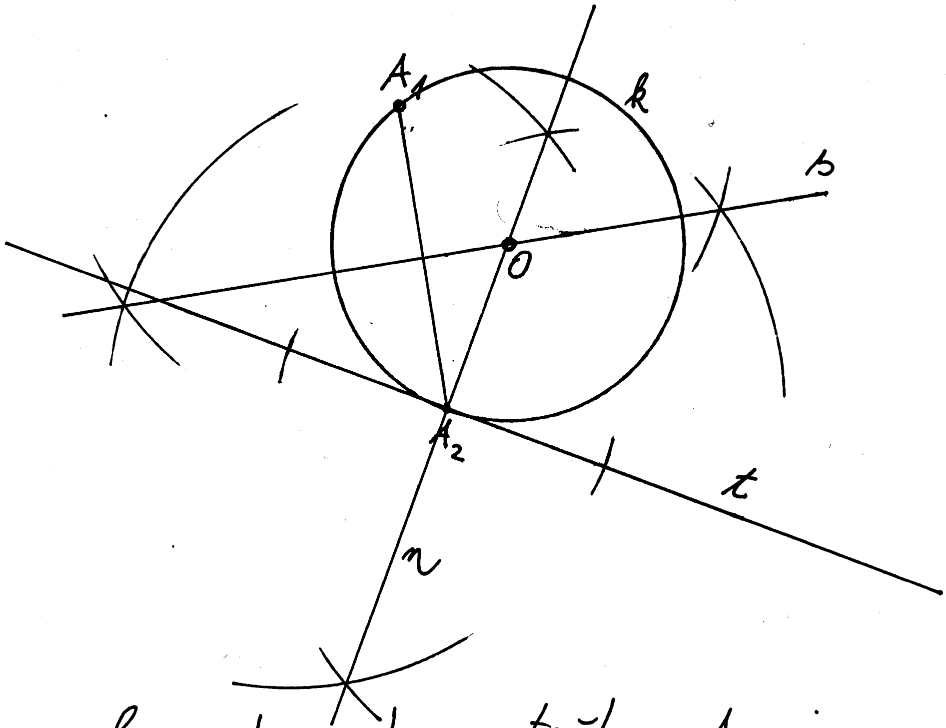


Primetimo da je $p(O, A_2) \perp t$ gdje je O centar kružnice k i primetimo da je $\triangle OA_2A_1$ jkk. $\Rightarrow$ $\Rightarrow O \in s$ gdje je s simetrala stranice A_1A_2.

Sad kako možemo konstruisati n i s to možemo konstruisati tačku O a time i traženu kružnicu k.

<u>Konstrukcija</u>

1. t, $A_2 \in t$, $A_1 \notin t$
2. pravu n: $n \perp t$ i $A_2 \in n$
3. pravu s s simetrala A_2A_1
4. $n \cap s = \{O\}$
5. $k(O, OA_2)$



<u>Dokaz</u>

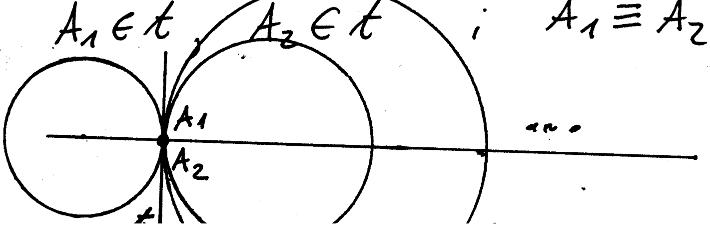
Da konstruisana kružnica k prolazi kroz tačku A_1 i dodiruje pravu t u tački A_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

<u>Determinacija</u>

Ako je $A_1 \notin t$, $A_2 \in t$ zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

Ako $A_1 \in t$ i $A_2 \in t$, $A_1 \not\equiv A_2$ zadatak nema rješenja

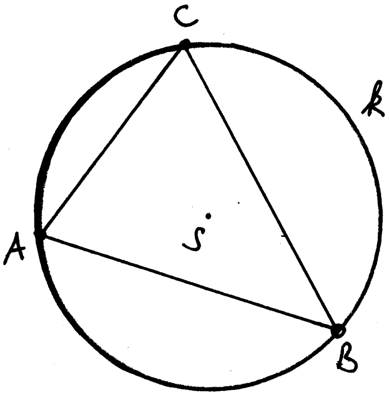
Ako $A_1 \in t$, $A_2 \in t$ i $A_1 \equiv A_2$ zadatak ima ∞ mnogo rješe[nja]



1. Konstruisati kružnicu kroz tri date tačke.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

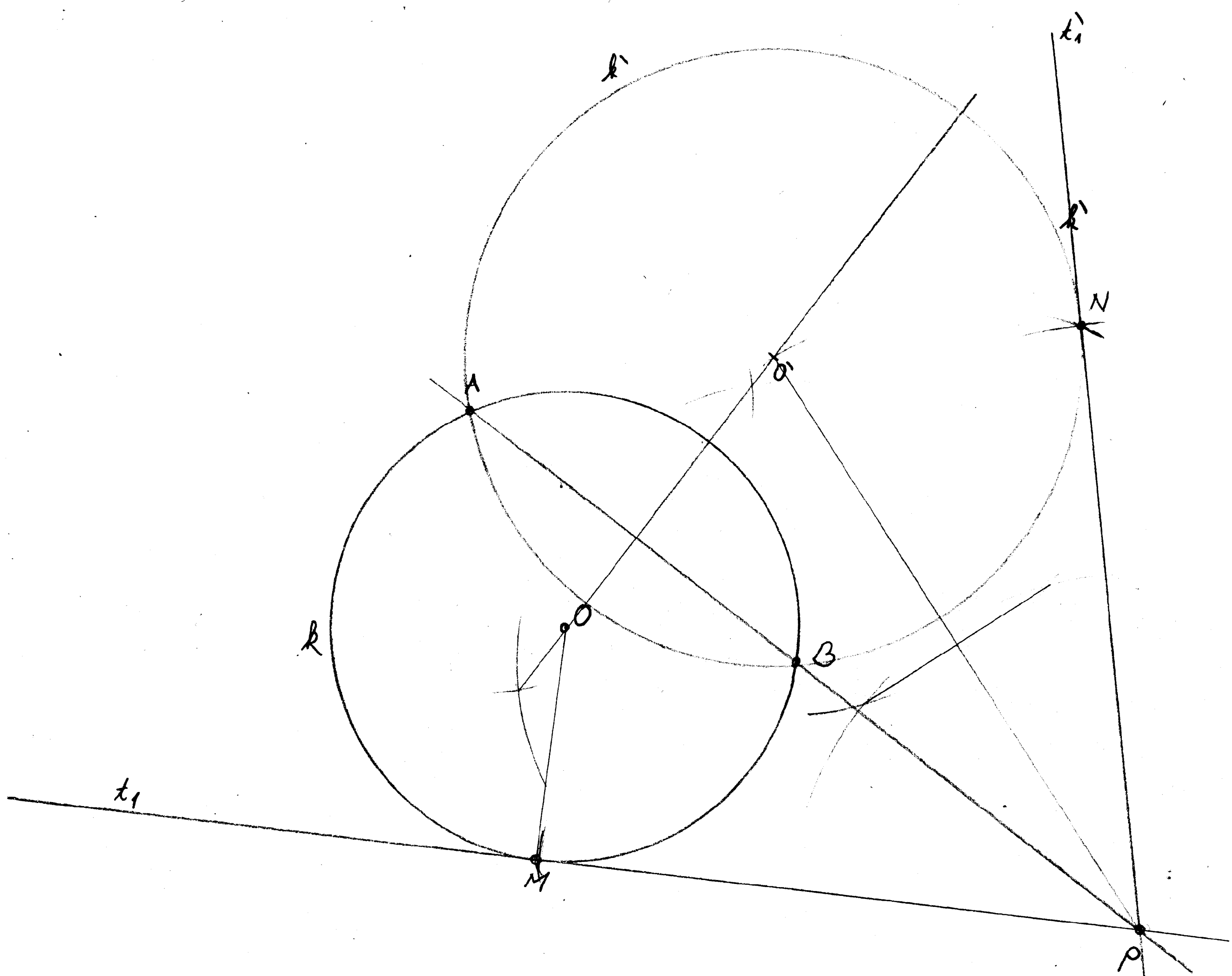


Neka je k data kružnica koja prolazi kroz tačke A, B i C. Ako spojimo tačke A i B, A i C i tačke B i C dobićemo da je k kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$. Centar opisane kružnice se nalazi na presjeku simetrala stranica.

2. Konstruisati kružnicu kroz dvije date tačke koja dodiruje datu pravu.

Analiza

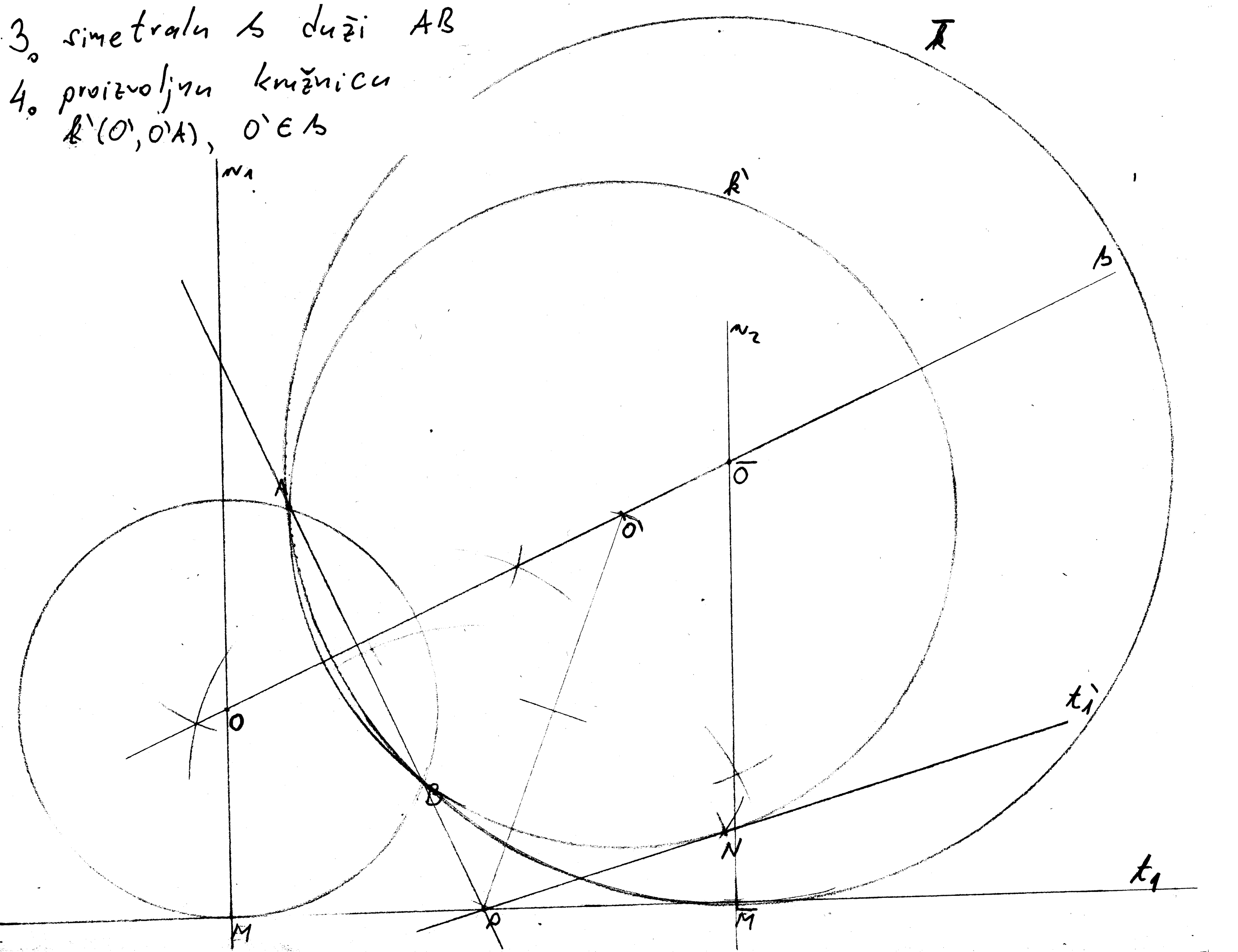
Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je k kružnica koja dodiruje pravu t_1 u tački M i koja prolazi kroz tačke A i B. Označimo sa P $\{P\} = p(A,B) \cap t_1$. Neka je $k'(O', O'A')$ proizvoljna kružnica takva da O' pripada simetrali duži AB. Neka je t_1' tangenta na kružnicu k' takva da je $P \in t_1'$ i sa N označimo tačku dodira tangente t_1' i kružnice k'. Primetimo da je $PM^2 = PA \cdot PB = PN^2 \Rightarrow PM = PN$. Kako su tačke A, B i prava t_1 date nije teško konstruisati kružnicu k' i tačku P. Poslije toga ćemo konstruisati tačke N i M, pa i traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. A, B, t_1
2. $p(A,B) \cap t_1 = \{P\}$
3. simetralu s duži AB
4. proizvoljnu kružnicu $k'(O', O'A)$, $O' \in s$
5. tangentu t_1' na kružnicu k' iz tačke P
6. $t_1' \cap k' = \{N\}$
7. $k(P, PN) \cap t_1 = \{M, \bar{M}\}$



8. $n_1 \perp t_1 \;\wedge\; n_1 \ni M$

$n_2 \perp t_1 \;\wedge\; n_2 \ni \bar{M}$

10. $k(O, OA)$, $\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}A)$

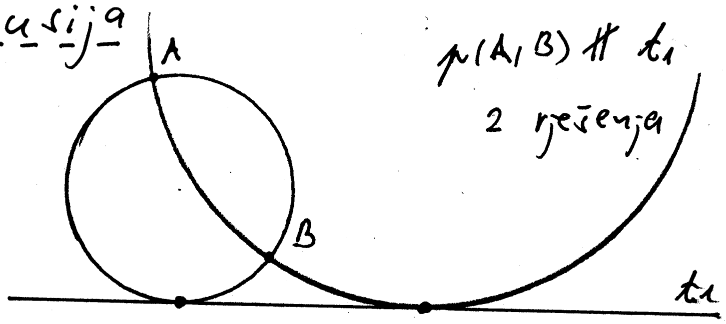
9. $n_1 \cap s = \{O\}$

$n_2 \cap s = \{\bar{O}\}$

Dokaz

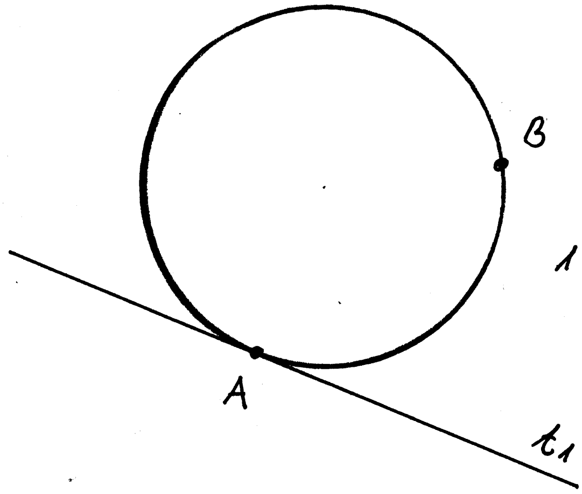
Dokaz da konstruisana kružnica k prolazi kroz tačke A i B i dodiruje pravu t_1 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

