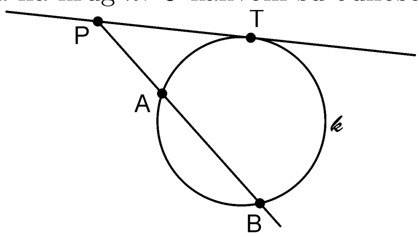
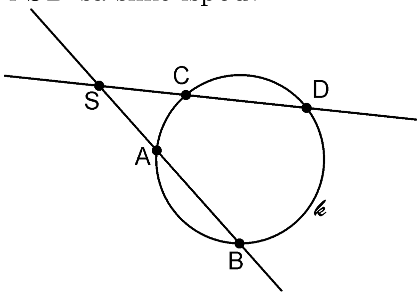
13 Elementarni zadaci: Krug i konstruktivni zadaci u kojima se pojavljuje i krug.

Elementarna pitanja:

1. Neka je prava $p(P,T)$ tangenta na krug k. U kakvom su odnosu duži PT, PA i PB sa slike ispod?



2. Neka su date dvije prave koje se sijeku u tački S i koje sijeku krug k u tačkama A, B, C i D. U kakvom su odnosu duži SA, SB, SC i SD sa slike ispod?



1. Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N,M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

2. Date su prave t, q i s takve da $q \perp t$, $s \perp t$, $s \cap t = \{Q\}$ i $q \cap t = \{P\}$. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ takvi da je $O_1 \in s$, $s \cap k_1 = \{M, N\}$ i $Q - M - N$, $O_2 \in q$, k_2 dodiruje krug k_1 u tački E i k_1 dodiruje pravu t u tački P. Dokazati da je $PN \cap O_1O_2 = \{E\}$.

3. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ koji se dodiruju u tački E i dat je krug $k_3(O_3, r_3)$ takav da siječe krug k_1 u tačkama P i Q, a krug k_2 u tačkama M i N. Ako sa S označimo presjek pravih $p(P,Q)$ i $p(M,N)$ dokazati da je $p(S,E)$ tangenta na krug k_1 i na krug k_2.

4. Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

5. Date su dvije podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

6. Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Konstruktivni zadaci - Konstrukcija kruga.

7. Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dvije podudarne kružnice sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti.

8. Date su tačke P i Q, kružnica k i prava l. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu k u tačkama A i B, tako da je $p(A,B)||l$.

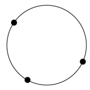
9. Dati je krug $k_1(S_1, r_1)$, prava t i tačka $T \in t$. Konstruisati krug $k(S,r)$ koji dodiruje krug k i koji dodiruje pravu t u tački T.

10. Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B)\|t$. Konstruisati krug kroz tačke A i B koja dodiruje datu pravu t.

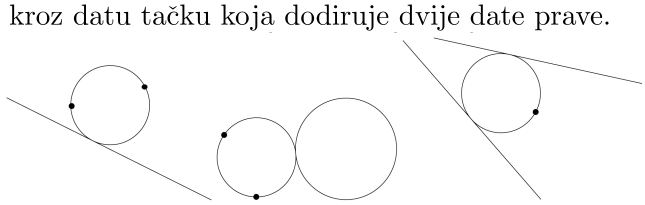
Apolonijev problem.

Apolonijev problem može se podjeliti na deset zasebnih problema:

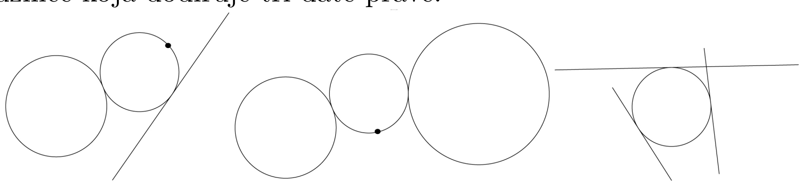
1. Konstrukcija kružnice kroz tri date tačke.



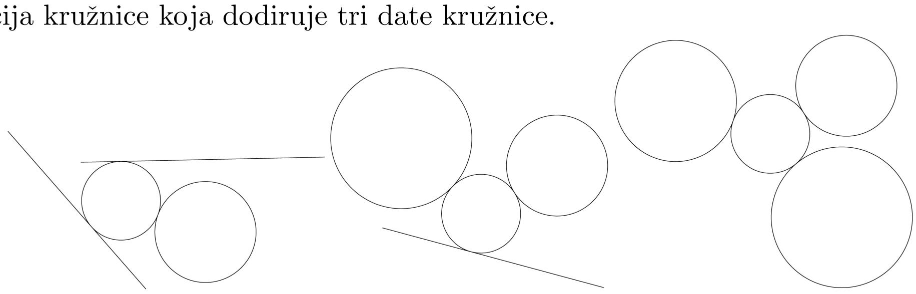
2. Konstrukcija kružnice kroz dvije date tačke koja dodiruje datu pravu.
3. Konstrukcija kružnice kroz dvije date tačke koja dodiruje datu kružnicu.
4. Konstrukcija kružnice kroz datu tačku koja dodiruje dvije date prave.



5. Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i datu kružnicu.
6. Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.
7. Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri date prave.



8. Konstrukcija kružnice koja dodiruje dvije date prave i datu kružnicu.
9. Konstrukcija kružnice koja dodiruje dvije date kružnice i datu pravu.
10. Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri date kružnice.

