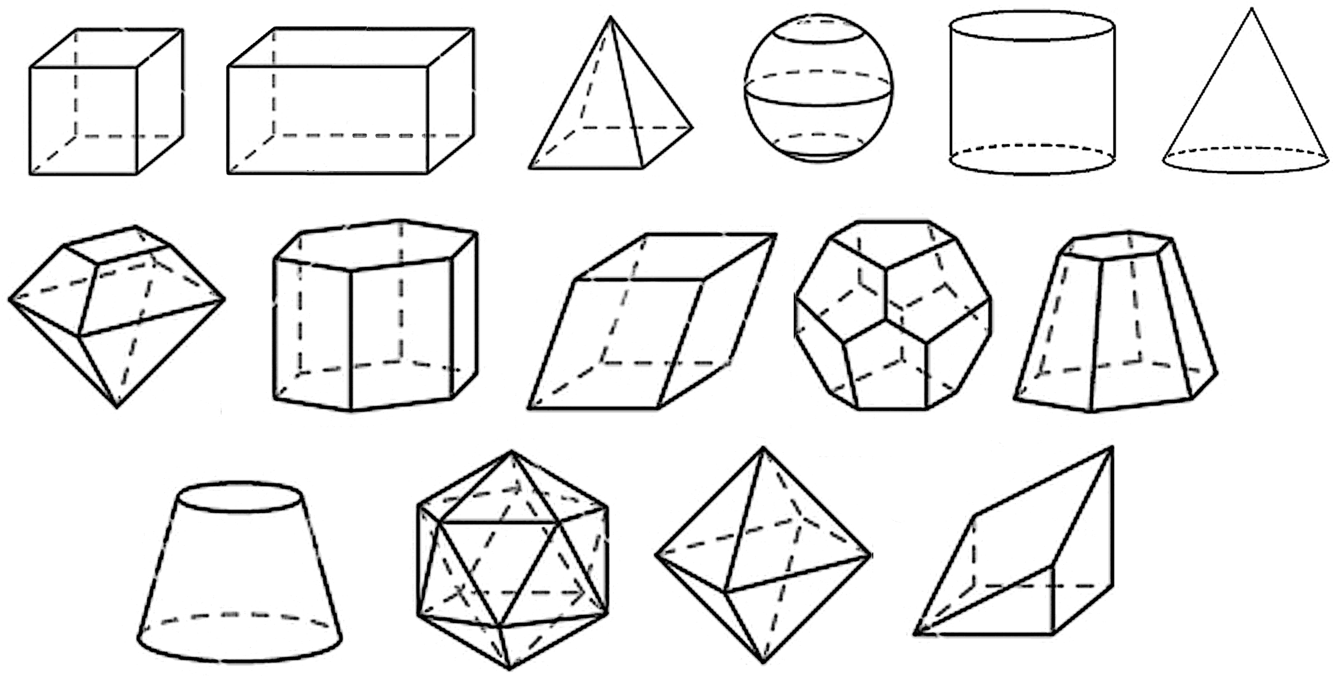
12 Elementarni zadaci: Računanje površine tijela u ravni i trigonometrija

Elementarna pitanja:

1. Nabrojati sve geometriske figure prikazane na slici ispod.

[kocka, kvadar, četverostrana piramida, sfera (kugla), valjak (cilindar), konus (fišek, stožac), zarubljeni oktaedar, šesterostrana prizma, paralelopiped, dodekaedar, zarubljena šesterostrana piramida, zarubljeni konus (frustum), ikosaedar, oktaedar, koso zasječeni kvadar]



1. Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

2. Površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

3. (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\alpha$.

4. Neka je $\square ABCD$ paralelogram kod koga su $AB = a$, $BC = b$, $AC = p$ i $BD = q$. Dokazati da vrijedi jednakost $p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2$ (uputa: iskoristiti kosinusnu teoremu).

Konstruktivni zadaci - Konstrukcija tačke.

5. U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglovima.

6. Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica.

7. Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX + BX = d$, gdje je d data duž.

8. Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX - BX = d$, gdje je d data duž.

9. Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

10. Na pravoj određenoj ivicom AB pravougaonika $\square ABCD$ konstruisati tačku E takvu da su uglovi $\measuredangle AED$ i $\measuredangle DEC$ podudarni.

Konstrukcija luka kruga.

11. Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B, i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

Zadaci za vježbu

12. Na datoj kružnici konstruisati tačku, tako za koju je razlika rastojanja dvije date prave jednaka datoj duži.

Razni zadaci za vježbu (sa rješenjima) iz ravni i prostora

13. Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

14. Na pravoj $p(A, B)$ trougla $\triangle ABC$ data je tačka M takva da je $A - B - M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M, C)$ paralelna simetrali ugla.