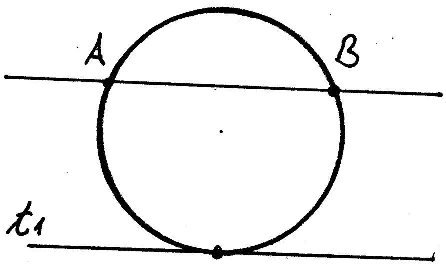


$p(A,B) \nparallel t_1$

2 rješenja

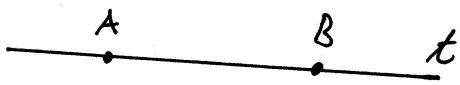


1 rješenje

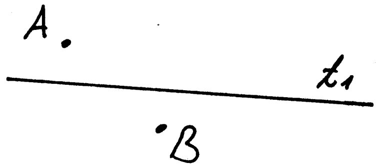


$p(A,B) \parallel t_1$

1 rješenje



nema rješenja

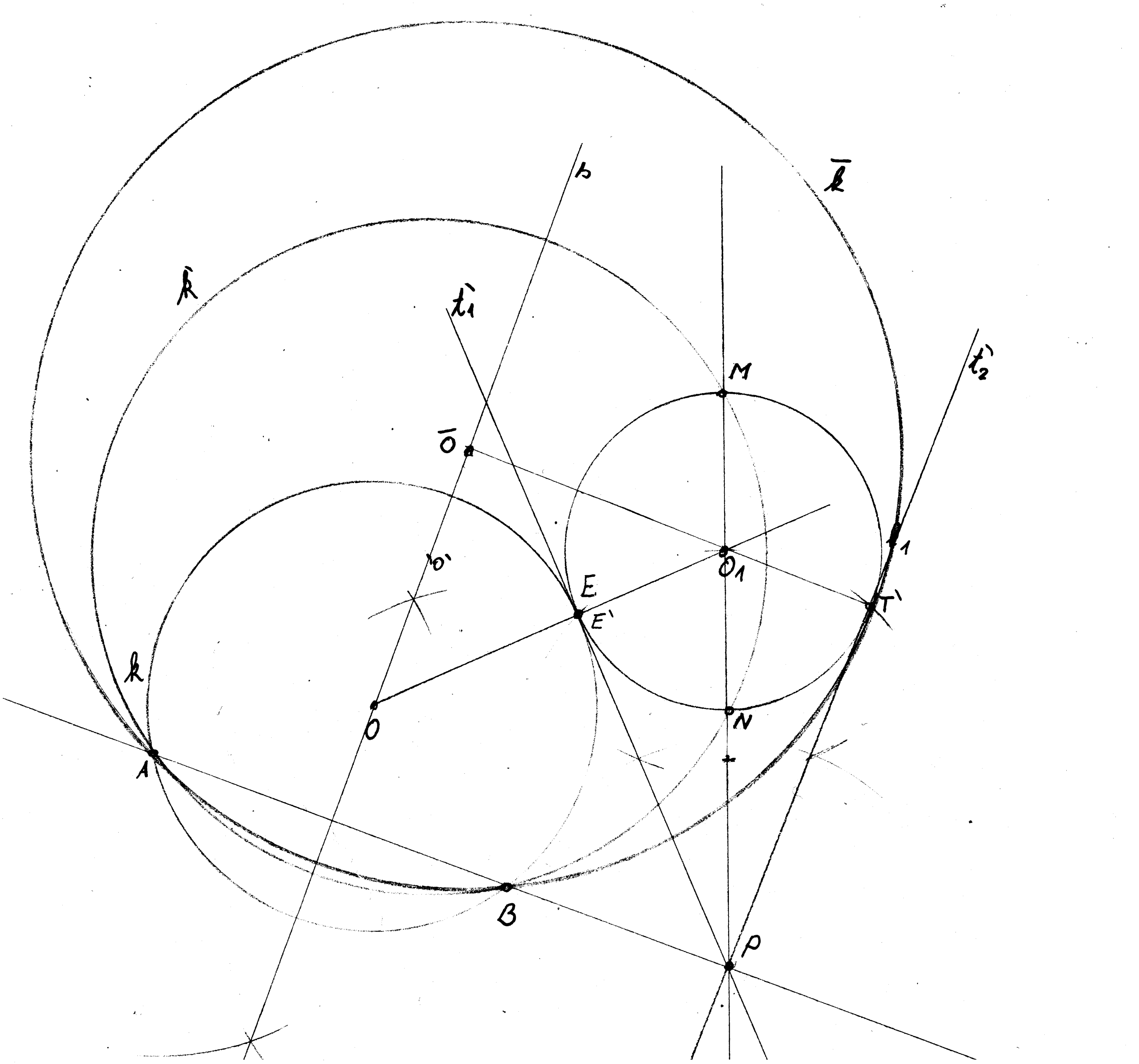


nema rješenja

3. Konstruisati kružnicu kroz dvije date tačke koja dodiruje datu kružnicu.

Analiza

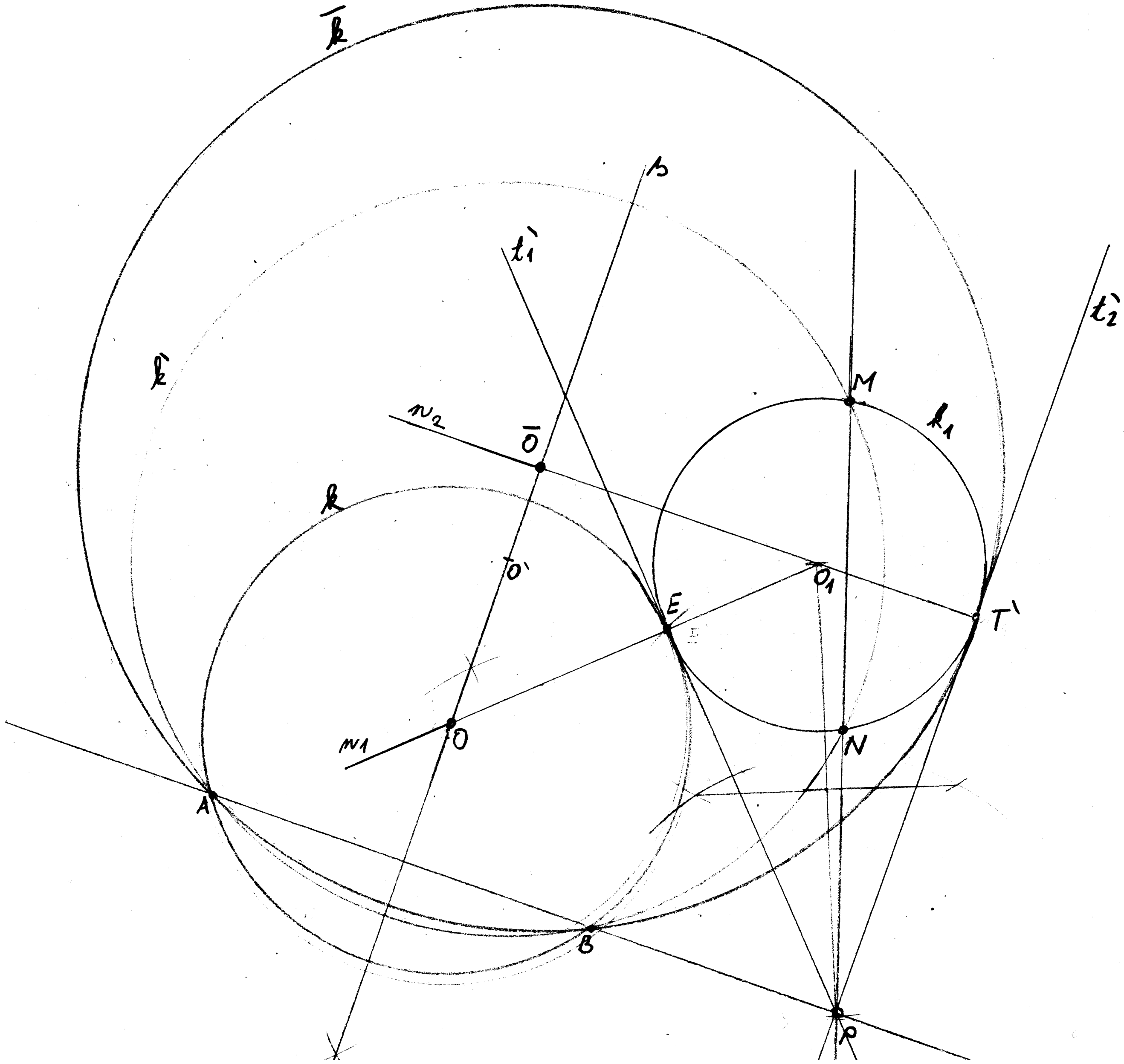
Pretpostavimo da je zadatak riješen.
Neka je k kružnica koja dodiruje kružnicu k_1 u tački E i koja prolazi kroz tačke A i B. Neka je $k'(O', O'A)$ proizvoljna kružnica takva da siječe kružnicu k_1 u tačkama M i N i O' pripada simetrali duži AB.
Označimo sa $\{P\} = p(M,N) \cap p(A,B)$. Iz tačke P neka su t_1' i t_2' tangente na kružnicu k_1 i neka su E' i T' dodirne tačke tangenti i kružnica redom.



Primetimo da je $PE'^2 = PT'^2 = PM \cdot PN = PA \cdot PB \Rightarrow$
$\Rightarrow PE'^2 = PA \cdot PB \Rightarrow p(P, E')$ tangenta na kružnicu k
$\Rightarrow E' \equiv E$ (E je tačka dodira kružnice k_1 i k).
Kako su date tačke A i B i kružnica k_1 to kružnicu k' i tačke M i N nije teško konstruisati a samim tim i tačke E i T'. Kružnicu k možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. A, B, k_1
2. simetralu s duži AB
3. proizvoljnu kružnicu $k'(O', O'A)$: $O' \in s \ \wedge \ k' \cap k_1 \neq \emptyset$
4. $k' \cap k_1 = \{M, N\}$
5. $p(M, N) \cap p(A, B) = \{P\}$
6. tangente t_1' i t_2' na k_1
7. $t_1' \cap k_1 = \{E\}$
   $t_2' \cap k_1 = \{T'\}$



8. $n_1: n_1 \perp t_1' \wedge n_1 \ni E$
$n_2: n_2 \perp t_2' \wedge n_2 \ni T'$

9. $n_1 \cap s = \{O\}, \quad n_2 \cap s = \{\bar{O}\}$

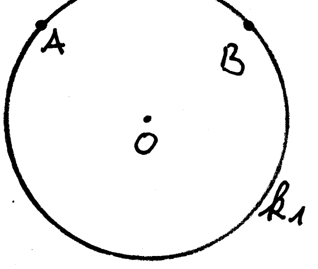
10. $k(O, OA)$
$\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}A)$

Dokaz

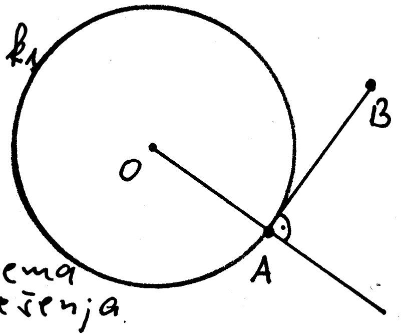
Da konstruisane kružnice k i $\bar{k}$ prolaze kroz tačke A i B i dodiruju datu kružnicu k' slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

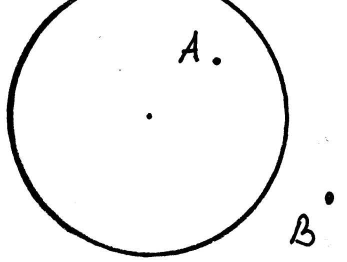
nema rješenja



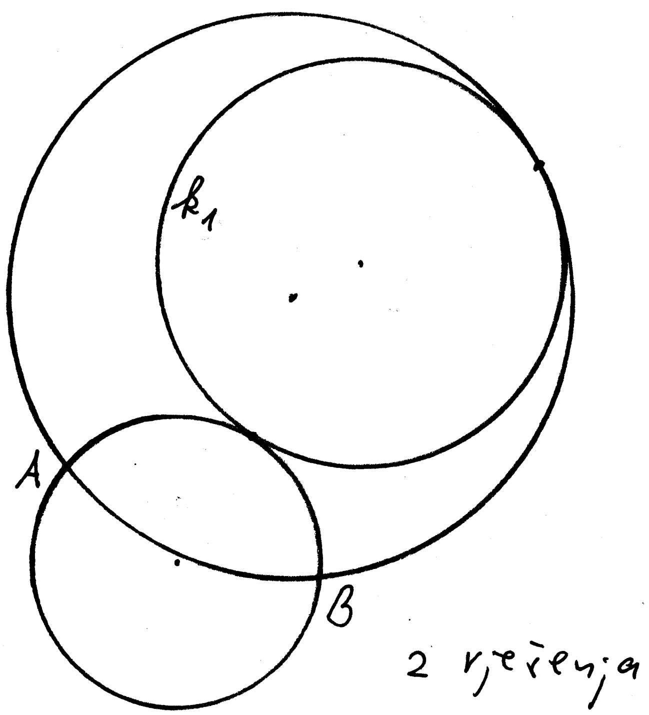
$AB \perp OA$



nema rješenja

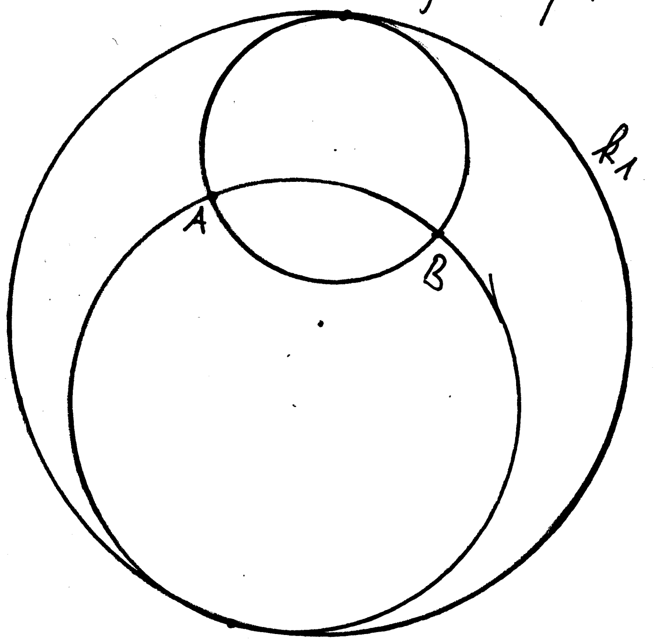


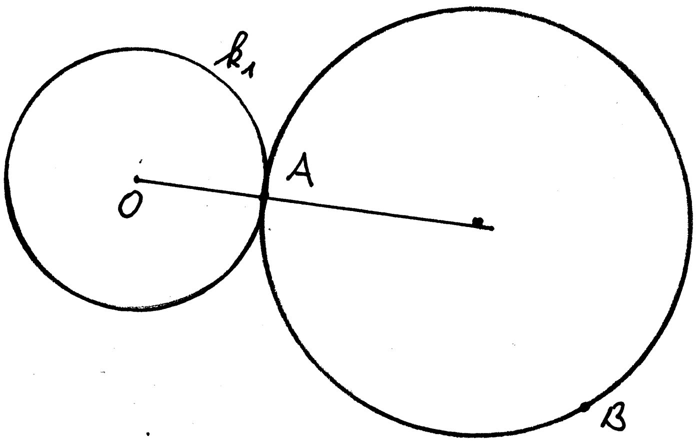
nema rješenja



2 rješenja

2 rješenja





$OA \perp AB$

1 rješenje

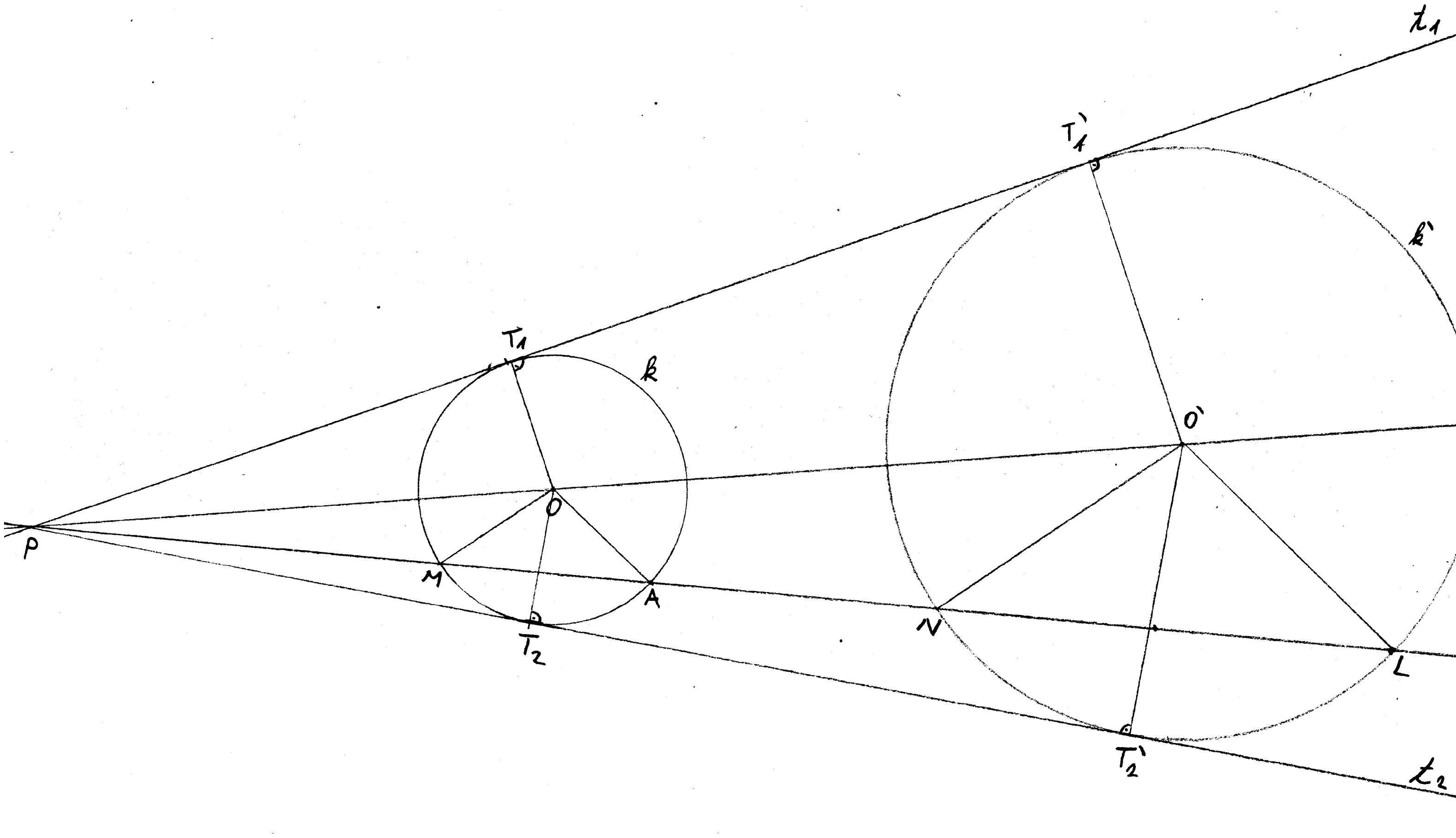
4. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i datu kružnicu.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je k kružnica koja dodiruje prave t_1 i t_2 redom u tačkama T_1 i T_2 i neka k prolazi kroz tačku A. Označimo sa $\{P\} = t_1 \cap t_2$.

Neka je $k'(O', O'T_1')$ kružnica takva da je O' proizvoljna tačka na simetrali $\sphericalangle t_1 P t_2$, a T_1' ortogonalna projekcija tačke O' na pravu t_1. Kako je $O' \in sim \sphericalangle t_1 P t_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow O'$ podjednako udaljena od t_1 i t_2 pa je t_2 tangenta na kružnicu k'. Označimo sa T_2' tačku



dodira tangente t_2 i kružnice k'. Neka je $p(P,A) \cap k = \{M, A\}$, $p(P,A) \cap k' = \{N, L\}$, r' poluprečnik kružnice k' i r poluprečnik od k.

$$OT_1 \parallel O'T_1' \overset{T_0 T_0}{\Longrightarrow} \frac{PO'}{PO} = \frac{PT_1'}{PT_1'} = \frac{r'}{r}$$

$$OT_2 \parallel O'T_2 \overset{T_0 T_0}{\Longrightarrow} \frac{PO'}{PO} = \frac{PT_2'}{PT_2} = \frac{r'}{r}$$

Kružnica k' je dobijena homotetijom iz kružnice k sa koeficijentom $\frac{r'}{r} \Rightarrow O'L \parallel OA$ i $MO \parallel NO'$. Kružnica k možemo konstruisati.

<u>Konstrukcija</u>

1. A, t_1, t_2
2. $t_1 \cap t_2 = \{P\}$
3. s simetrala $\measuredangle t_1 S t_2$
4. kružnica $k'(O', O'T_1')$ gdje je O' proizvoljna tačka na s a T_1' ortogonalna projekcija tačke O' na t_1

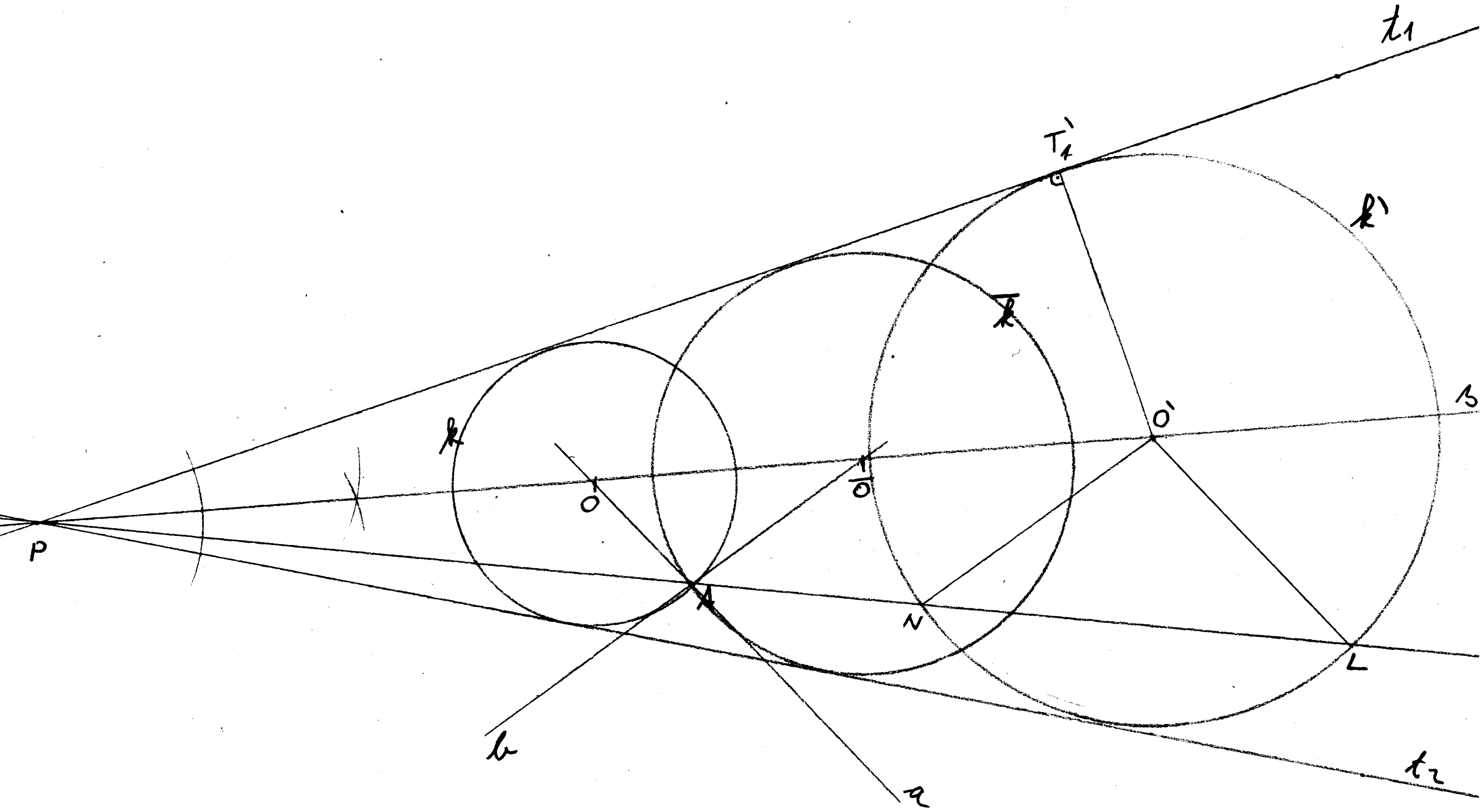
5. $p(P, A) \cap k' = \{N, L\}$

6. a: $a \parallel O'L \wedge a \ni A$

b: $b \parallel O'N \wedge b \ni A$

7. $a \cap s = \{O\}$, $b \cap s = \{\bar{O}\}$

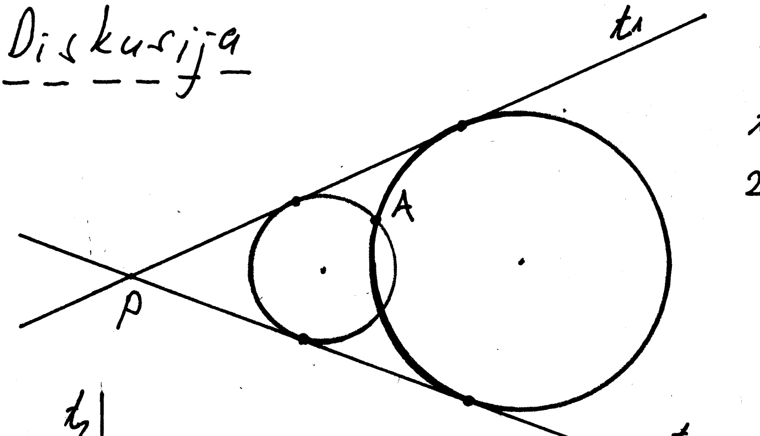
8. $k(O, OA)$, $\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}A)$.