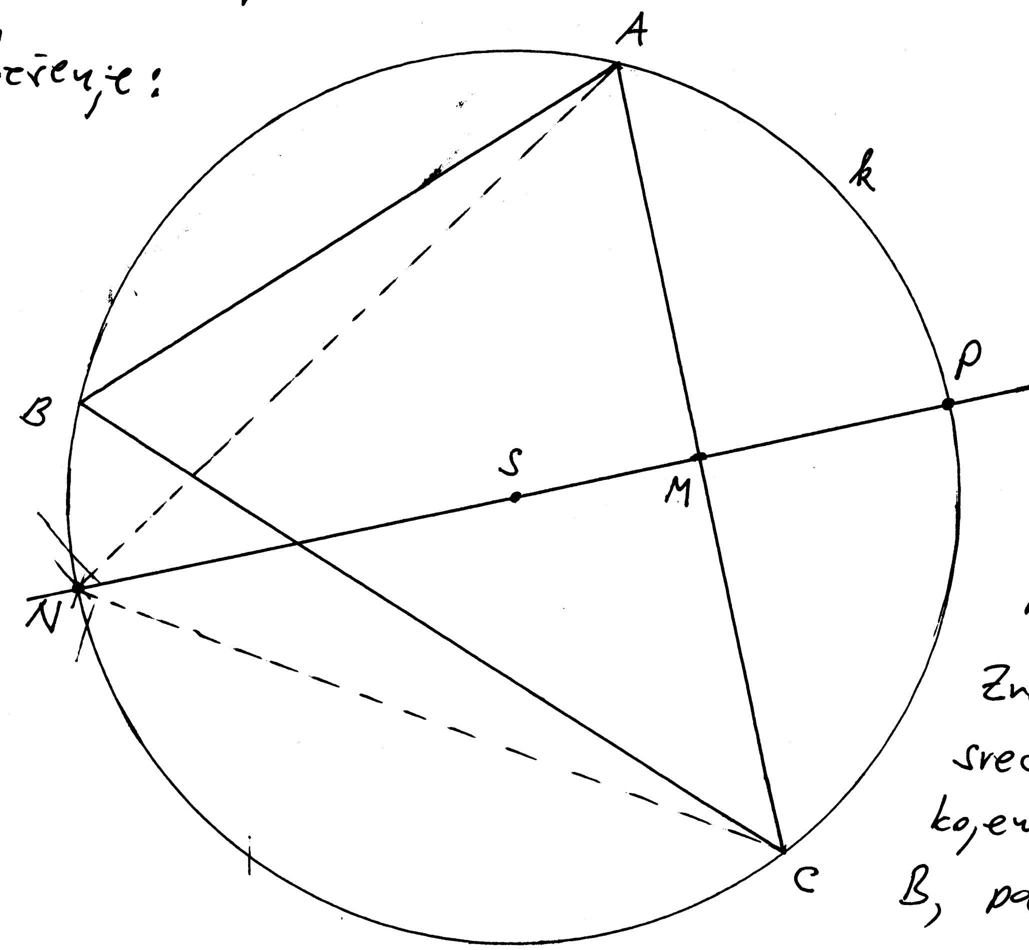


U analizi i konstrukciji Apolonijevog problema koristimo sljedeće oznake:
A, B, C date tačke.
k_1, k_2, k_3 date kružnice.
t_1, t_2, t_3 date prave.
T_1, T_2, T_3,... dodirne tačke tangenti na kružnice.
k, $\bar{k}$, $\bar{\bar{k}}$,... tražene kružnice.
E, F, G,... dodirne tačke kružnica.
L, M, N, U, V, Z,... dodirne tačke kružnice i prave.
P, Q, R, S, H, T,... presječne tačke pravih.
k', k'', k''',... pomočne kružnice.

Napomena: 5. Apolonijev problem se svodi na 2. Apolonijev problem. 6. Apolonijev problem se svodi na 3. Apolonijev problem. 8. Apolonijev problem sesvodi na 4. Apolonijev problem. 9. Apolonijev problem se svodi na 5. Apolonijev problem. 10. Apolonijev problem se svodi na 6. Apolonijev problem.

(#) Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla ΔABC, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka $\widehat{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačku preseka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\widehat{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \ (M \text{ sredina } AC) \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ANM \cong \Delta CNM$$

$$\Downarrow$$

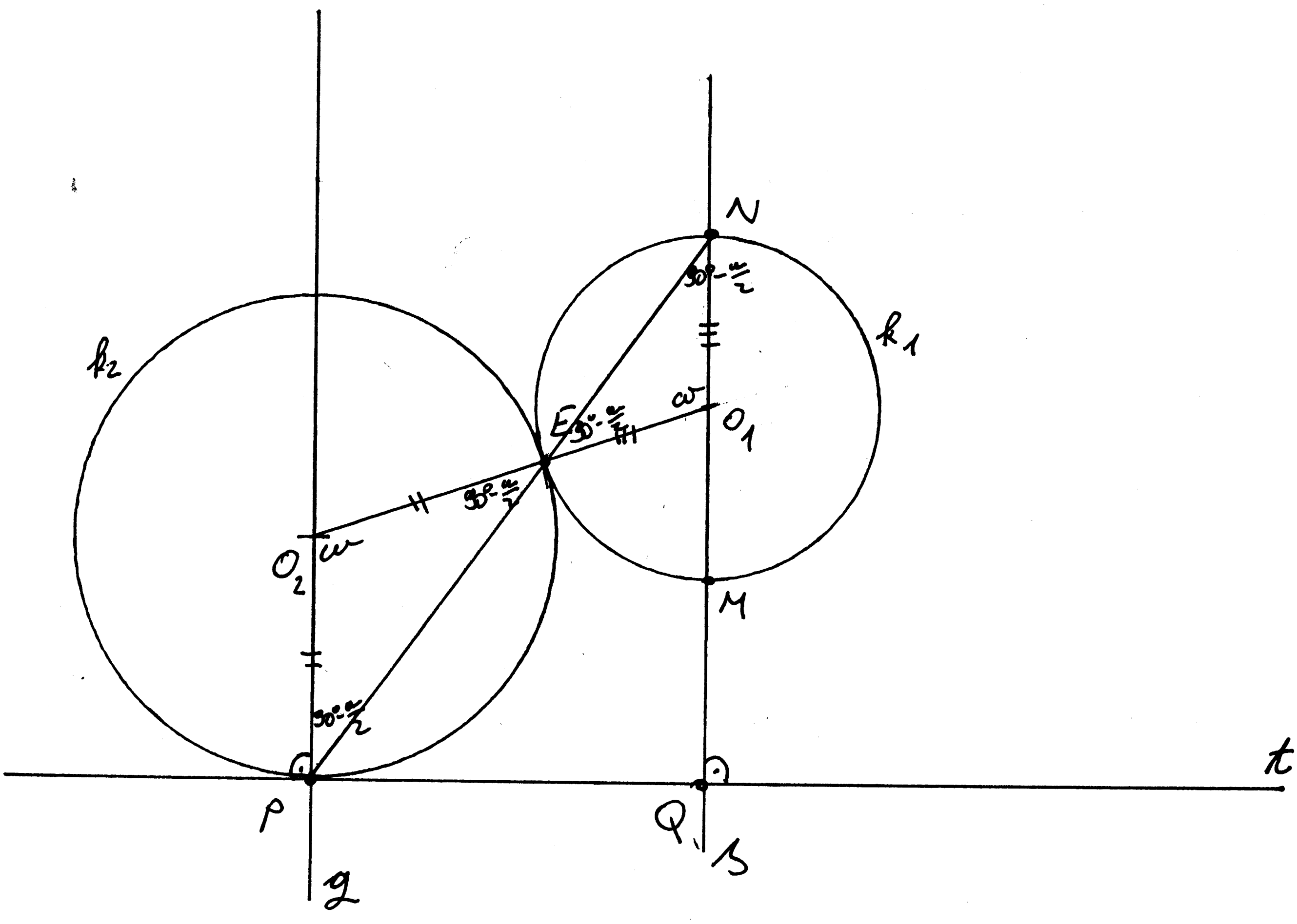
$$\sphericalangle AMN \cong \sphericalangle CMN = 90^\circ \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow$ NP je prečnik opisane kružnice.