15. U četverougao $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za $2\,cm$ (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim $36\,cm$ i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

16. Date su dvije paralelne prave a i b, date su tačke $A \in a$, $B \in b$ i tačka C koja se nalazi "između" pravih a i b. Ako je $\measuredangle CAa = 30^\circ$ i $\measuredangle CBb = 45^\circ$ izračunati ugao $\measuredangle ACB$.

17. Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

18. U $\triangle ABC$ je upisan krug $k(I, r)$. Centar opisanog kruga $k''(M, r'')$ oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A, I]$ i kruga $k'(S, r')$ koji je opisan oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C, M)$ gdje je M centar kruga k''.

19. Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od 90° u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

20. Poluprečnik baze (osnove) uspravnog valjka (cilindra) povećan je za 200%, a visina valjka je smanjena za $p\%$. Ako se zapremina tog valjka povećala za $p\%$, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.

21. Zbir dužina prečnika baze i visine prave (uspravne) kupe je 18. Od svih takvih kupa odrediti površinu one koja ima najveću zapreminu.

22. Jednakokraki trougao čiji je obim $O = 64\,\text{cm}$, a visina na osnovicu $h_a = 24\text{cm}$ rotira oko kraka b. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog rotacionog tijela.

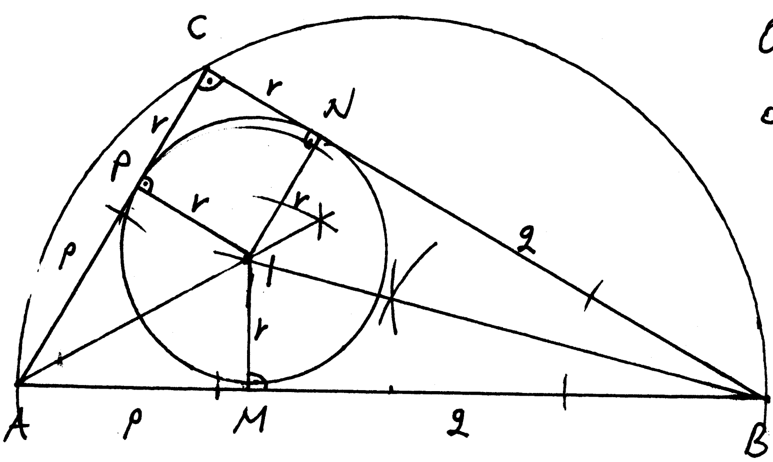
23. Data su dva jednaka pravougla jednakokraka trougl a $\triangle OAB$ i $\triangle OAC$ koji pripadaju dvjema međusobno okomitim ravnima. Neka su dužine hipotenuza OB i OC jednake $2a$. Sa S ćemo označiti središte hipotenuze OC, sa H središte duži OA, a sa M proizvoljnu tačku duži OB. Neka je x dužina duži OM.

(a) Izraziti SM^2 kao funkciju od a i x.

(b) U općem slučaju ravan (SHM) dijeli piramidu $OABC$ na dva dijela. Izraziti odnos zapremine piramide $SOHM$ i zapremine drugog dijela kao funkciju od a i x.

(#) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je $IM = IN = IP = r$.

Dalje, primjetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \qquad \ldots(1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \qquad /:2$$

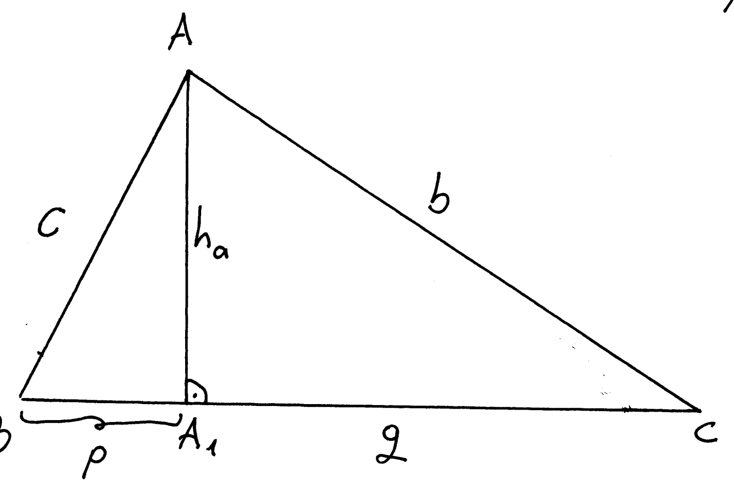
$$pq = pr + qr + r^2 \qquad \ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $P_{\Delta ABC} = \dfrac{pq + pq}{2} = pq$

q.e.d.