Dokaz

Da konstruisane kružnice k i $\bar{k}$ prolaze kroz tačku A i da dodiruju prave t_1 i t_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

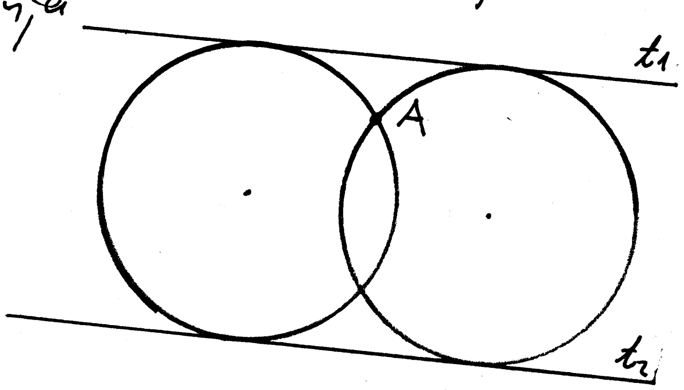


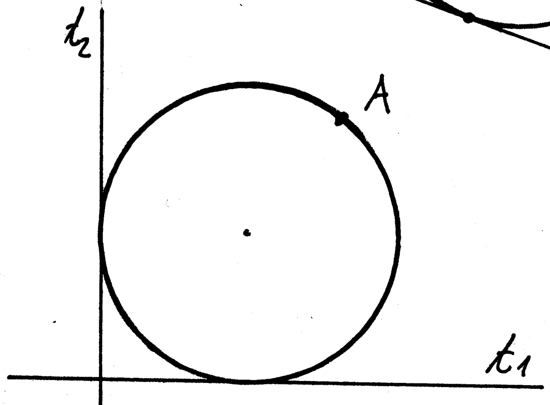
$t_1 \nparallel t_2$

2 rješenja

$t_1 \parallel t_2$

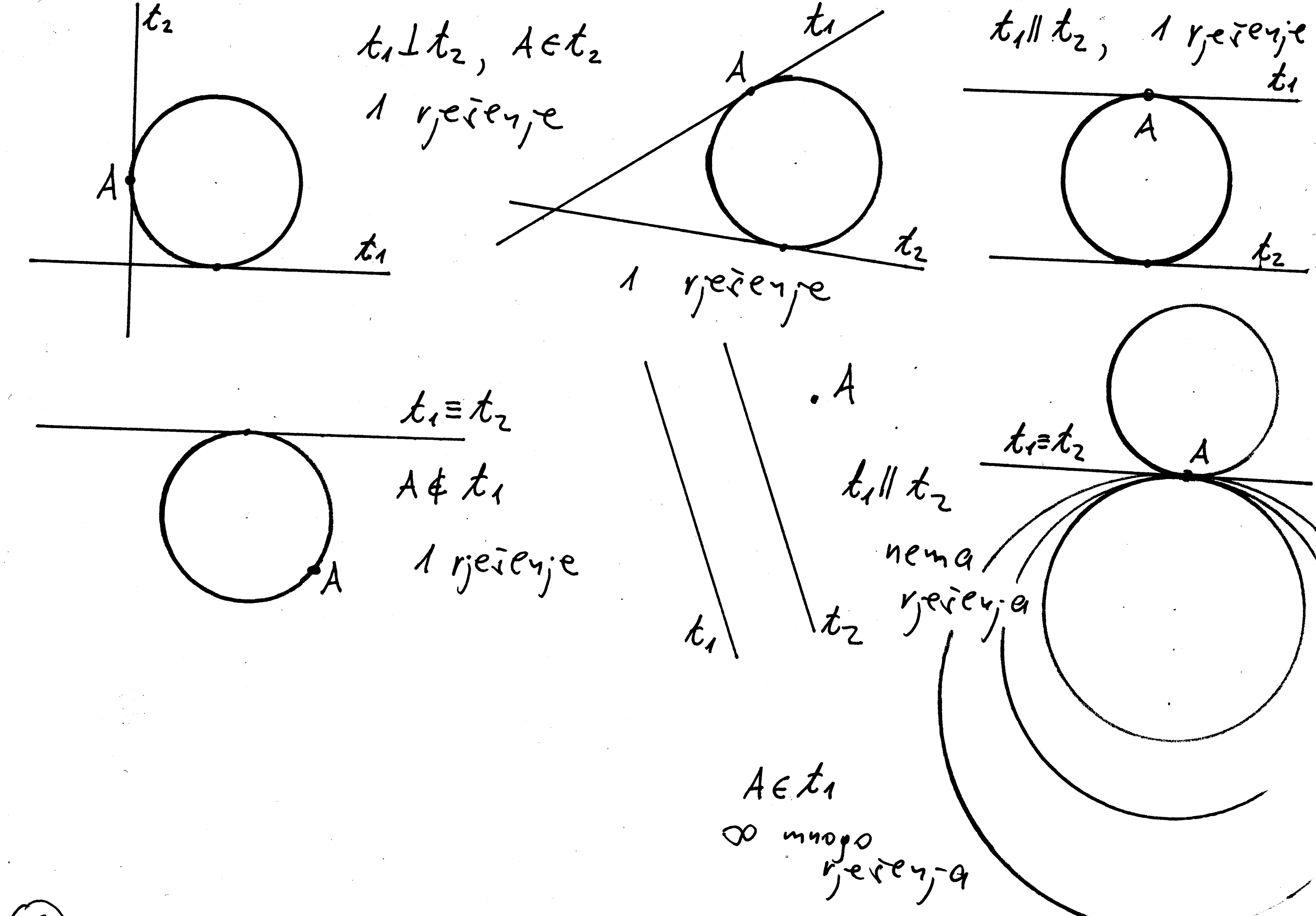
2 rješenja





$t_1 \perp t_2$

1 rješenje



5. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i datu kružnicu.

<u>Analiza</u>

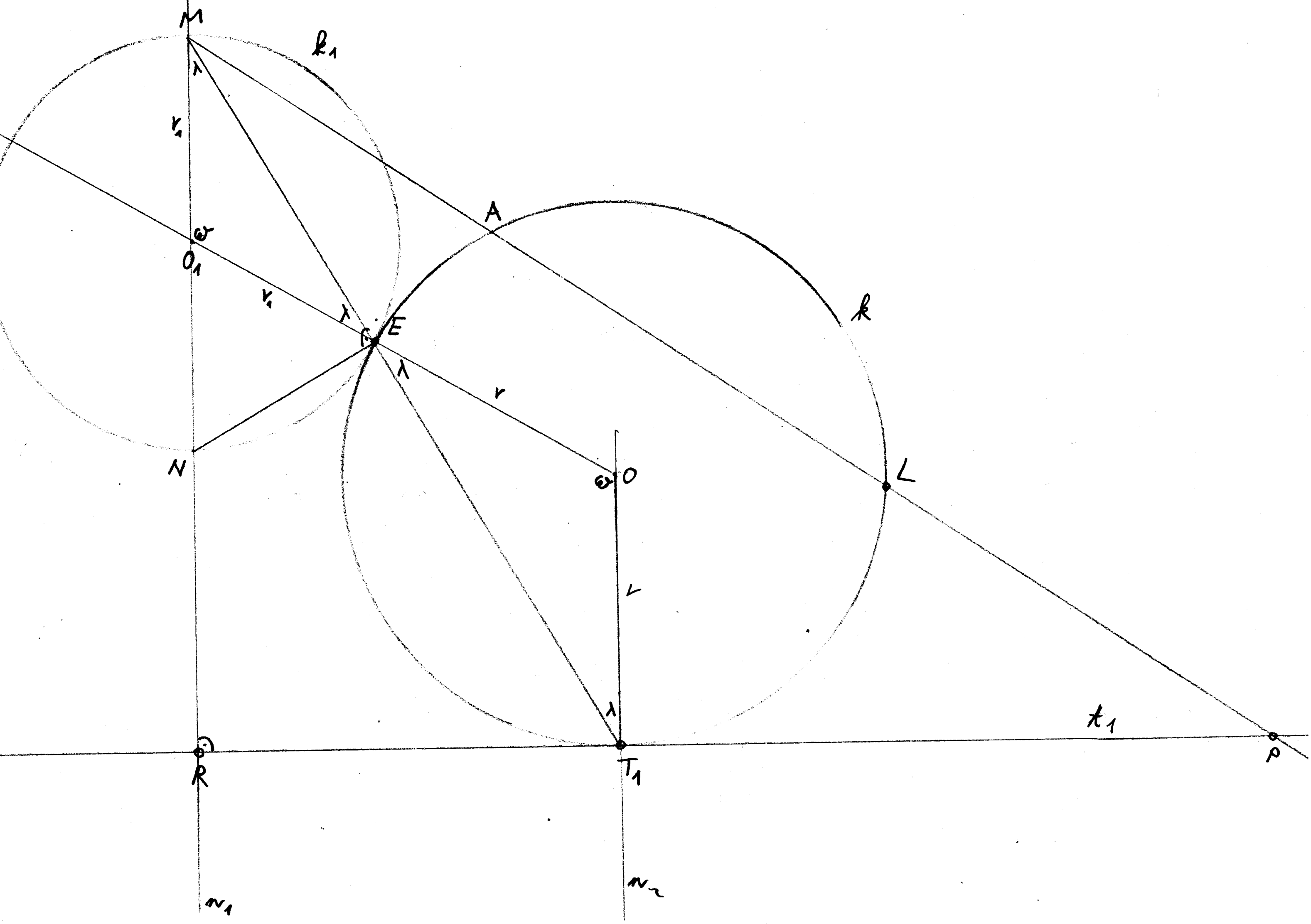
Pretpostavimo da je zadatak riješen.
Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje pravu t_1 u tački T_1, kružnicu $k_1(O_1,r')$ u tački E i prolazi kroz tačku A. Označimo sa n_1 i n_2 redom normale iz tački O_1 i O na pravu t_1. Neka je $n_1 \cap k_1 = \{M, N\}$, $n_1 \cap t_1 = \{R\}$ i $R-N-M$. E je tačka dodira kružnica k_1 i k pa su tačke O_1, E i O kolinearne.

$n_1 \parallel n_2$ i $p(O,O_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle MO_1E = \measuredangle EOT_1 = \omega$

ΔMO_1E i ΔEOT_1 jkk $\Rightarrow \measuredangle O_1ME = \measuredangle O_1EM = \measuredangle OET_1 = \measuredangle ET_1O = \lambda$

$\Rightarrow$ tačke M, E i T_1 su kolinearne.

Dalje primjetimo da je:



$$\left.\begin{aligned} \measuredangle NEM &= \measuredangle MRT_1 = 90^\circ \\ \measuredangle EMN &= \measuredangle RMT_1 = \lambda \\ \measuredangle MNE &= \measuredangle RT_1M \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \triangle MNE \sim \triangle MT_1R$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MN}{MT_1} = \frac{ME}{MR} \Rightarrow MN \cdot MR = ME \cdot MT_1 \quad \ldots(*)$$

Označimo sa $\{P\} = p(M, A) \cap t_1$; $\{L, A\} = p(M, A) \cap k$.

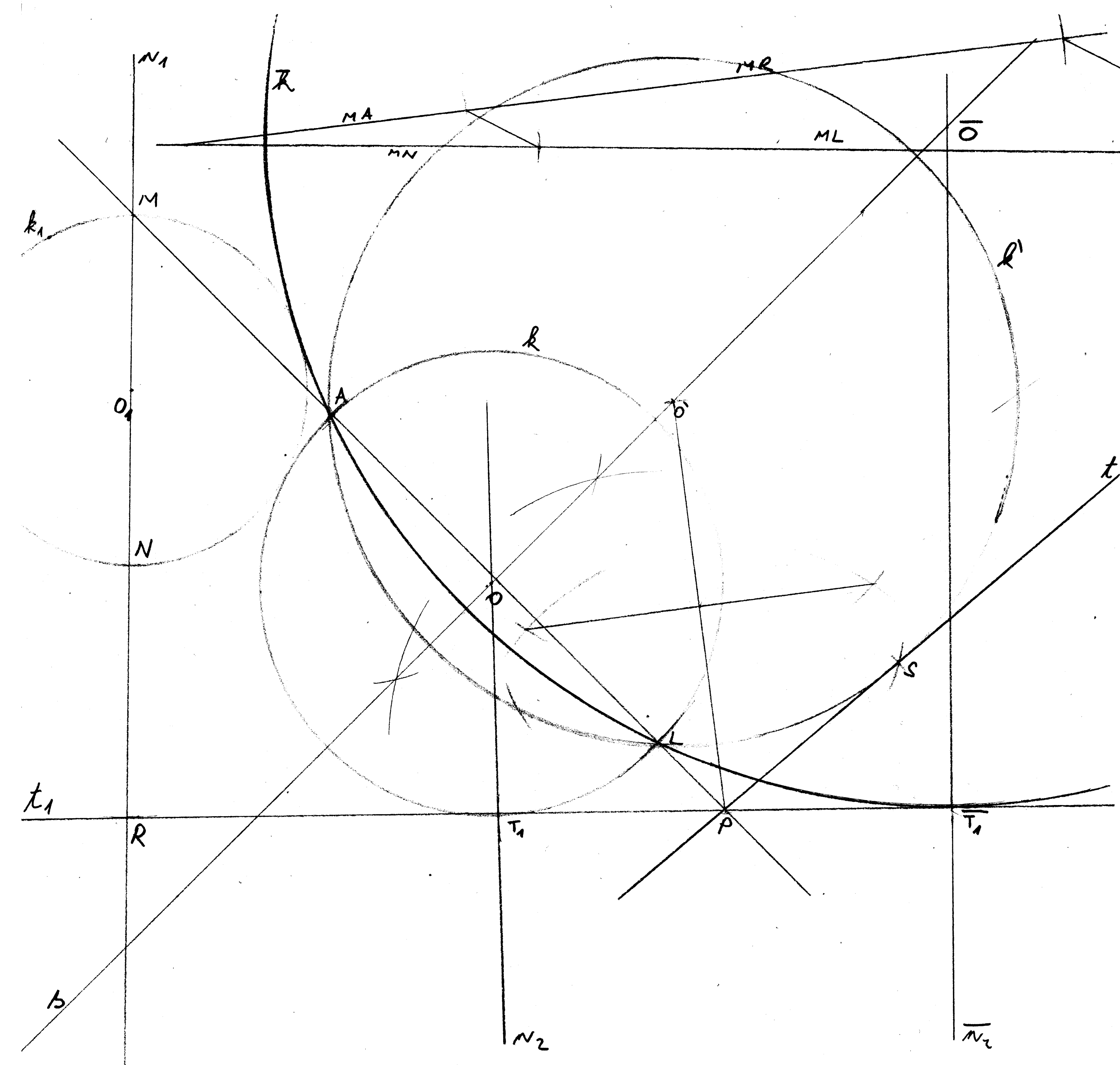
Primjetimo da je $MA \cdot ML = ME \cdot MT_1 \xRightarrow{(*)}$

$MA \cdot ML = MN \cdot MR$ tj. $ML = \dfrac{MN \cdot MR}{MA}$.

Kako tačke M, N, R možemo konstruisati a tačka A je data tačka to možemo konstruisati i tačku L. Sad imamo dvije tačke A i L i pravu t_1 (2 Apolonijev problem) pa kružnicu k možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. $A,\ t_1,\ k_1$
2. $n_1:\ n_1 \ni O_1 \ \wedge\ n_1 \perp t_1$
3. $n_1 \cap k_1 = \{M, N\}$
   $n_1 \cap t_1 = \{R\}$, $R-M-N$
4. $p(M, A) \cap t_1 = \{P\}$
5. $ML = \dfrac{MN \cdot MR}{MA}$
6. $k(M, ML) \cap p(M, A) = \{L\}$
7. s simetrala AL
8. proizvoljna kružnica $k'(O', O'A)$
   $O' \in s$
9. tangenta t iz P na k'
10. $t \cap k' = \{S\}$
11. $k(P, PS) \cap t_1 = \{T_1, \overline{T_1}\}$
12. $n_2:\ n_2 \perp t_1 \ \wedge\ n_2 \ni T_1$
    $\overline{n_2}:\ \overline{n_2} \perp t_1 \ \wedge\ \overline{n_2} \ni \overline{T_1}$
13. $n_2 \cap s = \{O\}$, $\overline{n_2} \cap s = \{\overline{O}\}$
14. $k(O, OA)$, $\overline{k}(\overline{O}, \overline{O}A)$



Dokaz

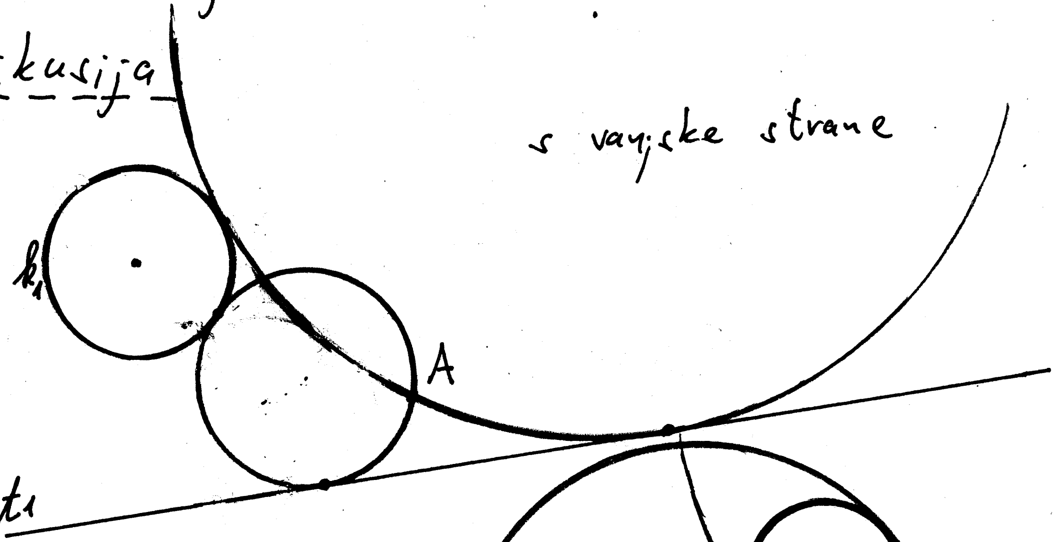
Da konstruisane kružnice k i k prolaze kroz tačku A, dodiruju kružnicu k_1 i pravu t_1 slijedi iz Analize i Konstrukcije