(#) Date su prave t, g i s takve da $g \perp t$, $s \perp t$, $s \cap t = \{Q\}$ i $g \cap t = \{P\}$. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ takvi da $O_1 \in s$, $s \cap k_1 = \{M, N\}$ i $Q-M-N$, $O_2 \in g$, k_2 dodiruje krug k_1 u tački E i k_2 dodiruje pravu t u tački P. Dokazati da je $PN \cap O_1O_2 = \{E\}$.

Rj:



Prvo primijetimo kako je $g \perp t$ i $s \perp t$ to je $g \parallel s$. Dalje krugovi k_1 i k_2 se dodiruju u tački E pa imamo da $E \in p(O_1, O_2)$ i $O_1 - E - O_2$. Kako je $g \parallel s$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala to $\measuredangle PO_2O_1 \overset{\frown}{=} \measuredangle NO_1O_2 = \omega$.
Posmatrajmo trouglove $\triangle PO_2E$ i $\triangle NO_1E$.

$\triangle PO_2E$ jkk i $\measuredangle PO_2E = \omega \Rightarrow \measuredangle O_2PE \overset{\frown}{=} \measuredangle O_2EP = 90° - \frac{\omega}{2}$.

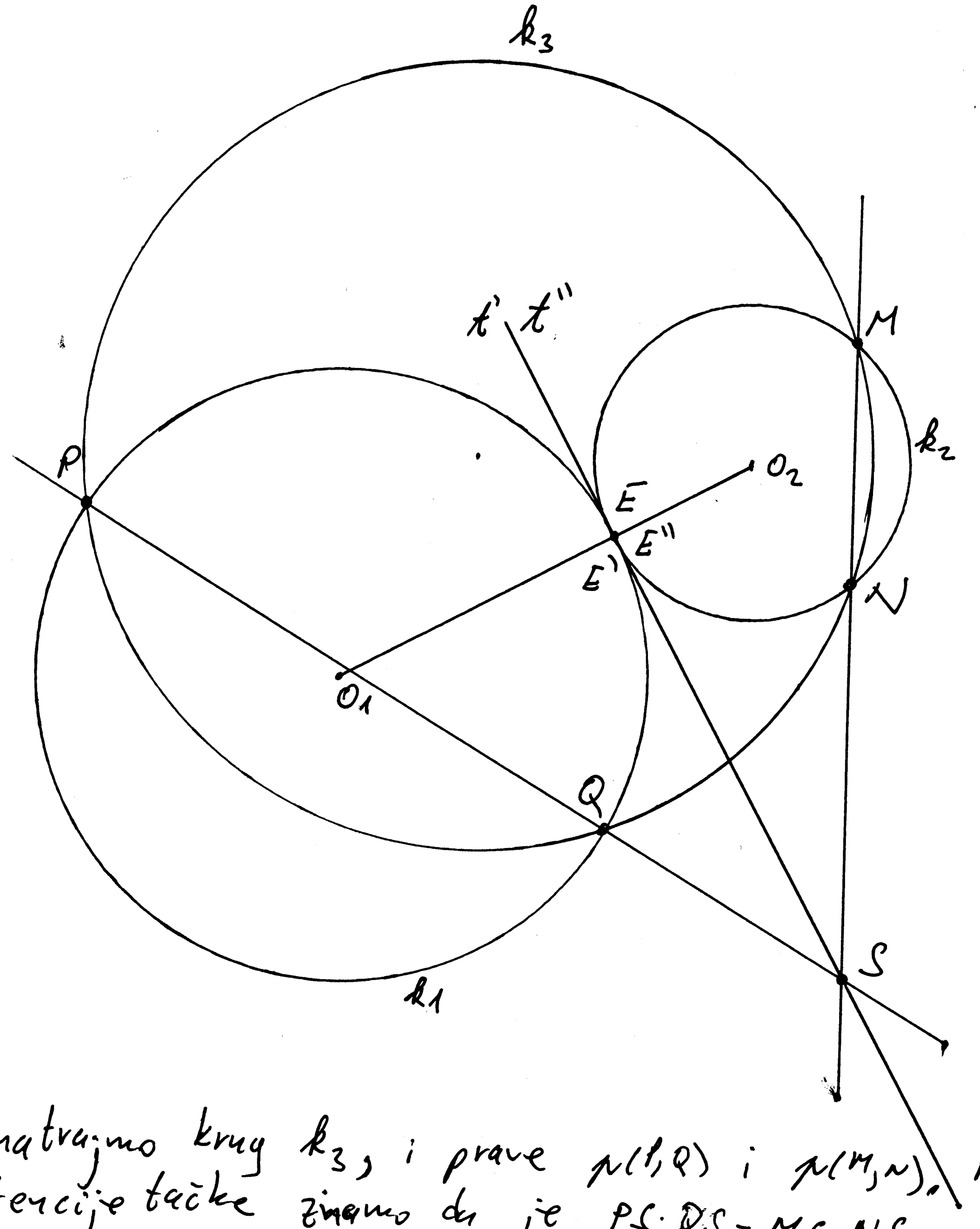
$\triangle EO_1N$ jkk i $\measuredangle NO_1E = \omega \Rightarrow \measuredangle NEO_1 = \measuredangle ENO_1 = 90° - \frac{\omega}{2}$