Diskusija

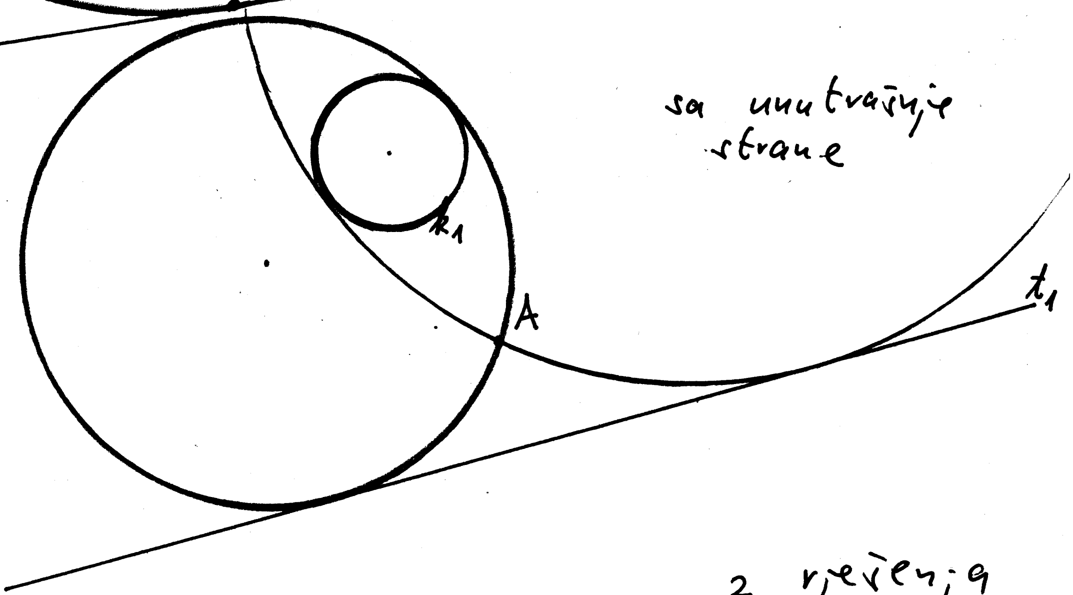
s vanjske strane

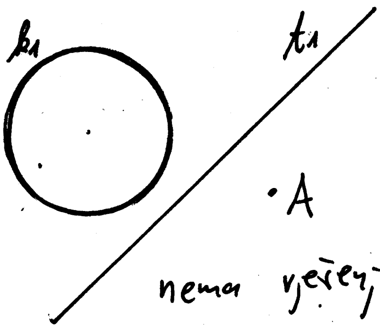
2 + 2 =

= 4 rješenja



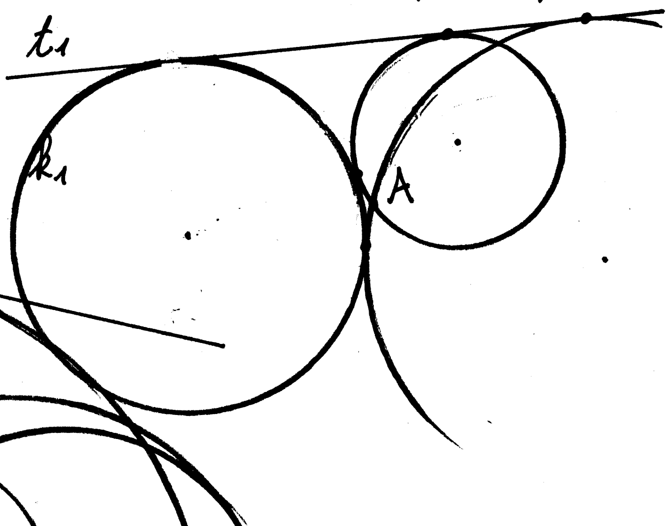
sa unutrašnje strane

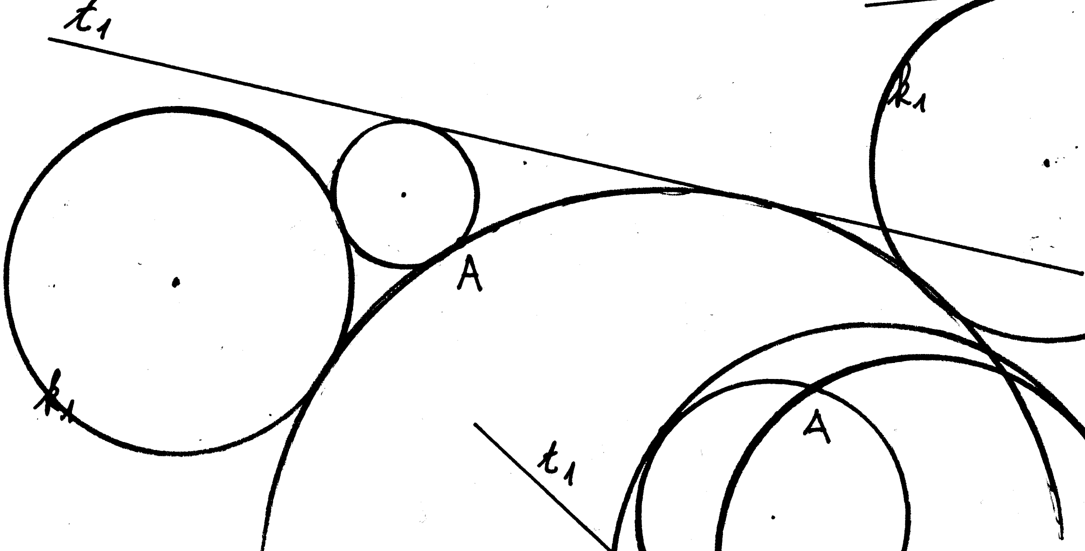




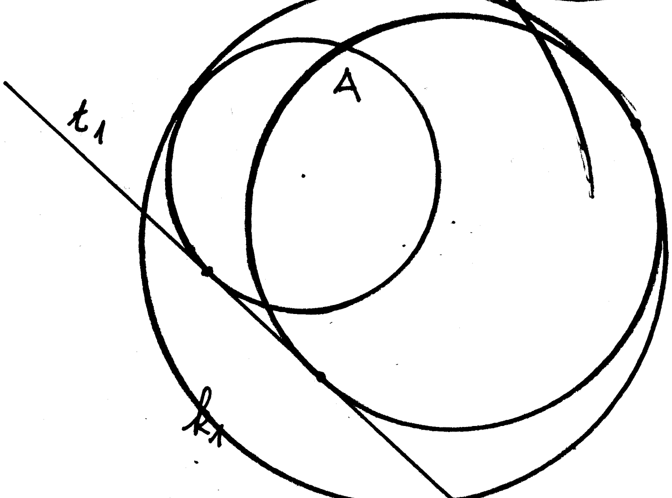
nema rješenja

2 rješenja



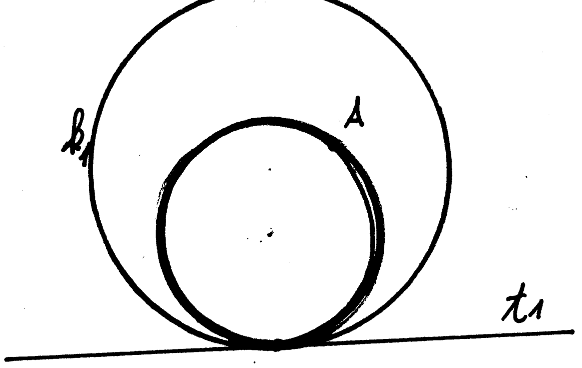


2 rješenja

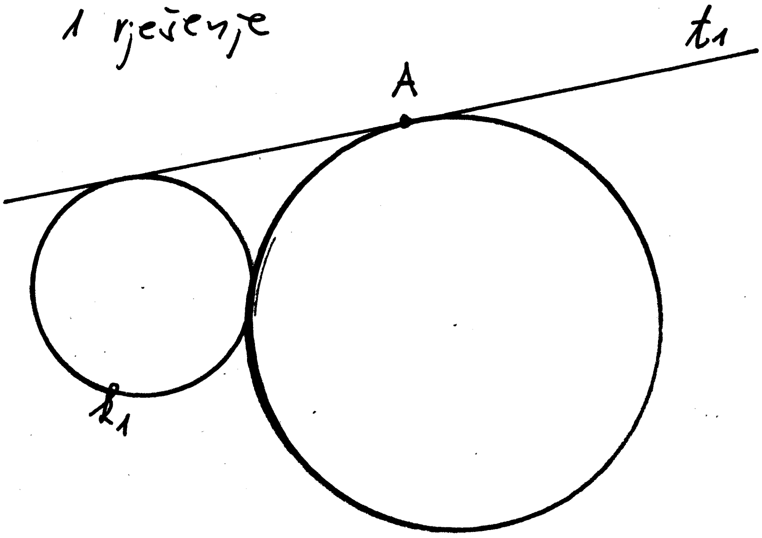


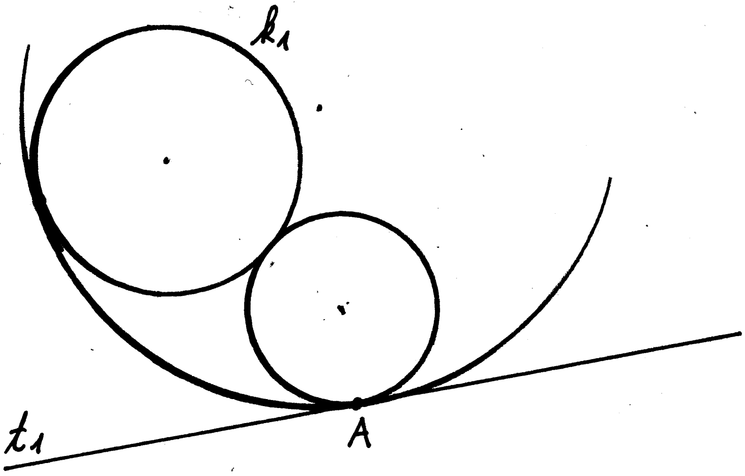
2 rješenja

1 rješenje

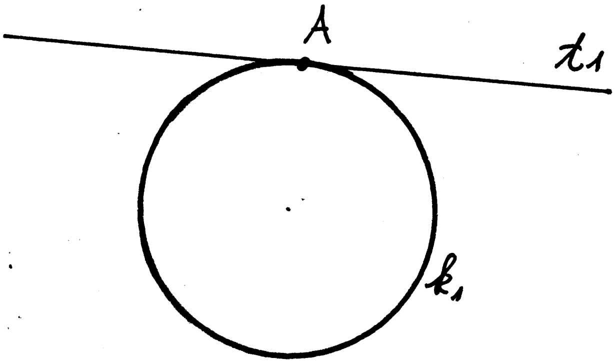


1 rješenje





2 rješenja



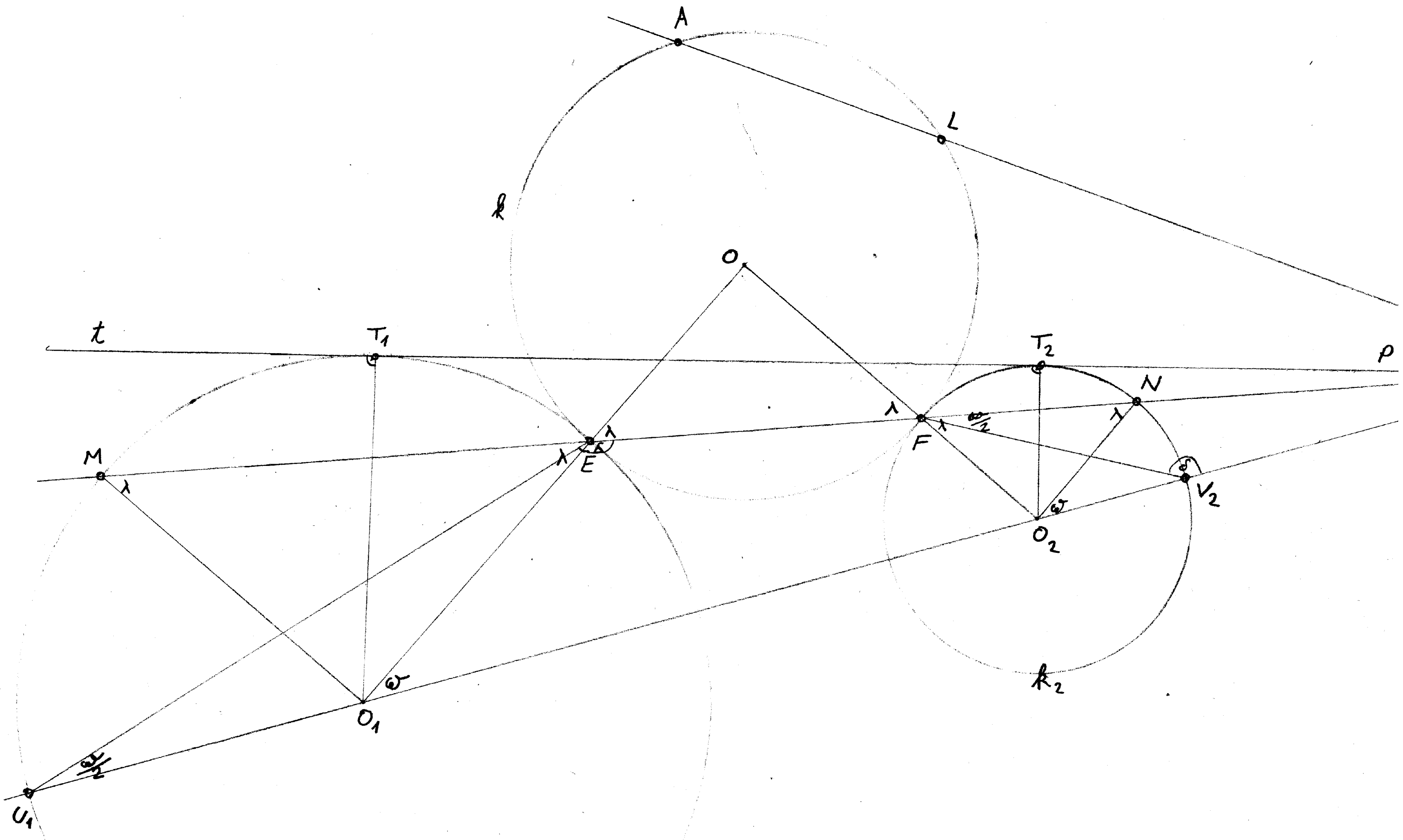
∞ mnogo rješenja

6. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.
Neka tražena kružnica $k(O,r)$ dodiruje kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ redom u tačkama E i F, i prolazi kroz tačku A. Kako je E dodirna tačka kružnica k_1 i k_2 to su tačke O_1, E i O kolinearne. Primjetimo da su i tačke O, F i O_2 kolinearne. Označimo sa $\{P\} = p(O_1,O_2) \cap p(E,F)$.
Dalje neka je $p(E,F) \cap k_1 = \{M,E\}$ i $p(E,F) \cap k_2 = \{F,N\}$.
Primjetimo da su trouglovi ΔMO_1E, ΔEFO i ΔFO_2N jkk a kako imaju podudarne unakrsne uglove to je i $\measuredangle EMO_1 = \measuredangle O_1EM = \measuredangle OEF = \measuredangle EFO = \measuredangle NFO = \measuredangle O_2NF = \lambda$.
Kako su tačke N, F, E i M na istoj pravoj

$\Rightarrow p(O_1,M) \parallel p(O_2,F)$ i $p(O_1,E) \parallel p(O_2,N)$



Označimo sa $\{U_1, U_2\} = p(O_1, O_2) \cap k_1$ i $\{V_1, V_2\} = p(O_1, O_2) \cap k_2$.
Kako je ω centralni ugao $\Rightarrow \measuredangle EU_1P = \measuredangle PF{}_2 = \frac{\omega}{2}$.

Imamo
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle EPU_1 = \measuredangle V_2PF \\ \measuredangle EU_1P = \measuredangle PFV_2 = \frac{\omega}{2} \\ \measuredangle PEV_1 = \measuredangle FV_2P \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta EU_1P \sim \Delta V_2PF$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{PU_1}{PF} = \frac{PE}{PV_2} \Rightarrow PE \cdot PF = PU_1 \cdot PV_2 \quad \dots (*)$$

Primjetimo da je i $PA \cdot PL = PE \cdot PF \quad \dots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow PA \cdot PL = PU_1 \cdot PV_2 \Rightarrow PL = \frac{PU_1 \cdot PV_2}{PA}$

Da bi mogli konstruisati tačku L potrebna nam je tačka P.

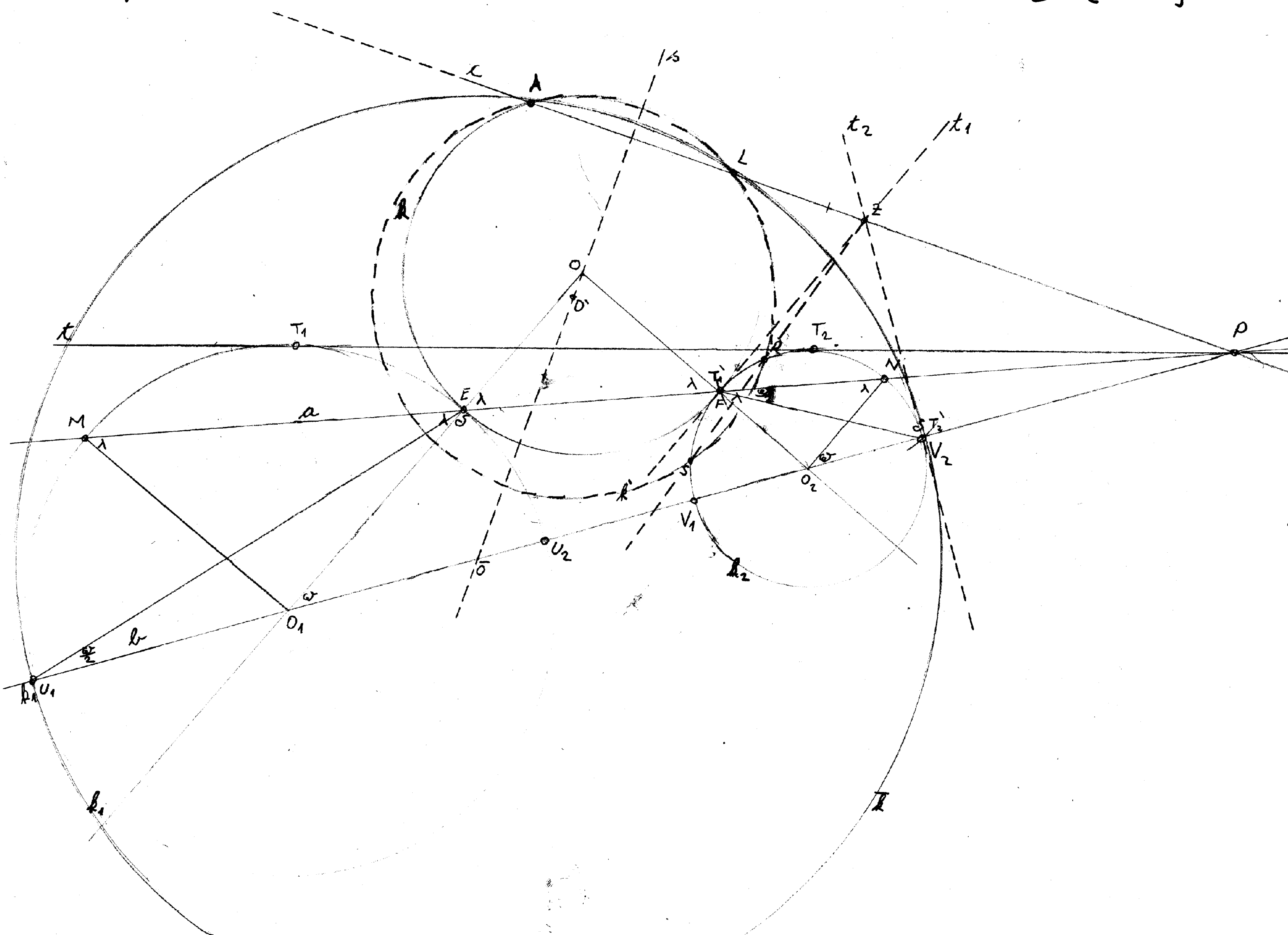
$$\left.\begin{array}{l} p(O_1, M) \parallel p(O_2, F) \xRightarrow{T_0 T_0} \frac{PM}{PF} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{MO_1}{FO_2} = \frac{r_1}{r_2} \\ p(O_1, E) \parallel p(O_2, N) \xRightarrow{T_0 T_0} \frac{PE}{PN} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1E}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P$ je centar homotetije koja kružnica k_2 preslikava u k_1 sa koeficijentom sličnosti $\frac{r_1}{r_2}$.

Ako pretpostavimo da je $p(P, T_2)$ tangenta kružnice k_2 (gdje je $T_2 \in k_2$), kako je P centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 to i tačku $T_2 \in k_2$ preslikava u tačku $T_1 \in k_1$ $\Rightarrow$ $p(P, T_1)$ je tangenta kružnice k_1. Prema tome tačku P možemo konstruisati ($p(O_1, O_2) \cap p(T_1, T_2) = \{P\}$). Poslije tačke P možemo konstruisati tačku L pa se zadatak svodi na 3 Apolonijev problem.