Na pravoj $p(O_1, O_2)$ imamo $E \in O_1O_2$ i $\measuredangle O_2EP \overset{\frown}{=} \measuredangle O_1EN = 90° - \frac{\omega}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow E \in p(P, N)$ tj. $O_1O_2 \cap PN = \{E\}$ q.e.d.

(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ koji se dodiruju u tački E i dat je krug $k_3(O_3, r_3)$ takav da siječe krug k_1 u tačkama P i Q, a krug k_2 u tačkama M i N. Ako sa S označimo presjek pravih $p(P,Q)$ i $p(M,N)$ dokazati da je $p(S,E)$ tangenta i na krug k_1 i na krug k_2.

Rj.



Posmatrajmo krug k_3, i prave $p(P,Q)$ i $p(M,N)$. Prema osobini potencije tačke znamo da je $PS \cdot QS = MS \cdot NS$. ...(1)

Iz tačke S možemo povući dvije tangente na krug k_1. Pa neka je t' tangenta na k_1 sa one strane prave $p(S,O_1)$ sa koje je tačka E i neka t' dodiruje k_1 u tački E'. Slično imamo i za k_2, pa neka je t'' tangenta na krug k_2 sa one strane prave $p(S,O_2)$ sa koje je tačka E i neka t'' dodiruje k_2 u tački E''.

Za k_1 $PS \cdot QS = SE'^2$

Za k_2 $MS \cdot NS = SE''^2$ $\Big\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} SE'^2 \cong SE''^2 \Rightarrow SE' \cong SE''$

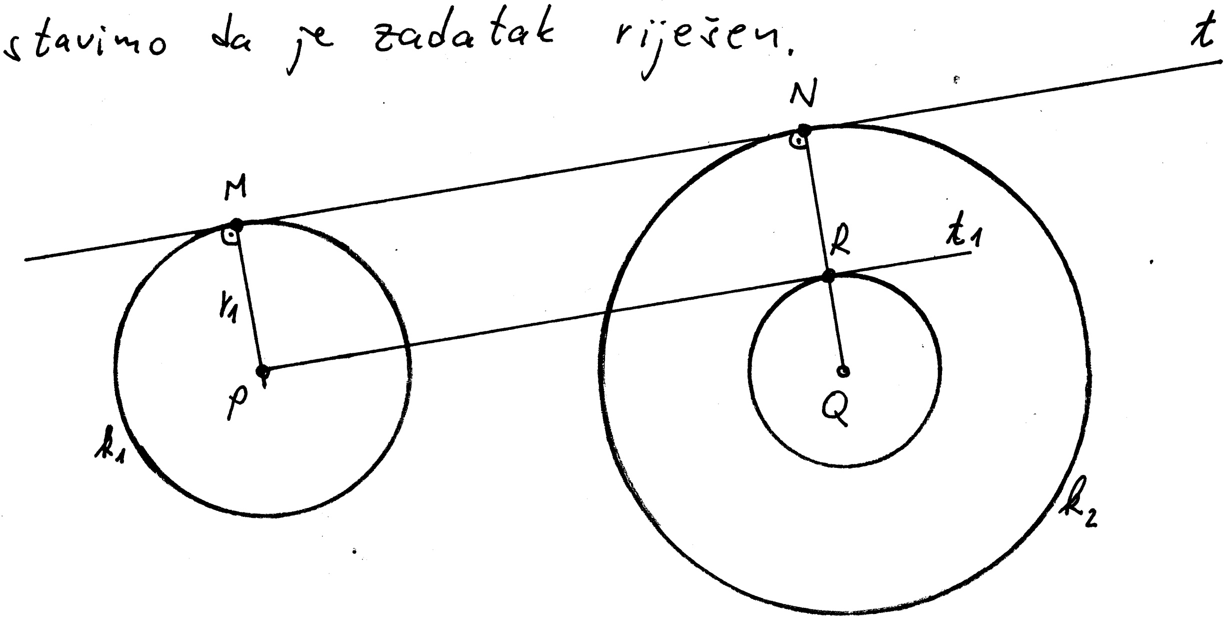
Prave $p(S,E')$ i $p(S,E'')$ ne mogu biti dvije različite prave jer bi tada razdvajali krugove k_1 i k_2 (krugovi ne bi imali zajedničku tačku E) $\Rightarrow p(S,E') \equiv p(S,E'') \Rightarrow \boxed{E' = E'' = E}$

$p(S,E)$ jest tang. na k_1 i na k_2 š.e.d.

(#) Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta ($r_2 > r_1$). Označimo sa M tačku dodira k_1 i t, a sa N tačku dodira k_2 i t.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $t_1 \ni P$ i $t_1 \cap NQ = \{R\}$ ($NQ > PM$).

Imamo da je $\square PRNM$ paralelogram (preciznije pravougaonik).