Konstrukcija

1. A, $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$
2. $p(O_1, O_2) \cap k_1 = \{U_1, U_2\}$
   $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{V_1, V_2\}$
3. tangentu t na kružnice k_1 i k_2, $t \cap k_1 = \{T_1\}$, $t \cap k_2 = \{T_2\}$
4. $t \cap p(O_1, O_2) = \{P\}$
5. prava $c = p(A, P)$
6. tačka L na pravoj $p(P, A)$ takva da je
   $$PL = \frac{PU_1 \cdot PV_2}{PA}$$
7. simetrala s duži AL
8. $k'(O', O'A)$: $O' \in s$ $\wedge$ $k' \cap k_2 = \{S, R\}$



9. $p(S,R) \cap p(P,A) = \{Z\}$

10. tangente t_1' i t_2' na $k_2(O_2, r_2)$

11. $t_1 \cap k_2 = \{T_1'\}$, $t_1 \cap k_2 = \{T_2'\}$

12. $p(O_2, T_1') \cap s = \{O\}$

$p(O_2, T_2') \cap s = \{\bar{O}\}$

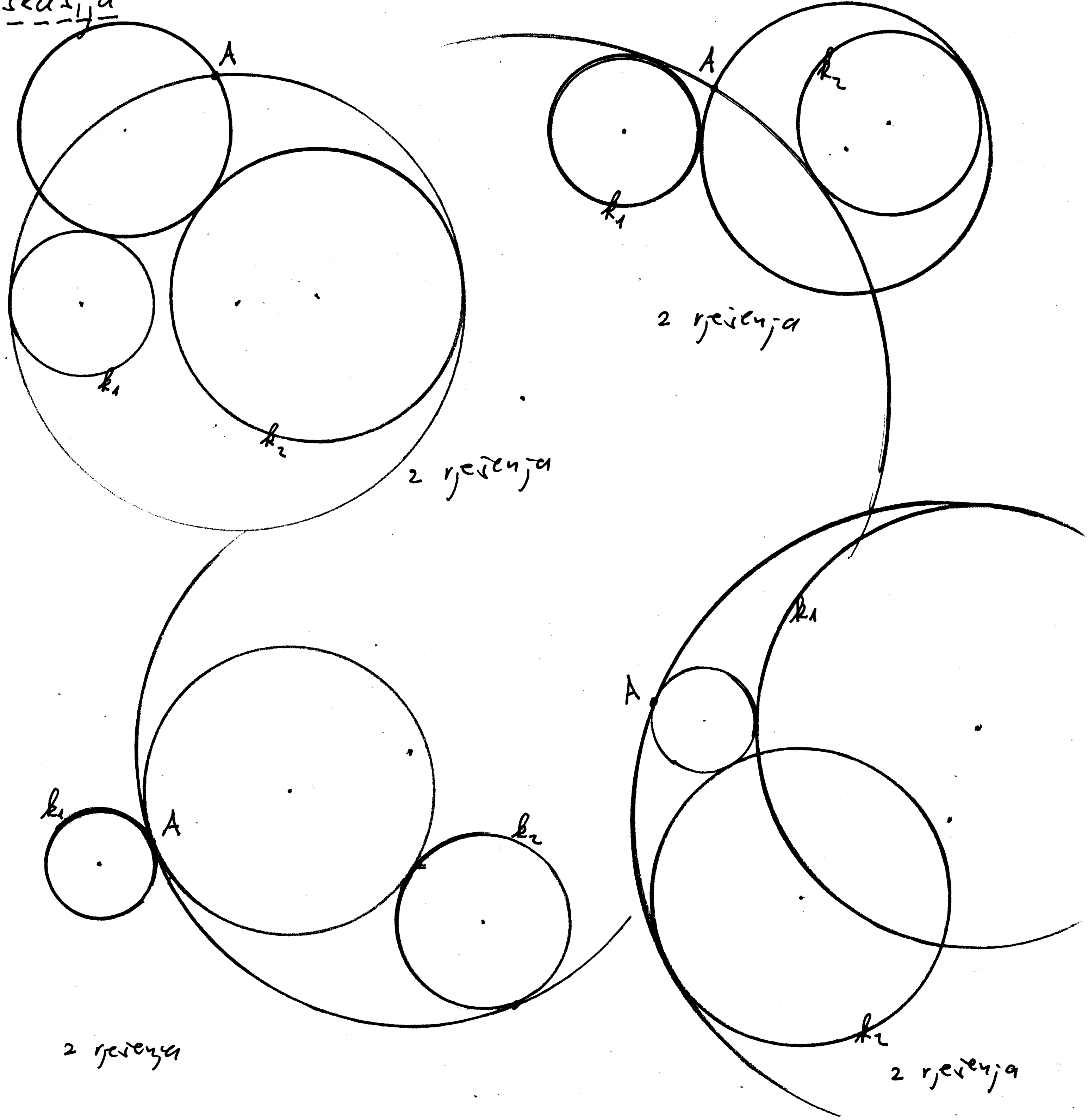
13. $k = k(O, OA)$

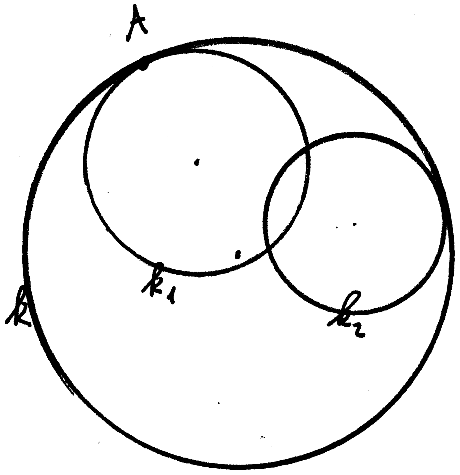
$\bar{k} = k(\bar{O}, \bar{O}A)$

Dokaz

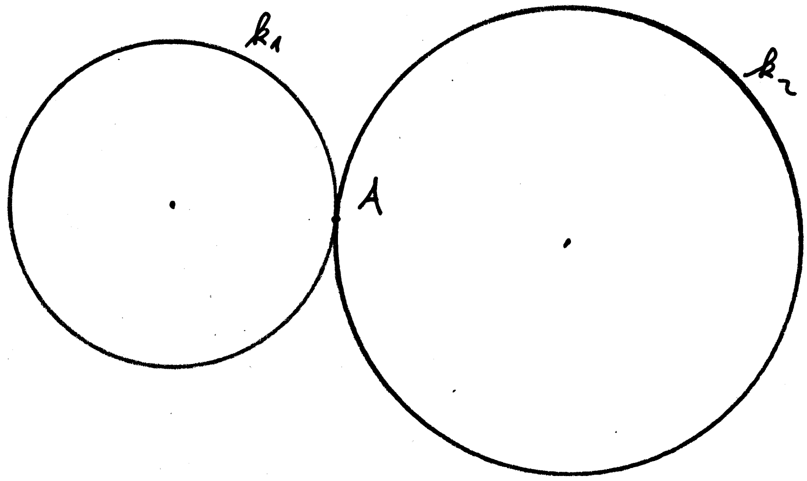
Da konstruisane kružnice prolaze kroz tačku A i da dodiruju kružnice k_1 i k_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija





1 rješenje

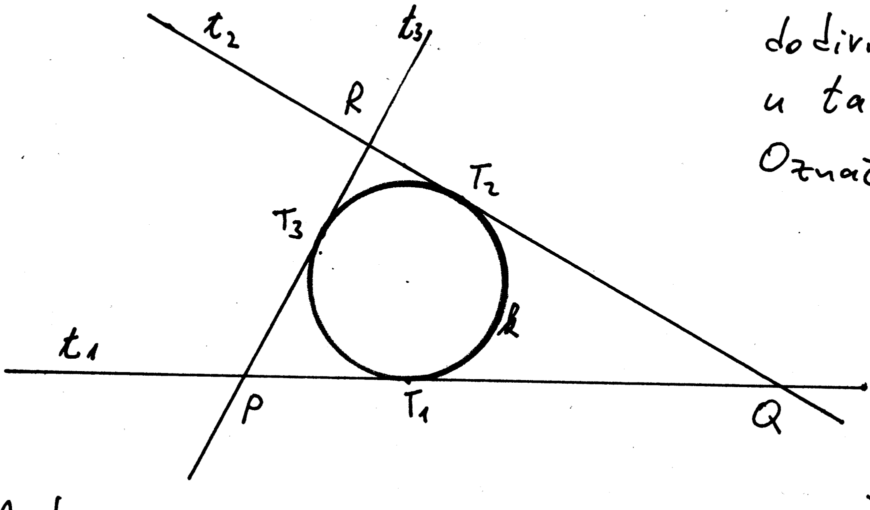


∞ mnogo rješenja

⑦ Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date prave.

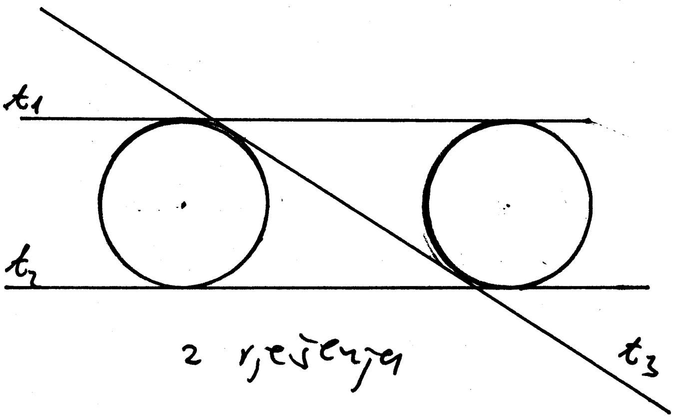
Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



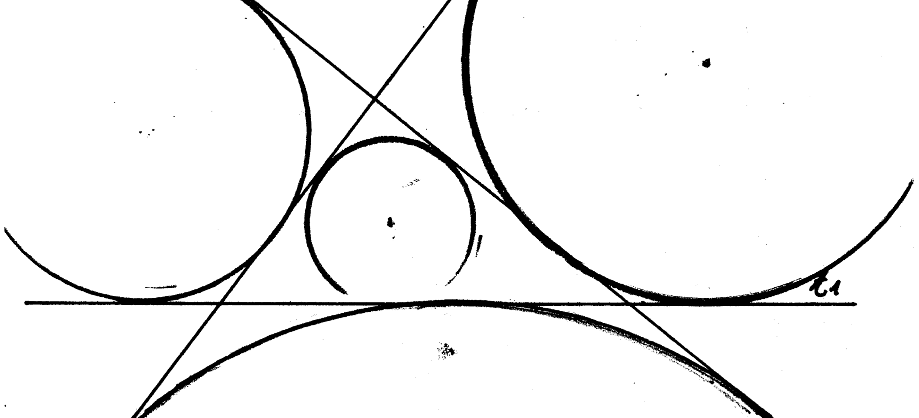
Neka tražena kružnica k dodiruje prave t_1, t_2 i t_3 redom u tačkama T_1, T_2 i T_3.
Označimo sa $\{P\} = t_1 \cap t_3$,
$\{Q\} = t_1 \cap t_2$ i $\{R\} = t_2 \cap t_3$.
Kružnica k je upisana u $\triangle PQR$ pa je možemo konstruisati.

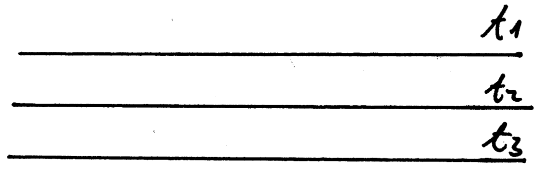
Diskusija



2 rješenja

4 rješenja



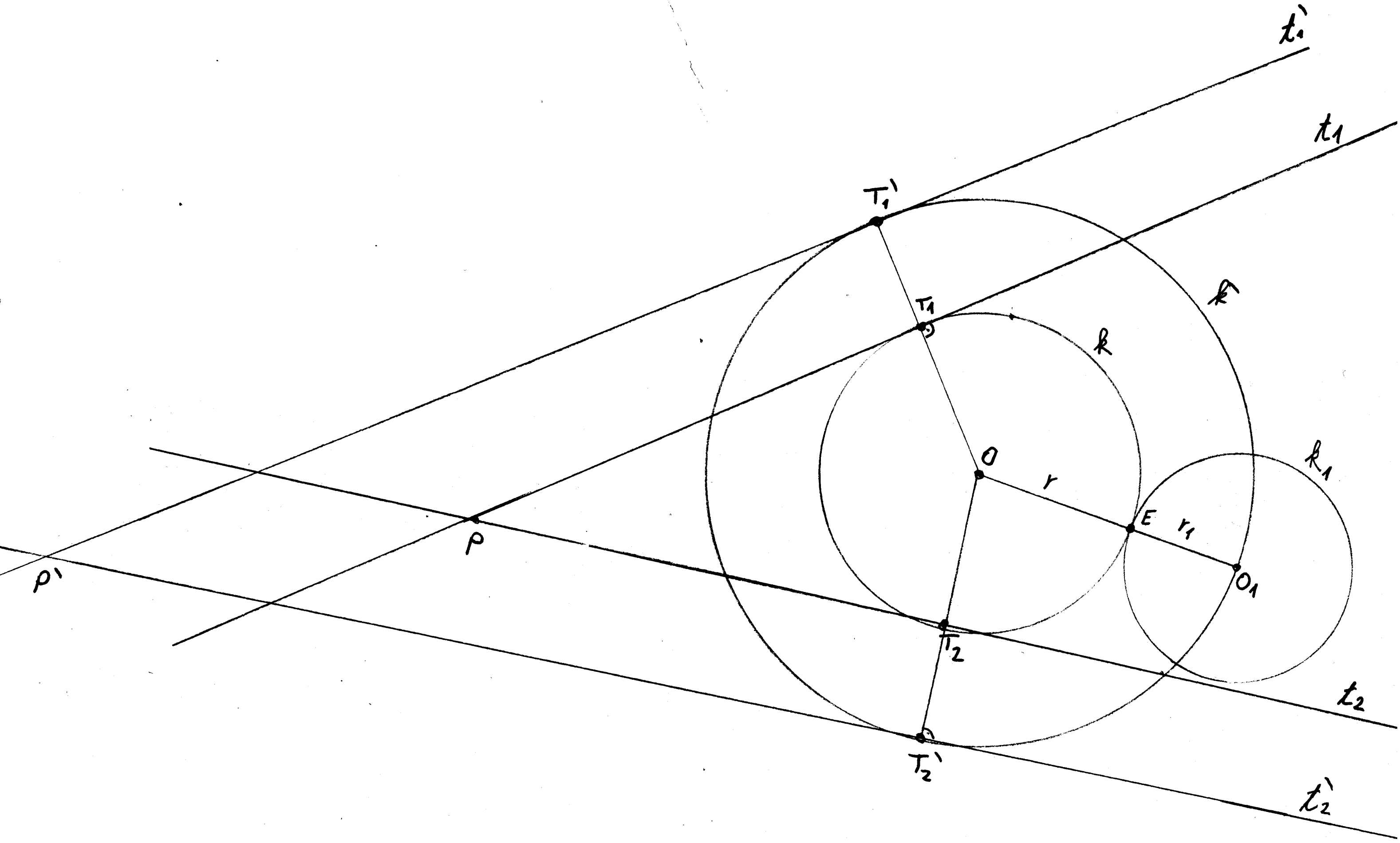


nema rješenja

8. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date prave i datu kružnicu.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



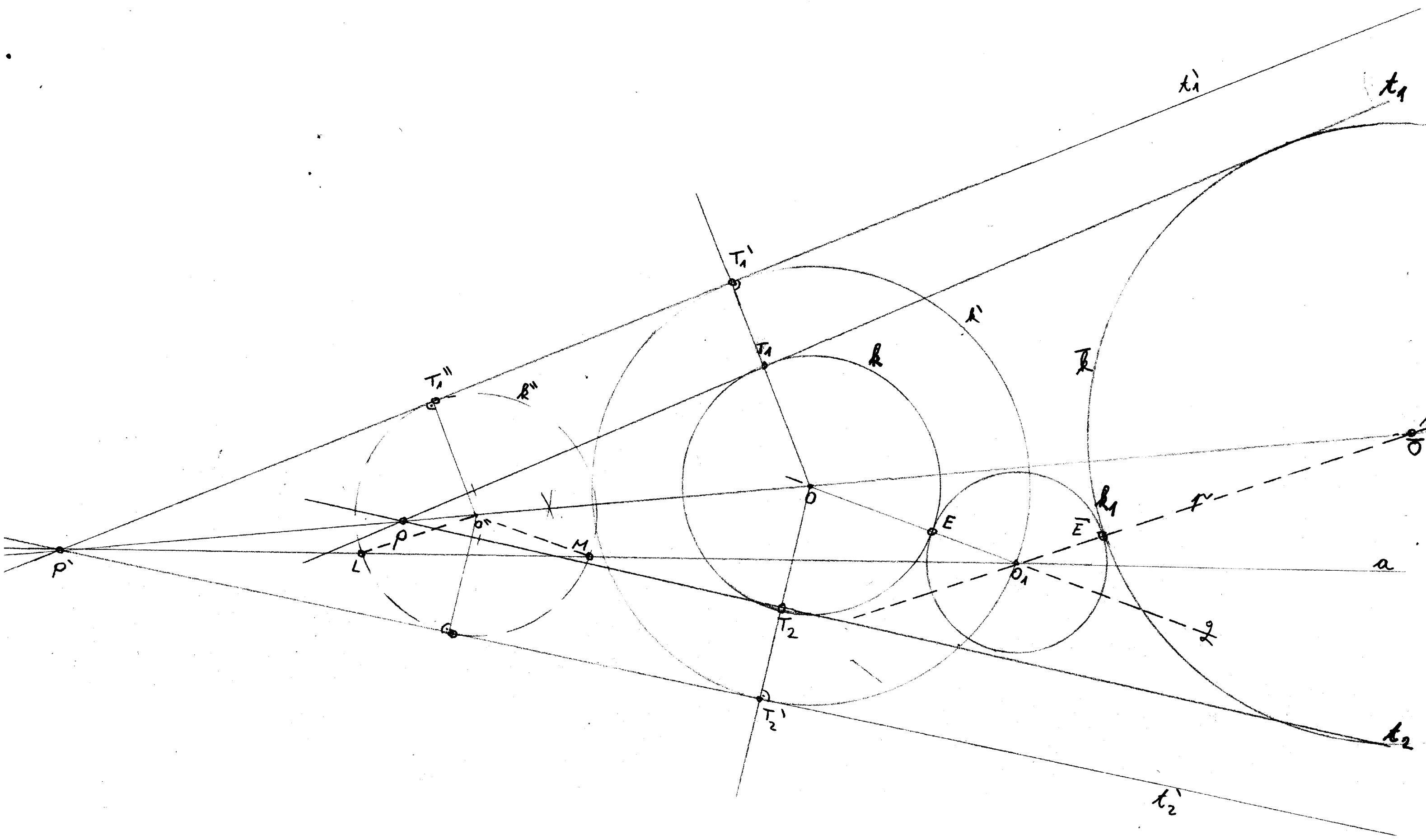
Neka tražena kružnica $k(O, r)$ dodiruje date prave t_1 i t_2 redom u tačkama T_1 i T_2, a datu kružnicu $k_1(O_1, r_1)$ u tački E. Kako je E tačka dodira dvije kružnice to su tačke O, E i O_1 kolinearne. Duž OT_1 produžimo do tačke T_1 za dužinu r_1 i duž OT_2 produžimo do tačke T_2' za dužinu r_1. Kružnica sa centrom u O poluprečnika $r+r_1$ će prolaziti kroz tačke O_1, T_1' i T_2'. Ovu kružnicu ćemo označiti sa k'. Prava t_1' takva da $t_1' \ni T_1'$ i $t_1' \perp p(O,T_1)$ je tangenta na kružnicu k' u dodirnoj tački T_1'. Slično, prava t_2': $t_2' \ni T_2'$ i $t_2' \perp p(O, T_2)$ je tangenta na kružnicu k' u dodirnoj tački T_2'.

Primjetimo da je $t_1' \parallel t_1$ i $t_2' \parallel t_2$ i da je udaljenost između njih dužina r_1. Ako možemo konstruisati kružnicu

k' onda možemo konstruisati i kružnicu k. Kako prave t_1' i t_2' možemo konstruisati to možemo konstruisati i kružnicu k' koja treba da dodiruje dvije prave t_1' i t_2' i prolazi kroz tačku O_1 (4 Apolonijev problem).