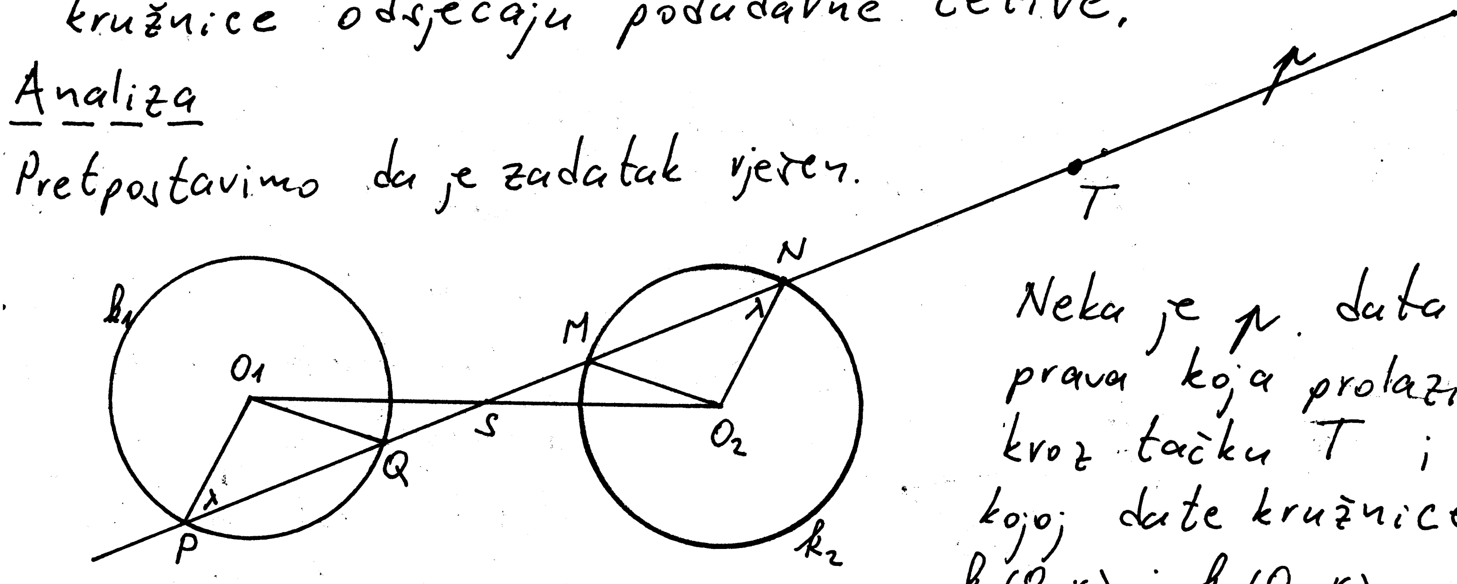
$QR = r_2 - r_1$, pa kako su tačke P i Q date mogu konstruisati tangentu t_1.

Tangenta t je paralelna sa t_1 i udaljena je od t_1 za dužinu r_1, pa je možemo konstruisati.

(#) Date su podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku T i kojoj date kružnice $k_1(O_1,r)$ i $k_2(O_2,r)$ odsjecaju podudarne tetive PQ i MN.

$\Delta PQO_1 \cong \Delta MO_2N$ (podud. SSS)

$\Downarrow$

$\measuredangle O_1PQ \cong \measuredangle MNO_2 = \lambda$. Neka je $\{S\} = p \cap O_1O_2$.

Sad imamo $\left.\begin{array}{l} \measuredangle O_1SP \cong \measuredangle NSO_2 \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle SPO_1 \cong \measuredangle SNO_2 = \lambda \\ PO_1 \cong NO_2 = r \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta PSO_1 \cong \Delta NSO_2$

$\Downarrow$

$O_1S \cong O_2S$.

Prema tome S je sredina duži O_1O_2 pa pravu p sad nije teško konstruisati.

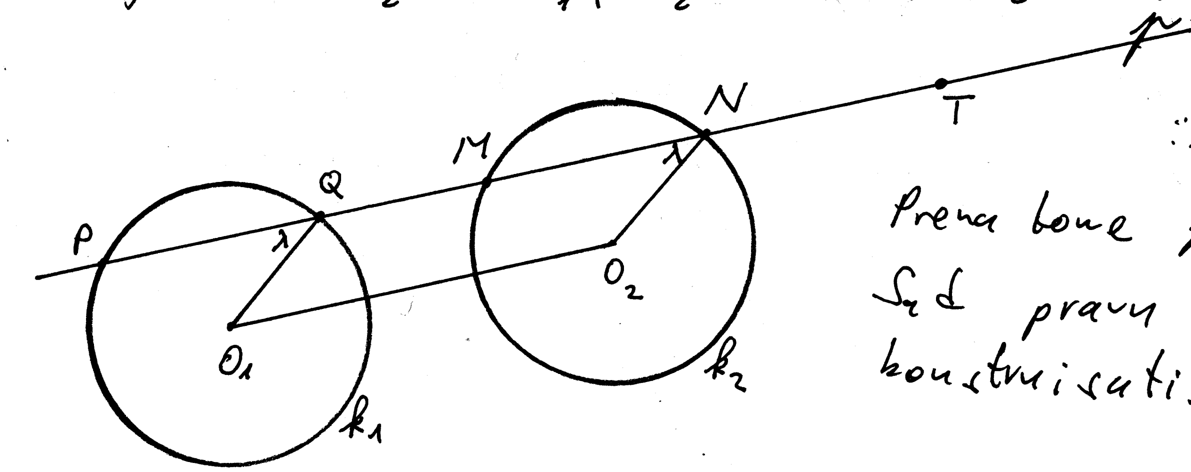
II način

Iz podudarnosti SSS $\Rightarrow \Delta PQO_1 \cong \Delta MNO_2$

$\Downarrow$

$\measuredangle O_1QP \cong \measuredangle O_2NM = \lambda$.

Kako je $O_1Q \cong O_2N$ i $O_1Q \parallel O_2N \Rightarrow \square O_1O_2NQ$ je paralelogram.



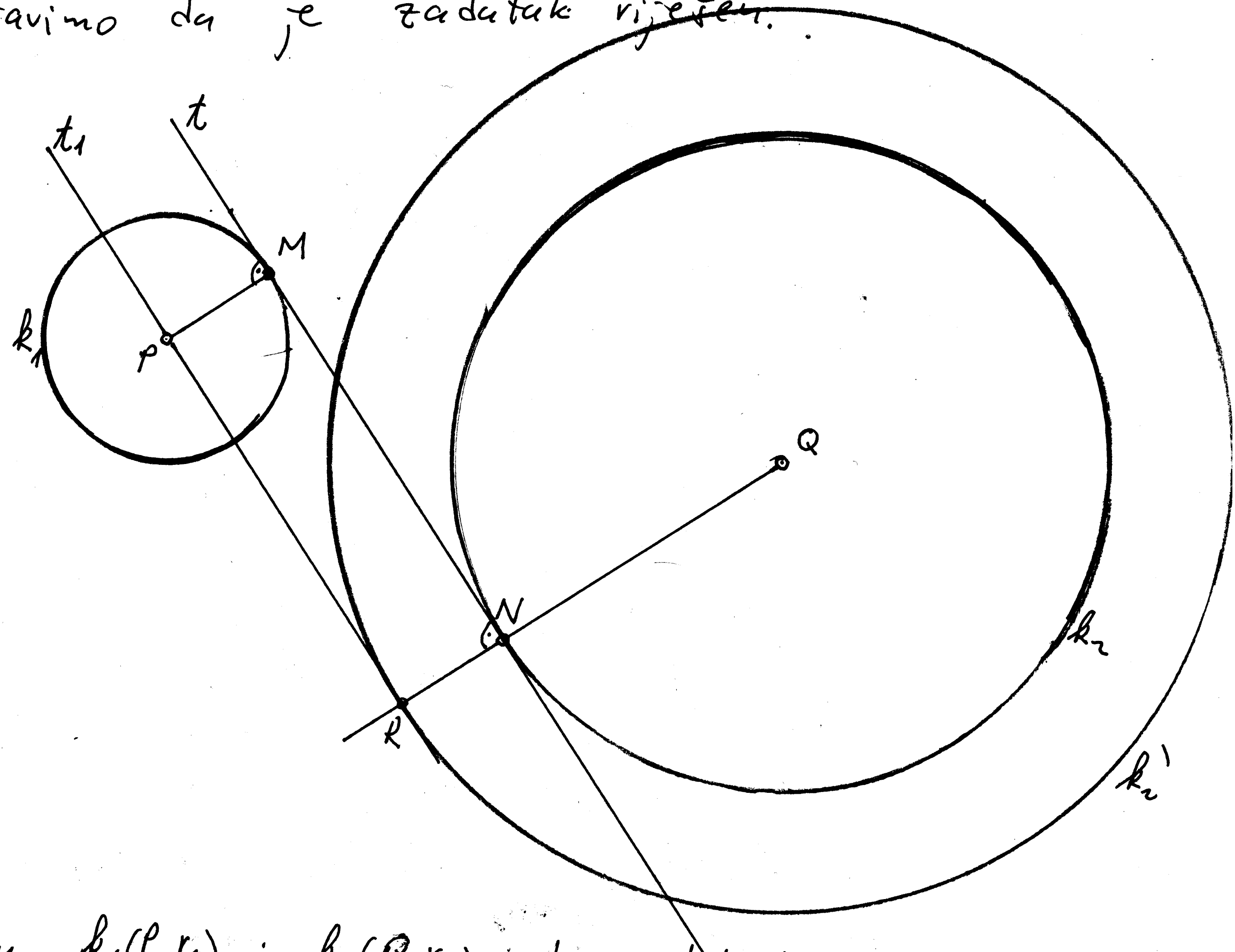
Prema tome $p \parallel O_1O_2$.

Sad pravu p možemo konstruisati.

Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

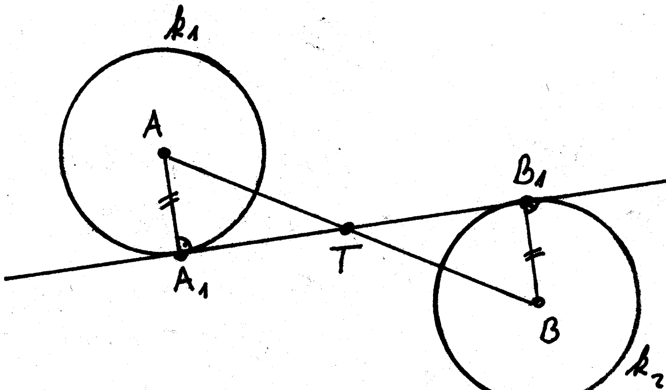
Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

(#) Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dvije podudarne kružnice sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