Konstrukcija-

1. t_1, t_2, k_1
2. prave t_1' i t_2' takve da su paralelne sa t_1 i t_2 i udaljene od njih za dužinu r_1 (r_1 je poluprečnik date kružnice $k_1(O_1, r_1)$).
3. $t_1' \cap t_2' = \{P'\}$
4. s simetrala $\measuredangle t_1'P't_2'$
5. proizvoljna kružnica $k''(O'', O''T_1'')$ gdje je T_1'' ortogonalna projekcija tačke O'' na pravu t_1'
6. $a = p(P', O_1)$
7. $a \cap k'' = \{L, M\}$
8. prave p i q koje sadrže tačku O_1 a paralelne su sa $O''L$ i sa $O''M$
9. $s \cap p = \{\bar{O}\}$, $s \cap q = \{O\}$
10. $k(O, OO_1 - r_1)$
    $\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}O_1 - r_1)$

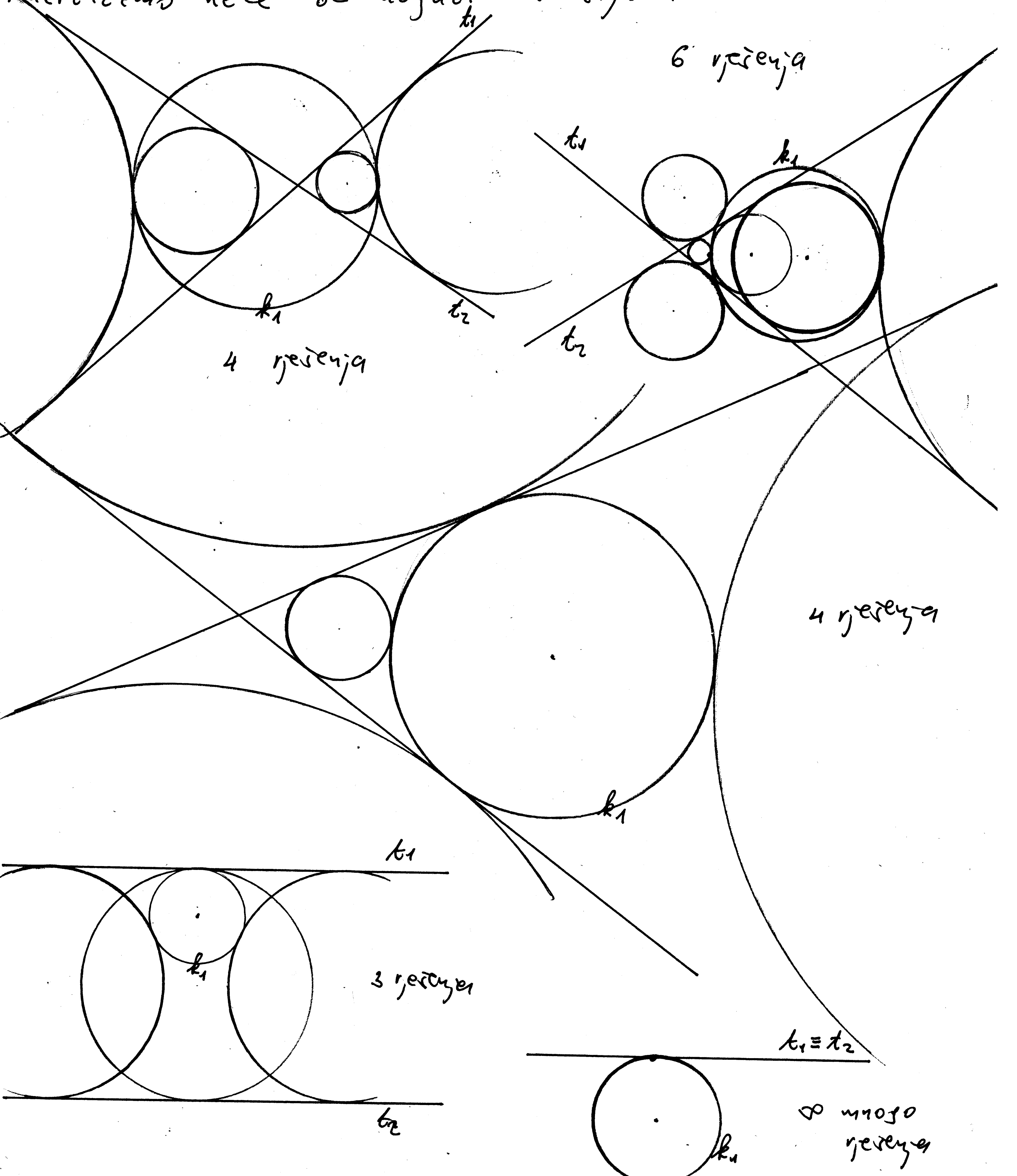


Dokaz

Da konstruisana kružnica k i $\bar{k}$ dodiruje kružnicu k_1 i i da dodiruju prave t_1 i t_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

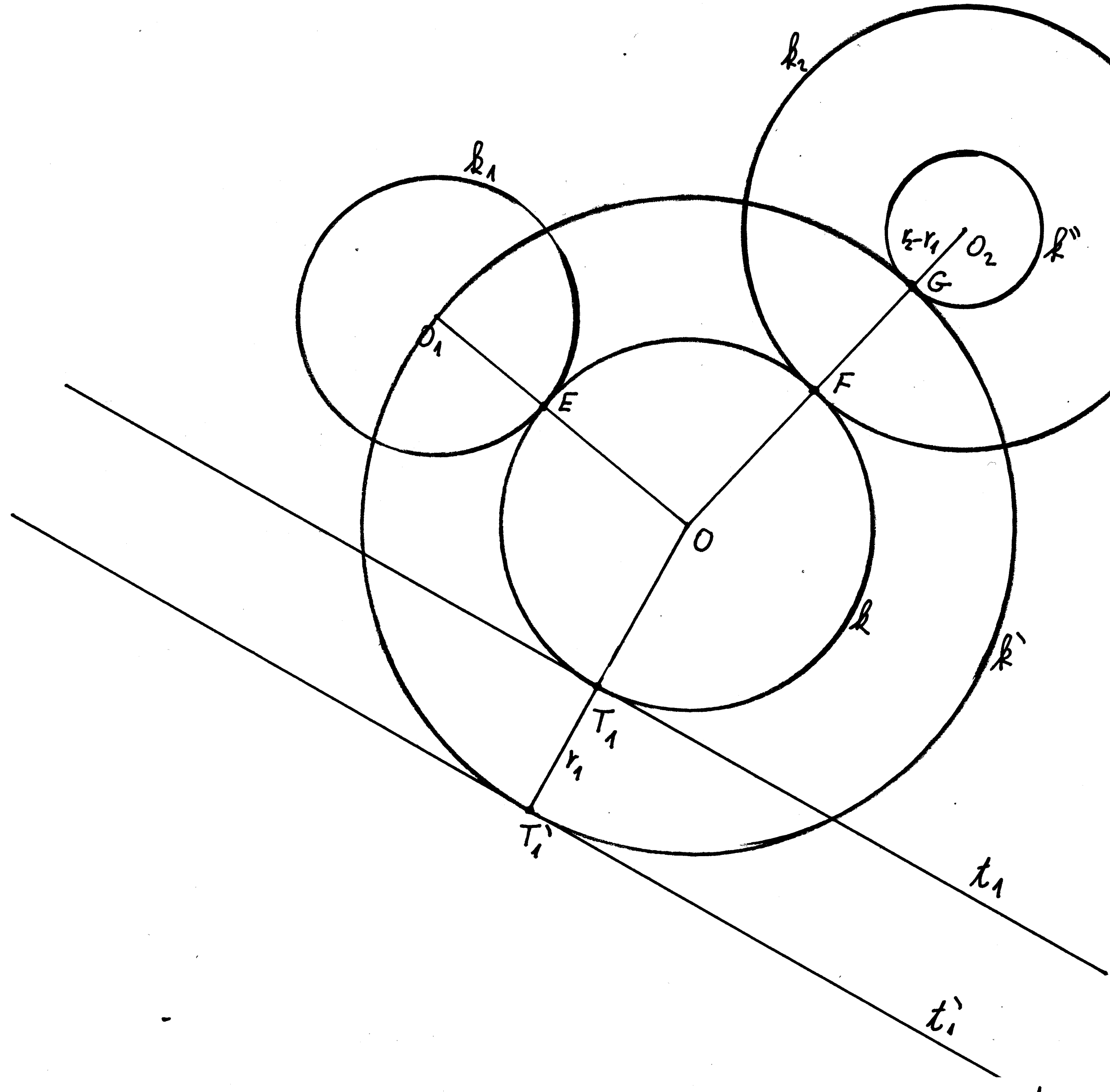
Nacrtaćemo neke od mogućih slučajeva



9. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu i dvije date kružnice.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_2>r_1)$ redom u tačkama E i F a datu pravu t_1 u tački T_1. Primjetimo da su tačke O_1, E, O i O_2, F, O kolinearne. Posmatrajmo kružnicu $k'(O, r+r_1)$. Ova kružnica prolazi kroz tačku O_1, siječe duž O_2F u tački G i siječe ~~pp~~ $[O,T_1)$ u tački T_1' tako da je $O-T_1-T_1'$.

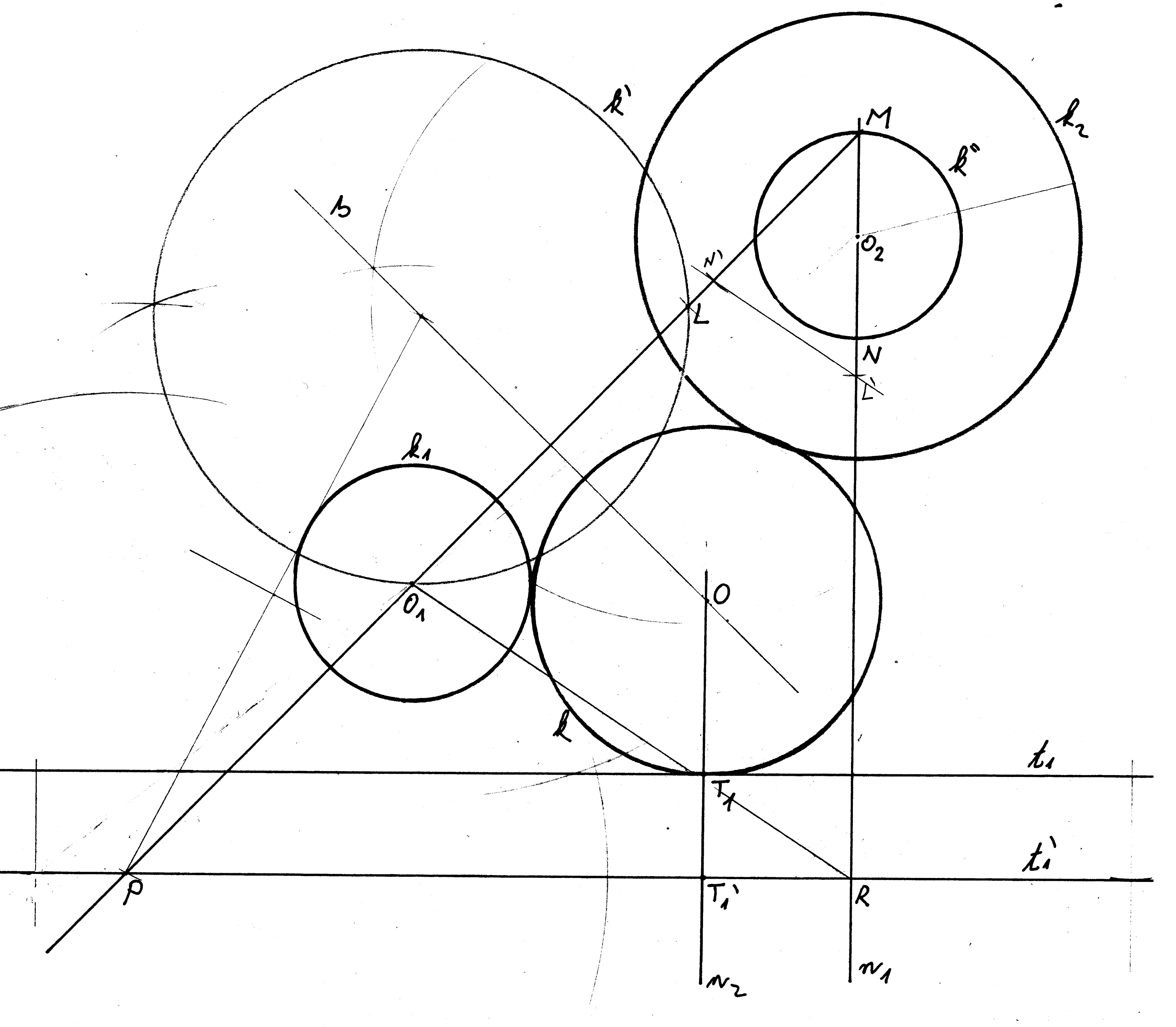
Označimo sa t_1' pravu takvu da je $t_1' \parallel t_1$, $t_1' \ni T_1'$ i prava t_1' je udaljena od prave t_1 za dužinu r_1, i sa $k''(O_2, r_2-r_1)$.

Kružnicu k'' i pravu t_1' možemo konstruisati.

Kružnica k' prolazi kroz tačku O_1, dodiruje kružnicu k'' i pravu t_1' pa imamo 5. Apolonijev problem. Poslije konstrukcije kružnice k' nije teško konstruisati traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. t_1, $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$
2. $k''(O_2, r_2 - r_1)$
3. t_1' : $t_1' \parallel t_1$ i udaljenost između pravih t_1 i t_1' je r_1
4. $n_1 : n_1 \perp t_1'$
5. $n_1 \cap t_1' = \{R\}$, $n_1 \cap k'' = \{M, N\}$: $R-N-M$
6. $p(M, O_1) \cap t_1' = \{P\}$
7. $ML = \dfrac{MN \cdot MR}{MO_1}$ $\left(\dfrac{MR}{ML} = \dfrac{MO_1}{MN} \right)$
8. $k(M, ML) \cap p(M, O_1) = \{L\}$
9. s simetrala duži O_1L
10. $k'(O', O'O_1)$ gdje je $O' \in s$



11. t' tangenta na kružnicu k'

12. $t' \cap k' = \{T'\}$

13. $k(P, PT') \cap t_1' = \{T_1'\}$

14. $n_2 : n_2 \ni T_1'$ i $n_2 \perp t_1'$

15. $n_2 \cap t_1 = \{T_1\}$, $n_2 \cap s = \{O\}$

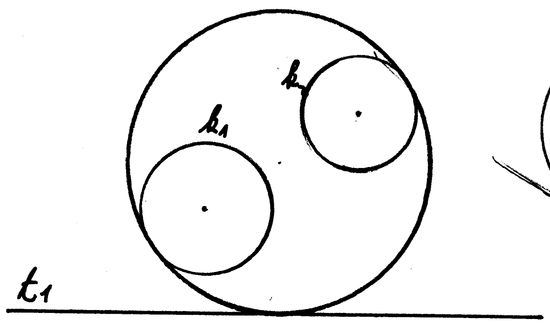
16. $k(O, OT_1)$

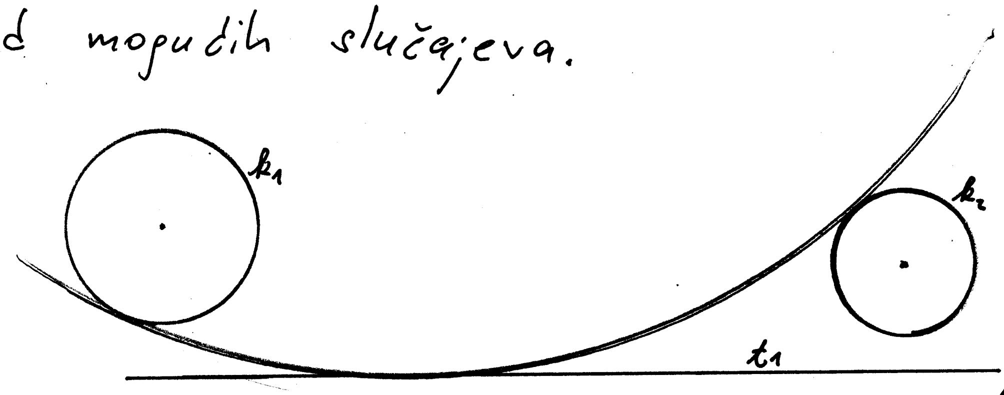
Dokaz

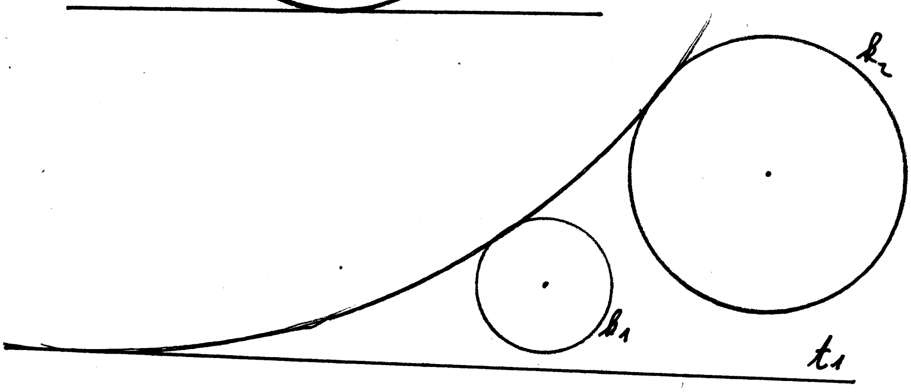
Da konstruisana kružnica k dodiruje date kružnice k_1, k_2 i datu pravu t_1, slijedi iz analize i konstrukcije.

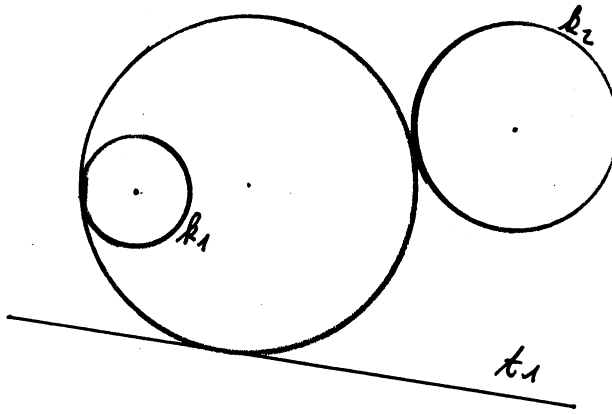
Diskusija

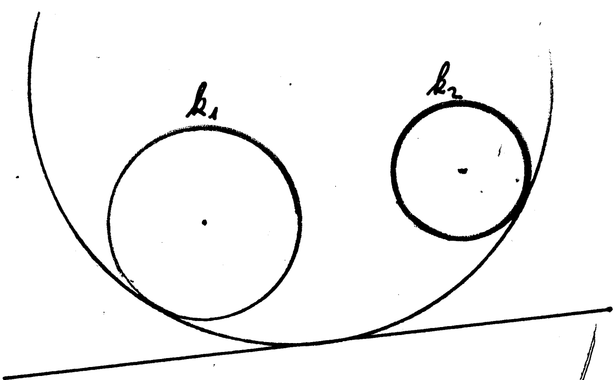
Nacrtaćemo neke od mogućih slučajeva.