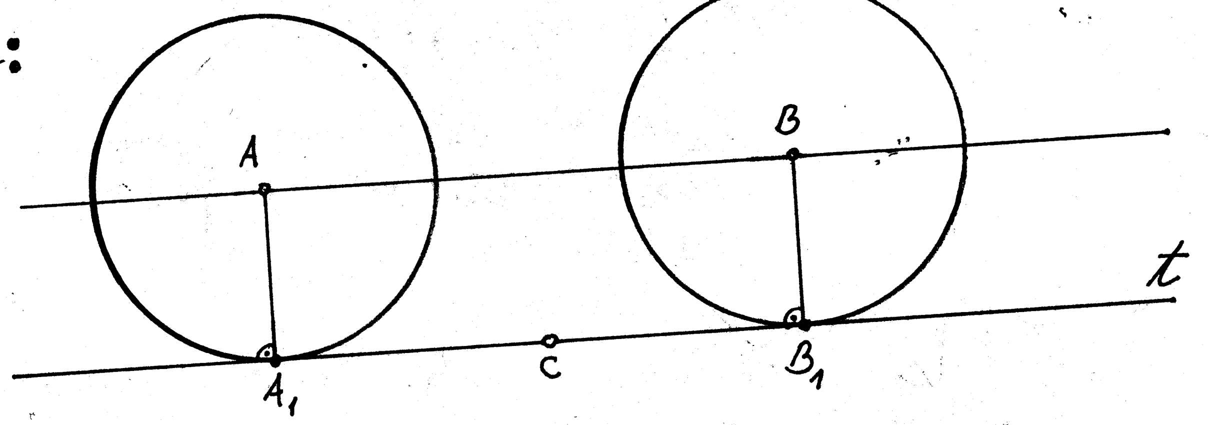


Neka su date tri nekolinearne tačke A, B i C i dvije podudarne kružnice (kružnice koje imaju podudaran poluprečnik) k_1 i k_2 koje imaju zajedničku tangentu t u tačkama A_1 i B_1 i $C \in t$. Neka je $\{T\} = AB \cap t$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ATA_1 \cong \measuredangle BTB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle AA_1T \cong \measuredangle BB_1T = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle AA_1T \cong \triangle BB_1T \Rightarrow AT \cong BT$$

Kako $T \in t$ pravu t možemo konstruisati.
Kako su $AA_1 \perp t$ i $BB_1 \perp t$ kružnice k_1 i k_2 možemo konstruisati.

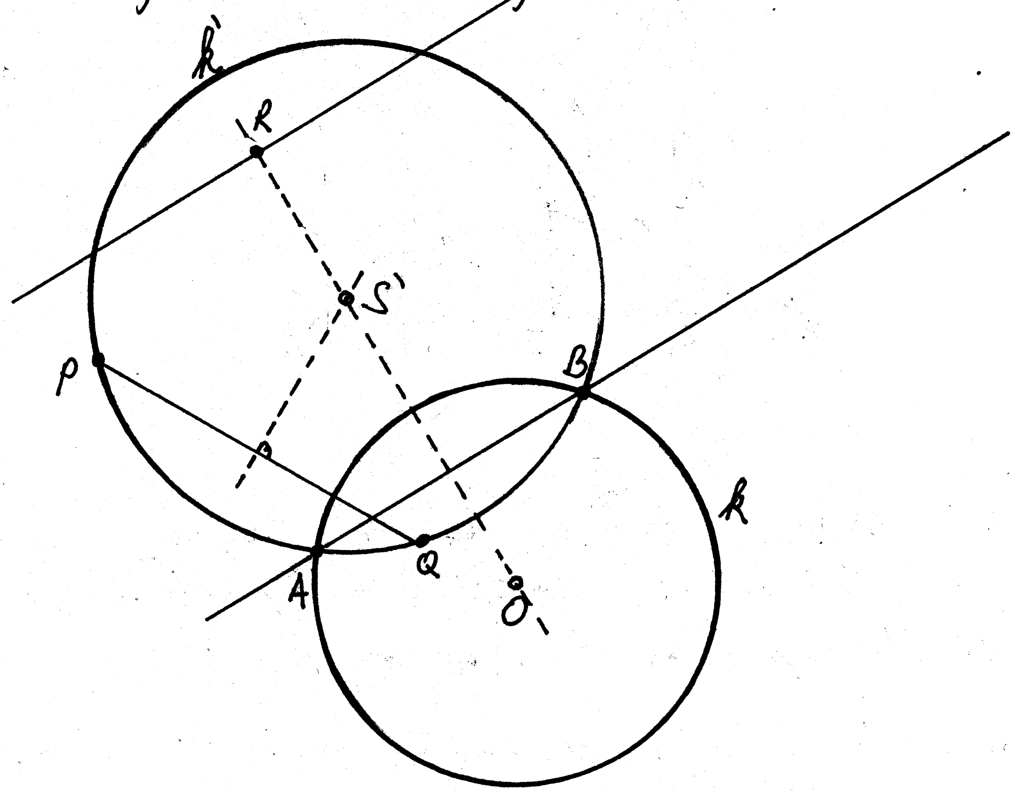
II rješenje:



(#) Date su tačke P i Q, kružnica k i prava l. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu k u tačkama A i B, tako da je $p(A,B) \parallel l$.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k'(S', r')$ kružnica koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu $k(O,r)$ u tačkama A i B, tako da važi $p(A,B) \parallel l$ (gdje je l data prava).

Kako je PQ tetiva kružnice k' to centar S' leži na simetrali duži PQ.

AB je tetiva kružnica k' i k pa centri S' i O leže na simetrali tetive AB. Kako je $p(A,B) \parallel l$ i $p(O,S') \perp p(A,B)$ to je i $p(O,S') \perp l$.

Označimo sa $\{R\} = l \cap p(O,S')$.

Kako je data prava l i centar O to tačku R možemo konstruisati. Centar S' leži na presjeku simetrale duži PQ i prave $p(R,O)$ pa ga možemo konstruisati. Sad možemo konstruisati i traženu kružnicu k'.

Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

R: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(S,r)$ tražena kružnica koja dodiruje datu pravu t u datoj tački T i koja dodiruje datu kružnicu $k_1(S_1,r_1)$ u tački P. Primjetimo da je $p(S,T) \perp t$ i da je $S-P-S_1$ (zato što je P dodirna tačka kružnica k i k_1). Neka je n prava koja prolazi kroz S_1 i $n \perp t$. Označimo sa $\{R\} = n \cap t$ i $\{M,N\} = n \cap k_1$ tako da je $R-M-N$.

Pokažimo da duž SS_1 siječe duž TN u tački P.

Posmatrajmo trouglove $\triangle PNS_1$ i $\triangle PTS$.

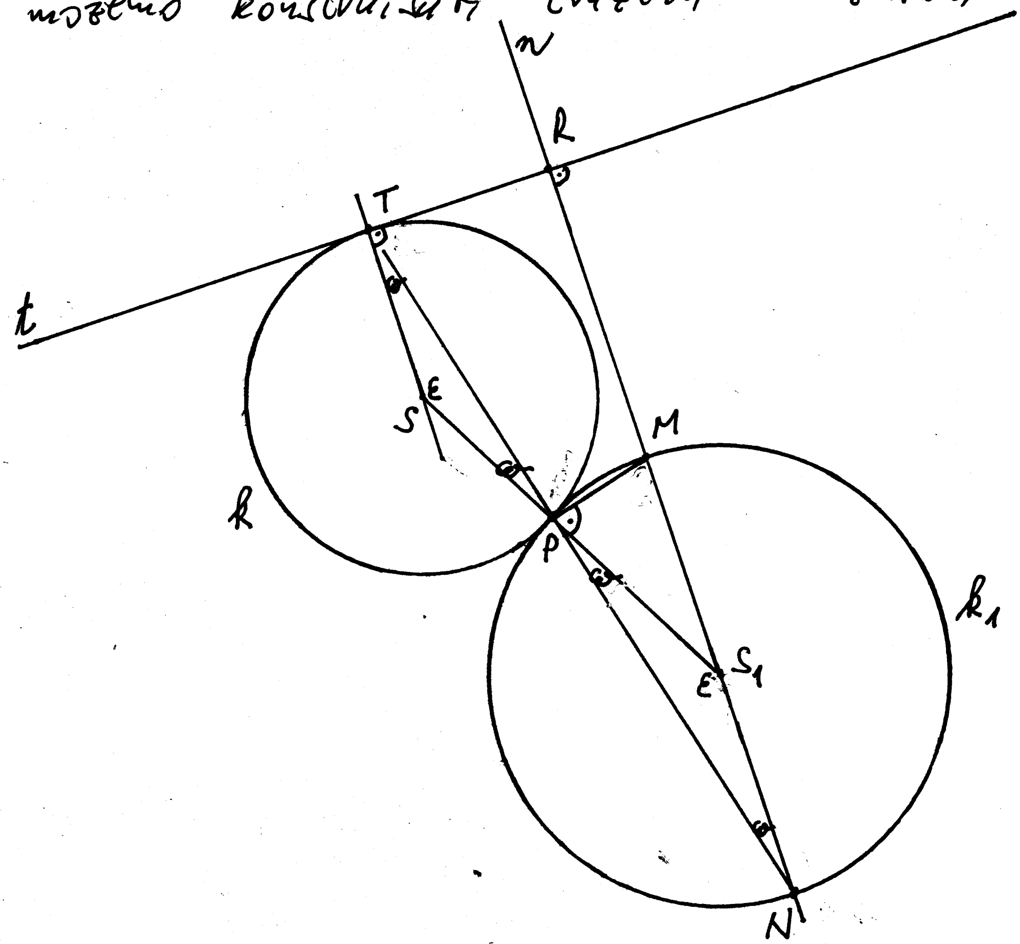
$p(S,T) \parallel n$ i $p(S,S_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TSP \cong \measuredangle NS_1P = \varepsilon$

$\triangle SPT$ jkk $\Rightarrow \measuredangle STP \cong \measuredangle SPT = \omega$ i $\measuredangle S_1NP \cong \measuredangle NPS_1 = \omega$

$p(S,S_1)$, $P \in SS_1$, $\measuredangle SPT = \measuredangle S_1PN = \omega \Rightarrow$ uglovi $\measuredangle SPT$ i $\measuredangle NPS_1$ su unakrsni uglovi $\Rightarrow NT \cap SS_1 = \{P\}$.

Kako pravu n možemo konstruisati to možemo konstruisati i tačku P a time i tačku S ($\{S\}$ = simetrala duži $PT \cap p(S,T)$)

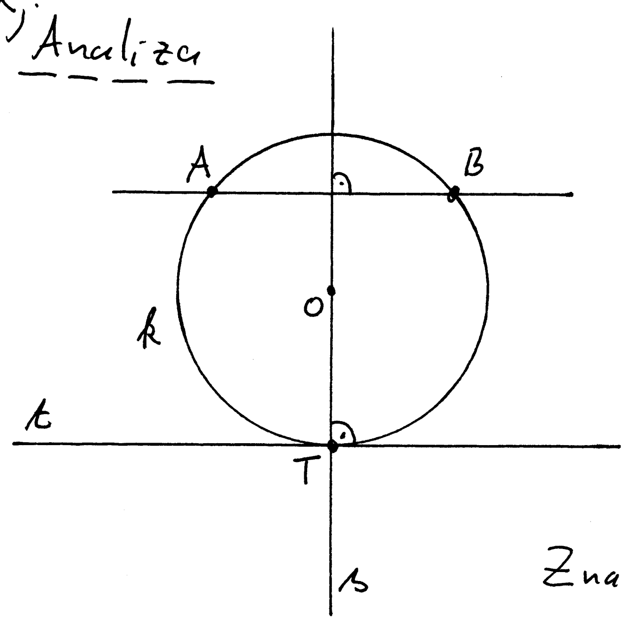
Sad možemo konstruisati traženu kružnicu $k(S,ST)$.



#) Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B) \parallel t$. Konstruisati kružnicu kroz tačke A, B koja dodiruje datu pravu t.

Rj:

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje pravu t u tački T i koja prolazi kroz tačke A i B.

Neka je s simetrala duži AB. Tačka $O \in s$ a kako je $p(AB) \parallel t$ to $s \perp t$.

Znamo da je $OT \perp t$ a kako je i $s \perp t$ to je $s \cap t = \{T\}$. Tačka O se nalazi na presjeku simetrala duži AB, AT i BT.

Prema tome kako su date tačke A i B, prava t to nije teško konstruisati simetralu s duži AB, dobiti tačku T a poslije toga i $k(O,r)$.