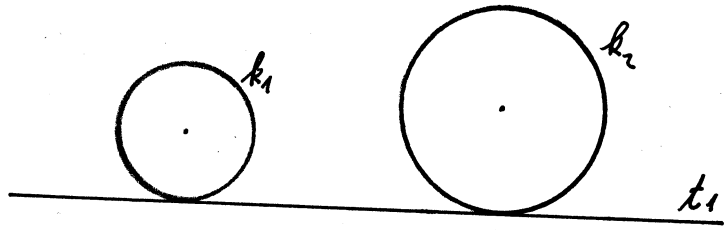




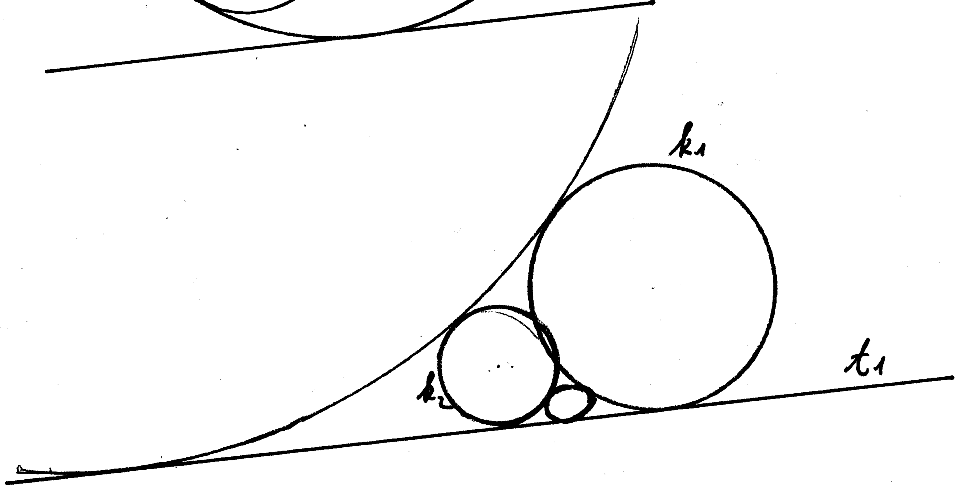




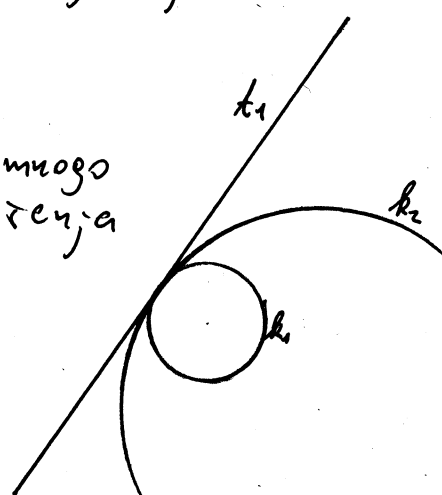




nema rješenja



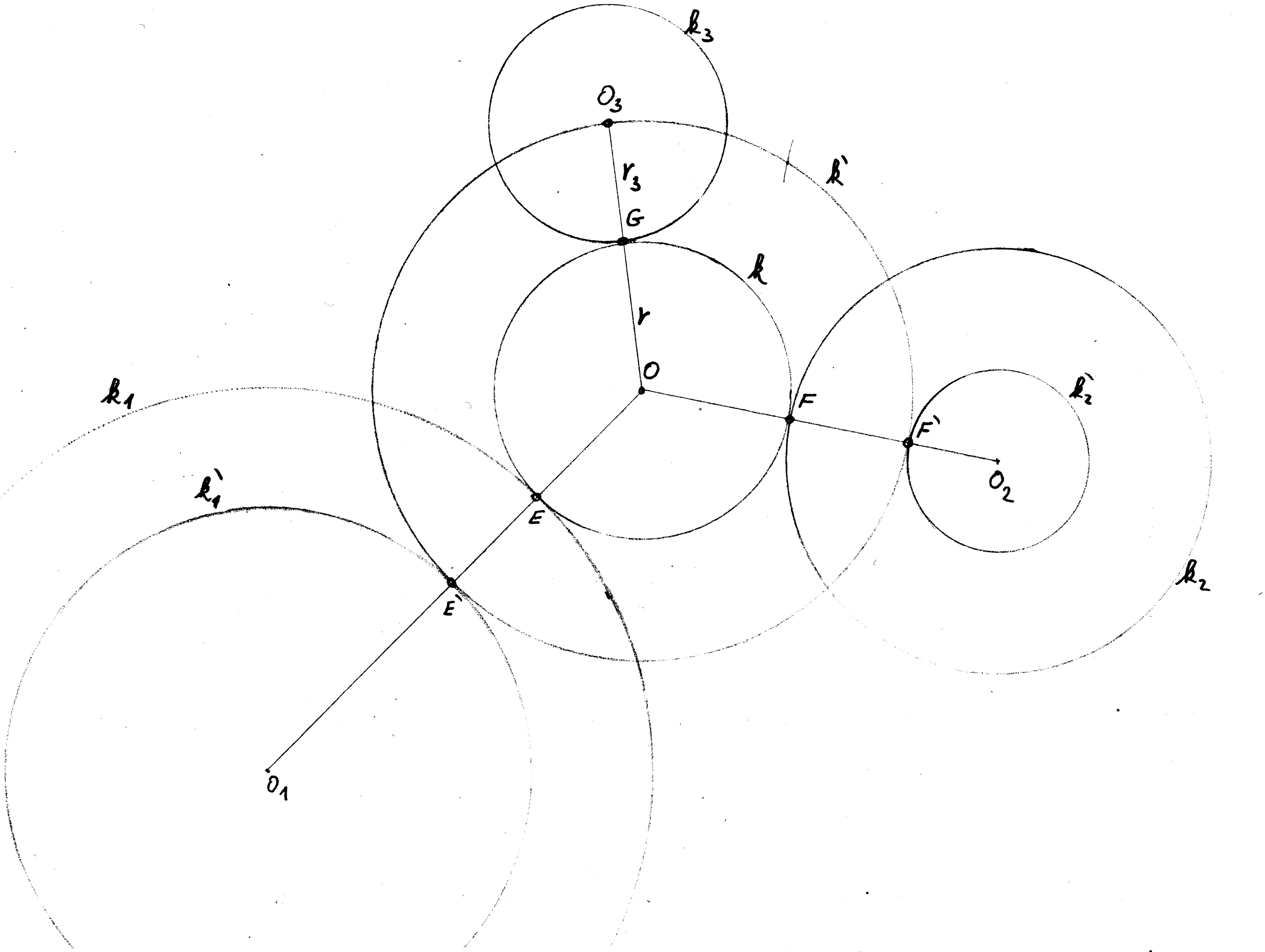
∞ mnogo rješenja



(10.) Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date kružnice.

Analiza

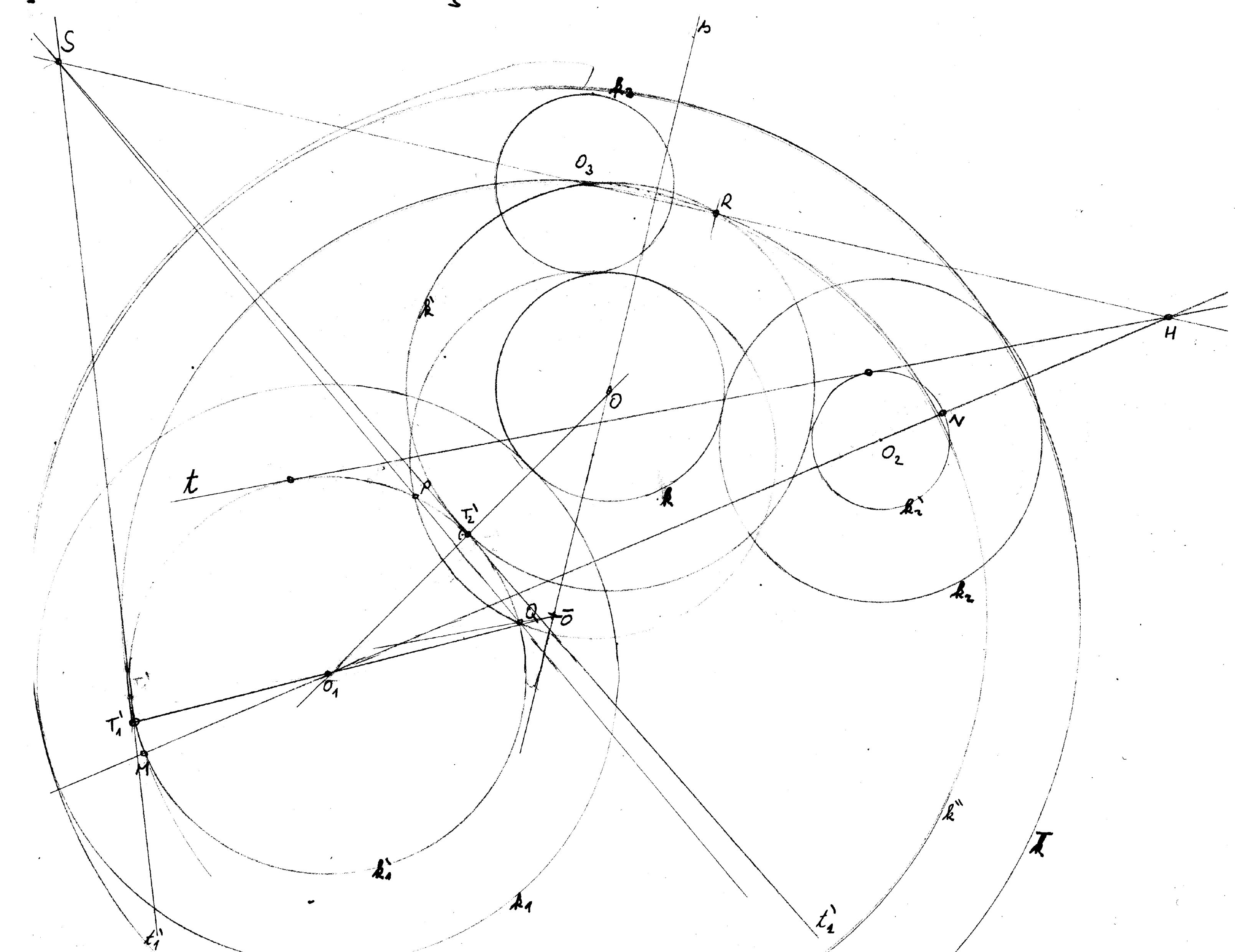
Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O, r)$ tražena kružnica koja dodiruje date kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ redom u tačkama E, F i G. Također pretpostavimo da je $r_3 < r_2 < r_1$. Primjetimo da je $O_1 - E - O$, $O_2 - F - O$ i $O_3 - G - O$. Posmatrajmo kružnicu $k'(O, r + r_3)$. Ova kružnica prolazi kroz tačku O_3 i siječe duži O_1O i O_2O redom u tačkama E' i F'. Ako sa k_1' i k_2' označimo redom kružnice $k_1'(O_1, r_1 - r_3)$ i $k_2'(O_2, r_2 - r_3)$ tada imamo da kružnica k' dodiruje kružnice k_1' i k_2', redom u tačkama E' i F'. Kako kružnice k_1' i k_2' možemo konstruisati i imamo tačku O_3 to nije teško konstruisati kružnicu k' (6. Apolonijev problem). Poslije kružnice k' traženu kružnicu k možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$
2. $k_1'(O_1, r_1 - r_3)$
3. $k_2'(O_2, r_2 - r_3)$
4. $p(O_1, O_2)$
5. presječne tačke M i N prave $p(O_1, O_2)$ s kružnicama k_1' i k_2'
   $k_1' \cap p(O_1, O_2) = \{M\}$
   $k_2' \cap p(O_1, O_2) = \{N\}$: $M - O_1 - O_2 - N$
6. zajedničku tangentu t kružnica k_1' i k_2'
7. $p(O_1, O_2) \cap t = \{H\}$, pravu $p(H, O_2)$
8. tačku R na pravoj $p(H, O_2)$ tako da je $HR = \dfrac{HM \cdot HN}{HO_3}$
9. simetralu s duži O_3R
10. kružnicu $k_3'(O_3', O_3'O_3)$, O_3' proizvoljna tačka prave s ali takva da kružnica k_3' siječe datu kružnicu k_1' u tačkama P i Q
11. $p(P, Q) \cap p(H, O_3) = \{S\}$
12. iz tačke S tangentu t_1' na kružnicu k_1'
13. $t_1' \cap k_1' = \{T_1'\}$, $k_1' \cap k(S, S$ … $= \{T_1', T_2'\}$
14. $s \cap p(O_1, T_1') = \{\bar{O}\}$
    $s \cap p(O_1, T_2') = \{O\}$
15. $k' = k(O, OT_2')$, $k'' = k(\bar{O}, \bar{O}T_1')$
16. $k(O, OO_1 - r)$, $\bar{k}(\bar{O}, \bar{O}T_1' + r_3)$

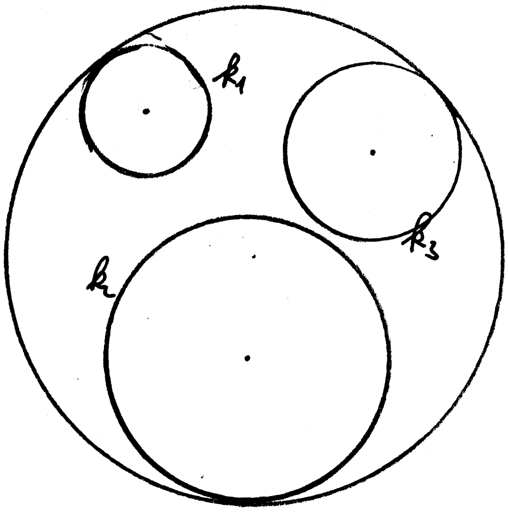


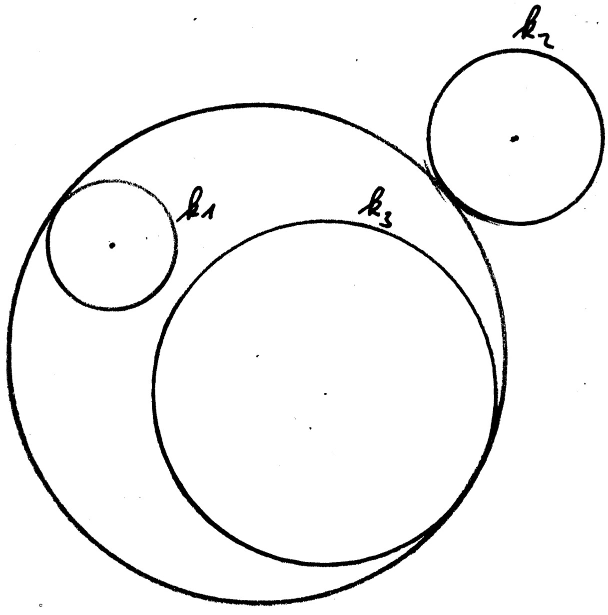
Dokaz

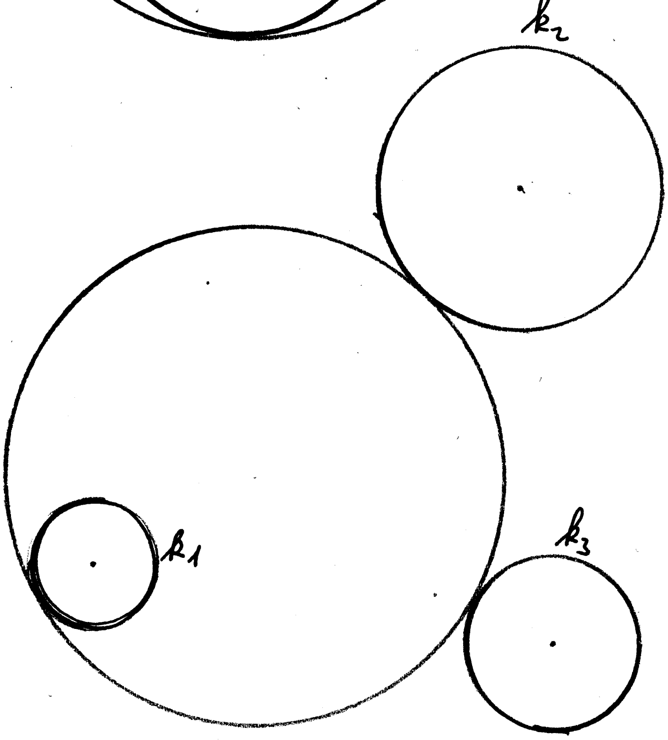
Da konstruisane kružnice k i k dodiruju date kružnice k_1, k_2 i k_3 slijedi iz analize i konstrukcije

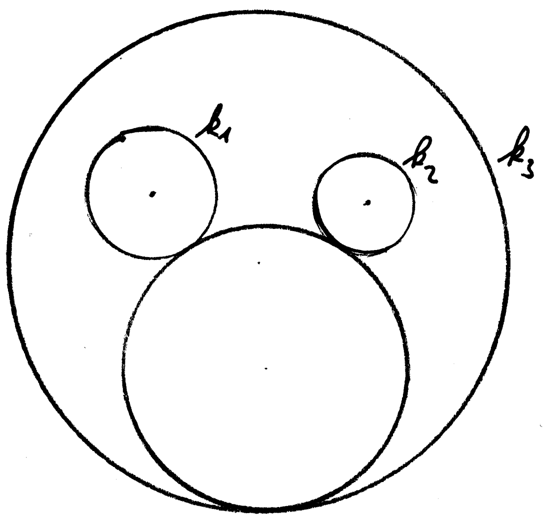
Diskusija

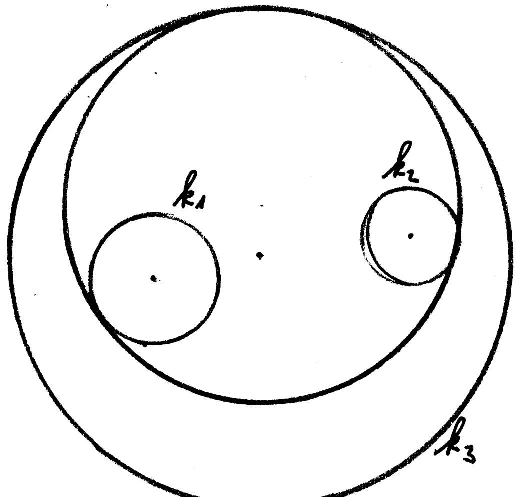
Nacrtaćemo neke od mogućih slučajeva (ukupno ih ima 32).

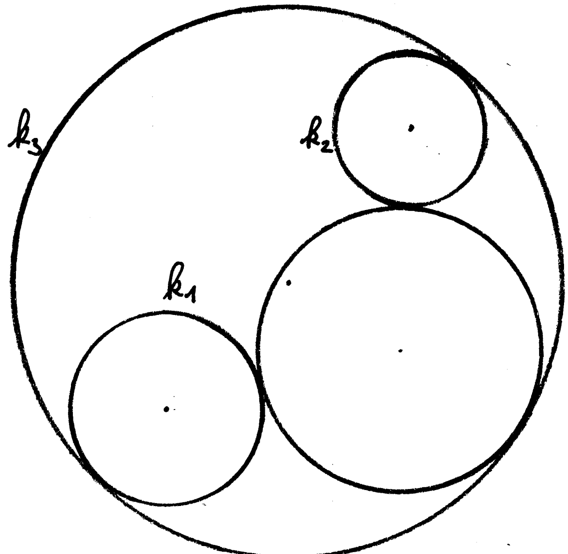












Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

R: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(S,r)$ tražena kružnica koja dodiruje datu pravu t u datoj tački T i koja dodiruje datu kružnicu $k_1(S_1,r_1)$ u tački P. Primjetimo da je $p(S,T)\perp t$ i da je $S-P-S_1$ (zato što je P dodirna tačka kružnica k i k_1). Neka je n prava koja prolazi kroz S_1 i $n\perp t$. Označimo sa $\{R\}=n\cap t$ i $\{M,N\}=n\cap k_1$ tako da je $R-M-N$.

Pokažimo da duž SS_1 siječe duž TN u tački P.

Posmatrajmo trouglove $\triangle PNS_1$ i $\triangle PTS$.

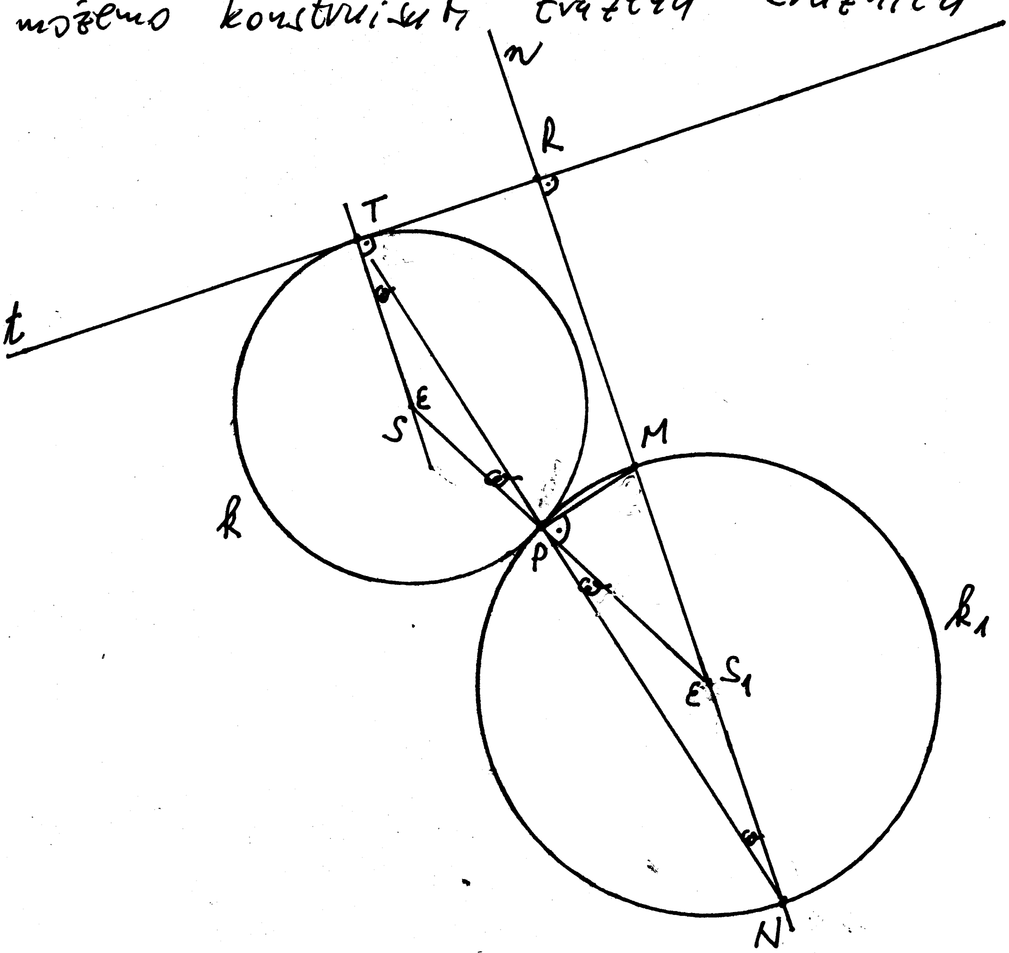
$p(S,T)\parallel n$ i $p(S,S_1)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle TSP \cong \sphericalangle NS_1P = \varepsilon$

$\triangle SPT$ jkk $\Rightarrow \sphericalangle STP \cong \sphericalangle SPT = \omega$ i $\sphericalangle S_1NP \cong \sphericalangle NPS_1 = \omega$

$p(S,S_1)$, $P\in SS_1$, $\sphericalangle SPT = \sphericalangle S_1PN = \omega \Rightarrow$ uglovi $\sphericalangle SPT$ i $\sphericalangle NPS_1$ su unakrsni uglovi $\Rightarrow NT\cap SS_1=\{P\}$.

Kako pravu n možemo konstruisati to možemo konstruisati i tačku P a time i tačku S ($\{S\}$ = simetrala duži $PT\cap p(S,T)$)

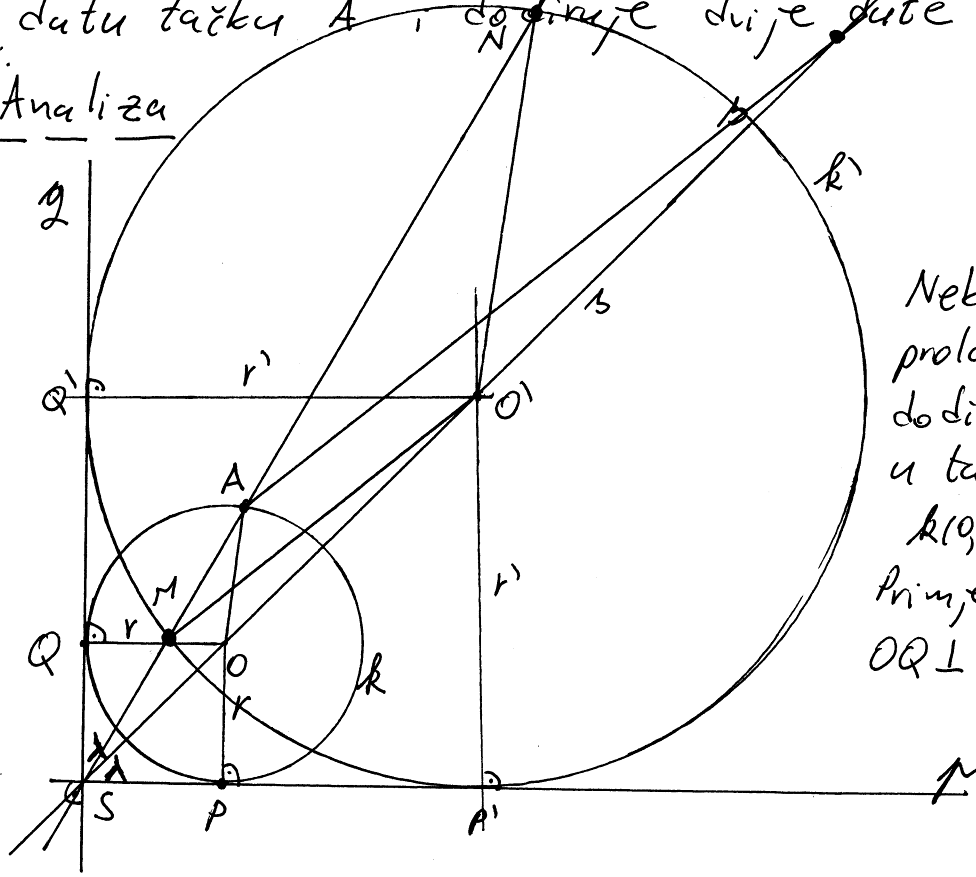
Sad možemo konstruisati traženu kružnicu $k(S,ST)$.



(#) Date su prave p i g, $p \perp g$ i data je tačka A tako da $A \notin p$ i $A \notin g$. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku A i dodiruje dvije date prave p i g.

Rj.

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je k traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje prave p i g redom u tačkama P i Q. $k(O, r)$

Primijetimo da je $OP \perp p$ i $OQ \perp g$. Kako je $p \perp g$ imamo:

$$\left.\begin{array}{l} OP \cong QS \\ OQ \cong PS \\ OS \cong OS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle POS \cong \triangle SOQ$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle PSO \cong \measuredangle OSQ = \lambda$$

Prema tome tačka O se nalazi na simetrali s ugla $\measuredangle pSg$.

Neka je $k'(O', r')$ krug čiju smo tačku O' uzeli proizvoljno na pravoj s. Označimo sa M i N tačke presjeka $p(S, A)$ sa krugom k', a neka su P' i Q' ortogonalne projekcije tačke O' na prave p i g.

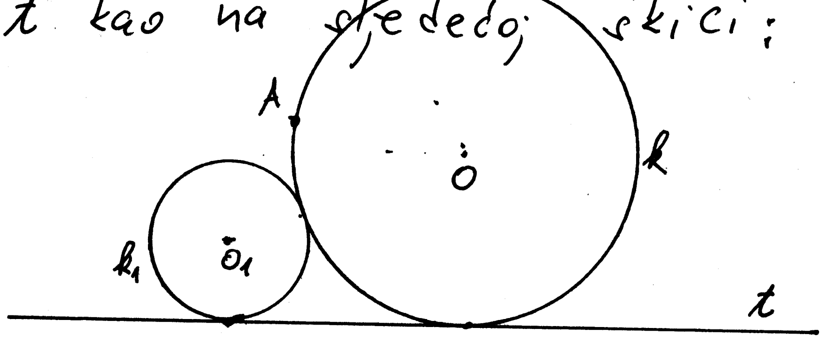
$$\left.\begin{array}{l} O'Q' \parallel OQ \overset{T.o\,T.o}{\Longrightarrow} \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SQ'}{SQ} = \dfrac{r'}{r} \\ O'P' \parallel OP \overset{T.o\,T.o}{\Longrightarrow} \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SP'}{SP} = \dfrac{r'}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

kružnica k' je dobijena iz kruga k homotetijom sa koeficijentom $\dfrac{r'}{r}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow O'N \parallel OA$

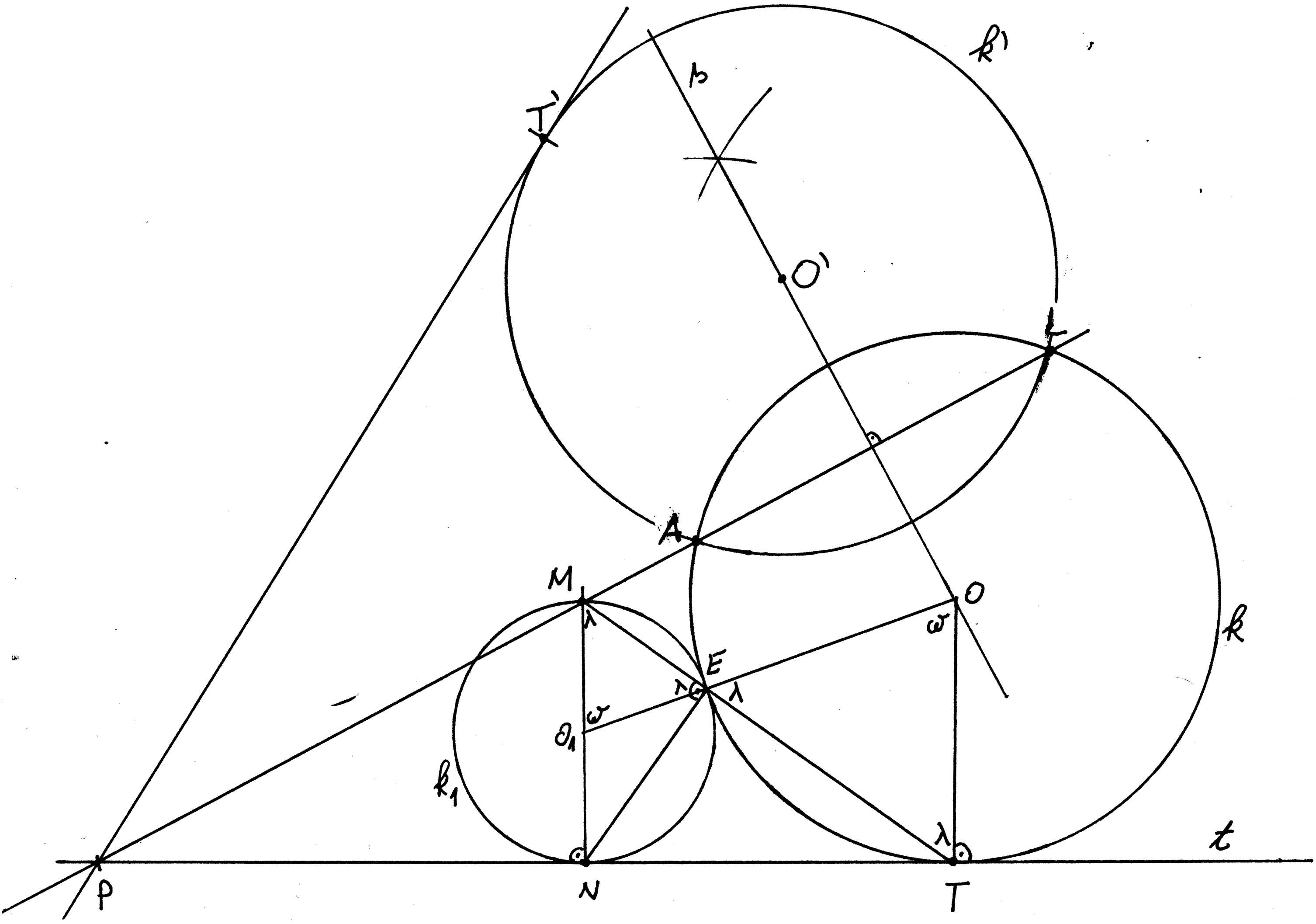
Kružnicu k sad možemo konstruisati.

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$, prava t i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krug k_1 i pravu t kao na sljedećoj skici:



Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O,r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug $k_1(O_1, r_1)$ u tački E i dodiruje datu pravu u tački T. Dalje, neka dati krug k_1 dodiruje pravu t u tački T. Kako je E dodirna tačka krugova primjetimo odmah da je O_1-E-O. Primjetimo isto tako da je

$O_1N \perp t$ i $OT \perp t \Rightarrow p(O_1,N) \parallel p(O,T)$.

$p(O_1,N) \parallel p(O,T)$ i $p(O_1,O)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle MO_1E = \measuredangle TOE = \omega$

$MO_1 \cong O_1E = r_1 \Rightarrow \triangle MO_1E$ jkk sa osnovicom $ME \Rightarrow$

$(\{M,N\} = p(N,O_1) \cap k_1)$ $\Rightarrow \measuredangle O_1ME = \measuredangle O_1EM = \lambda$

Isto tako $OE \cong OT = r \Rightarrow \triangle OET$ jkk sa osnovicom ET

$\Rightarrow \measuredangle OET \cong \measuredangle OTE = \lambda$

$p(O_1,O)$ je prava koja sadrži dvije stranice ovog trougla i njihov vrh E, pa kako je $\measuredangle O_1EM \cong \measuredangle OET = \lambda$ to je $M-E-T$.

Posmatrajmo trouglove $\triangle MNE$ i $\triangle MNT$

$\left.\begin{array}{l} \measuredangle NEM \cong \measuredangle MNT = 90° \\ \measuredangle EMN \cong \measuredangle TMN = \lambda \\ \measuredangle MNE \cong \measuredangle NTM \text{ (kao treći ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{slič. UUU}} \triangle MNE \sim \triangle MNT$

$\Downarrow$

$$\frac{MN}{MT} = \frac{ME}{MN} \Rightarrow MN^2 = ME \cdot MT \quad ...(1)$$

Posmatrajmo pravu $p(M,A)$

Neka je $\{A,L\} = p(M,A) \cap k$ i $\{P\} = p(M,A) \cap t$

Primjetimo (potencija tačke iz M) da je $ME \cdot MT = MA \cdot ML \quad ...(2)$

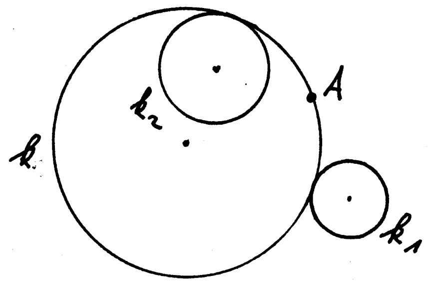
(1) i $(2) \Rightarrow MA \cdot ML = MN^2 \Rightarrow ML = \frac{MN^2}{MA}$

Kako možemo konstruisati tačke M, A i N to sad nije teško konstruisati i tačku L.

Neka je s simetrala duži AL i $O' \in s$ proizvoljna tačka na simetrali. Posmatrajmo krug $k'(O', r')$. Neka je $p(P,T')$ tangenta iz tačke P na krug k', $T' \in k'$. Primjetimo da je $(PT')^2 = PA \cdot PL$ i $PT^2 = PA \cdot PL \Rightarrow PT' \cong PT$.

Kako tačku T' možemo konstruisati to sad nije teško dobiti i tačku T, pa kako imamo A, L i T to traženi krug k nije teško konstruisati.

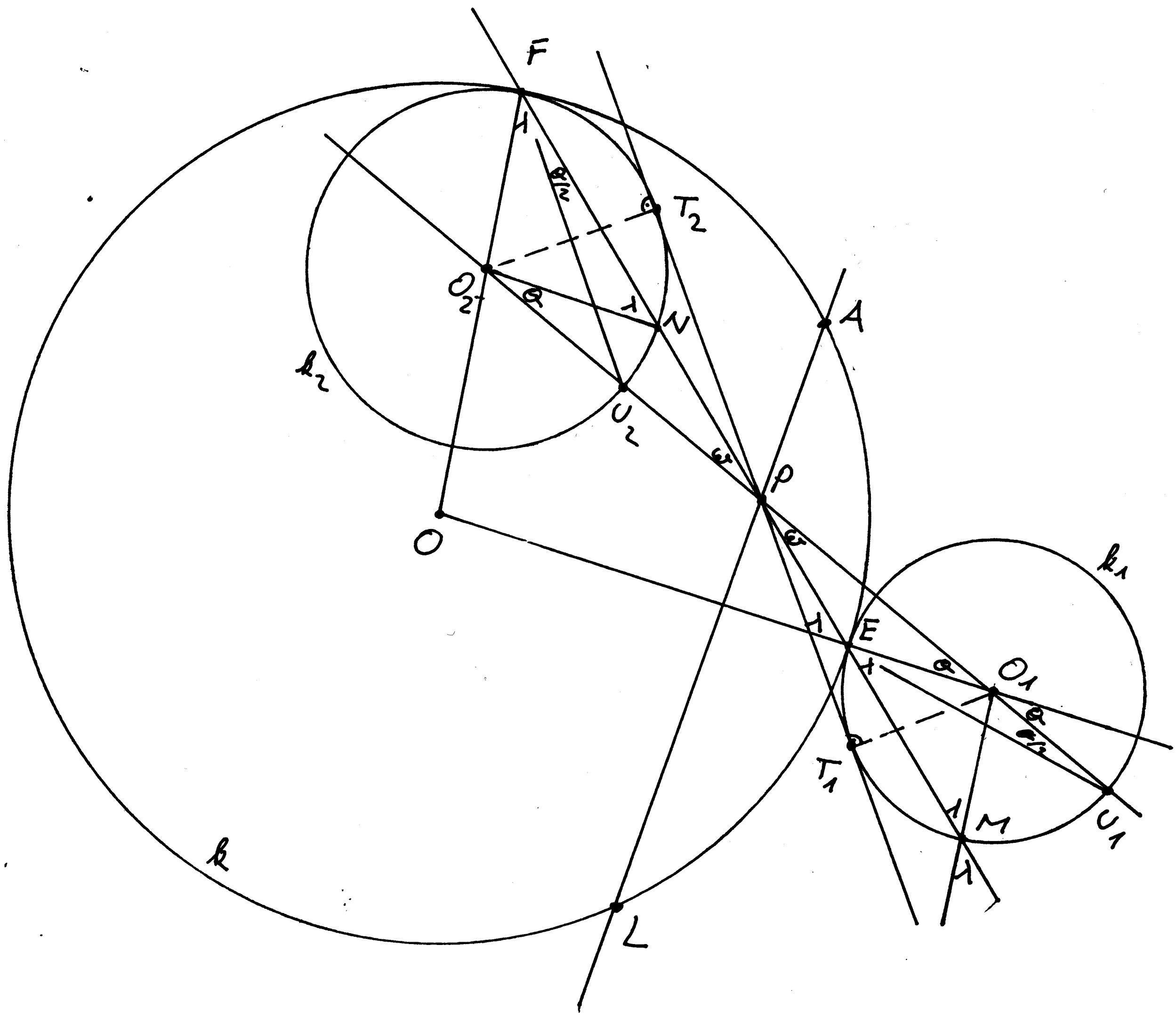
(#) Dati su krugovi $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na sljedećoj skici:



Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O,r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje date krugove $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ redom u tačkama E i F. Kako su E i F dodirne tačke krugova primjetimo da imamo sljedeća dva poretka $O-E-O_1$ i $O-O_2-F$.

Neka je $p(E,F)\cap k_2=\{F,N\}$ i $p(E,F)\cap k_1=\{E,M\}$: $F-N-E-M$,

$p(O_1,O_2) \cap k_1 = \{U_1\}$ i $p(O_1,O_2) \cap k_2 = \{U_2\}$: $O_2 - U_2 - O_1 - U_1$,

$\{P\} = p(O_1,O_2) \cap p(E,F)$

(kako O_1, O_2, E i F pripadaju nekim od krugova k_1 i k_2 primijetimo da je poredak $U_2 - P - O_1$ i $N - P - E$.

Trouglovi ΔO_1EM, ΔOEF i ΔO_2FN su jkk pa imamo

$$\measuredangle O_1EM \cong \measuredangle O_1ME \cong \measuredangle OEF \cong \measuredangle OFN \cong \measuredangle O_2FN \cong \measuredangle O_2NF = \lambda$$

$\Rightarrow p(O,O_1) \parallel p(O_2,N)$ i $p(O_1,M) \parallel p(F,O)$

(imamo podudarne uglove na transferzali $p(E,F)$)).

Označimo sa θ ugao $\measuredangle NO_2U_2$. To je centralni periferizki ugao nad tetivom NU_2. Njemu odgovara periferizki ugao $\measuredangle U_2FN = \frac{\theta}{2}$.

Kako je $p(O_2,N) \parallel p(E,O_1)$ i $p(O_1,O_2)$ njihova transferzala imamo $\measuredangle NO_2U_2 \cong \measuredangle PO_1E = \theta \Rightarrow \measuredangle O_1U_1E = \frac{\theta}{2}$.

Sad možemo pokazati da su ΔFU_2P i ΔU_1EP slični

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle U_1PE \cong \measuredangle FPU_2 = \omega \\ \measuredangle PU_1E \cong \measuredangle PFU_2 = \frac{\theta}{2} \\ \measuredangle U_1EP \cong \measuredangle FU_2P \end{array}\right\} \overset{\text{stv. UUU}}{\Longrightarrow} \Delta PU_1E \sim \Delta PFU_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PE}{PU_2} = \frac{PU_1}{PF} \Rightarrow PE \cdot PF = PU_1 \cdot PU_2 \quad \dots(1)$$

Neka je $p(P,A) \cap k = \{A, L\}$.

Možemo primijetiti $PA \cdot PL = PE \cdot PF \quad \dots(2)$

(1) i $(2) \Rightarrow PU_1 \cdot PU_2 = PA \cdot PL \Rightarrow PL = \frac{PU_1 \cdot PU_2}{PA}$

Da bi smo konstruisali tačku L potrebno je konstruisati tačku P. Primijetimo $\Delta PO_1E \sim \Delta PO_2N$ i $\Delta PO_1M \sim \Delta PFO_2$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{PE}{PN} = \frac{O_1E}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2} \\ \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{PM}{PL} = \frac{O_1M}{O_2F} = \frac{r_1}{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

P je centar homotetije koja kružnicu k_1 preslikava u k_2 sa koeficijentom $\frac{r_1}{r_2}$

Neka je $p(P,T_1)$ tangenta na kružnicu k_1. Kako je P centar homotetije $p(P,T_2)$ je tangenta i na kružnicu k_2. Sad tačku P možemo konstruisati, pa time i tačku L. Imamo tačke A, L i kružnicu k_1 pa smo ovaj problem sveli na 3. Apolonijev problem.