(#) Površina pravouglog trougla ΔABC se računa po formuli $P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P=\frac{a\cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Rj.: raznostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta BA_1A}+P_{\Delta AA_1C}$$

$$P_{\Delta BA_1A}=\frac{p\cdot h_a}{2}$$

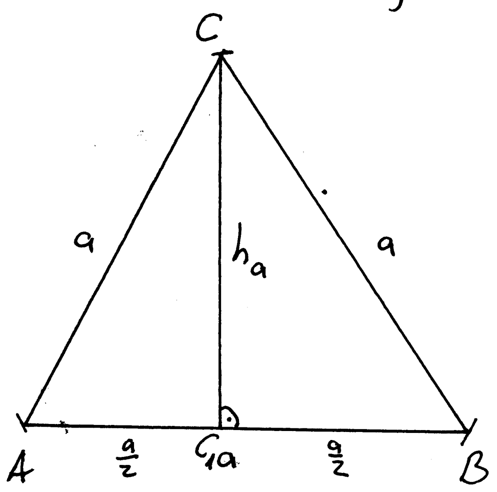
$$P_{\Delta A_1CA}=\frac{q\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{p\cdot h_a}{2}+\frac{q\cdot h_a}{2}=\frac{p\cdot h_a+q\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{(p+q)\,h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

q.e.d.

jednakostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta AC_1C}+P_{\Delta BCC_1}$$

$$P_{\Delta AC_1C}=\frac{\frac{a}{2}\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{4}$$

$$P_{\Delta BCC_1}=\frac{\frac{a}{2}\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{4}$$

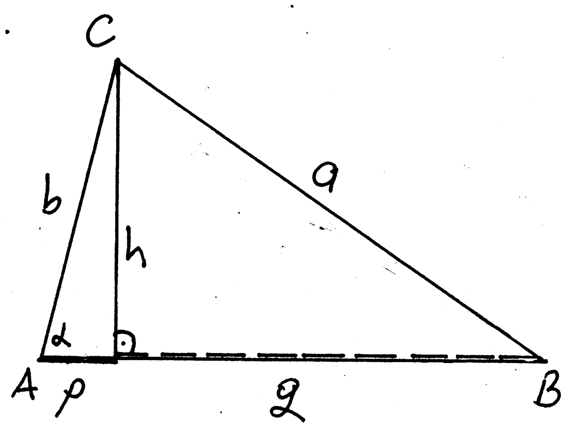
$$P_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

$$h_a^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$$

$$h_a=\frac{1}{2}a\sqrt{3} \qquad P_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(#) (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Rj: Uvedimo oznake kao na slici.



$$\cos\alpha = \frac{p}{b}$$

$$\begin{array}{rl} & a^2 = h^2 + q^2 \\ + & h^2 = b^2 - p^2 \\ \hline & a^2 = b^2 + q^2 - p^2 \quad \ldots (*) \end{array}$$

$$q^2 - p^2 = (c-p)^2 - p^2$$

$$\left.\begin{array}{l} q^2 - p^2 = c^2 - 2pc \\ p = b\cos\alpha \end{array}\right\} (**)$$

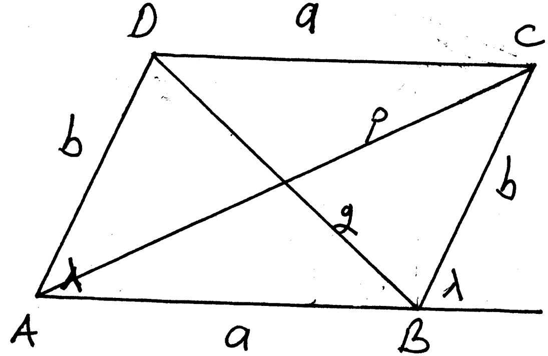
$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

q.e.d.

(#) Neka je $\square ABCD$ paralelogram kod koga su $AB=a$, $BC=b$, $AC=p$ i $BD=q$. Dokazati da vrijedi jednakost $p^2+q^2=2a^2+2b^2$.

(uputa: iskoristiti kosinusnu teoremu)

Rj.



$$p^2=a^2+b^2-2ab\cos\sphericalangle ABC \quad (*)$$

$$q^2=a^2+b^2-2ab\cos\sphericalangle BAD \quad (**)$$

$$\sphericalangle BAD=180^\circ-\sphericalangle ABC$$

$$\cos\sphericalangle BAD=\cos(180^\circ-\sphericalangle ABC)=-\cos\sphericalangle ABC \quad (***)$$

$$(*)+(**) \overset{(***)}{\Longrightarrow} \quad p^2+q^2=a^2+b^2-2ab\cos\sphericalangle ABC+a^2+b^2+2ab\cos\sphericalangle ABC$$

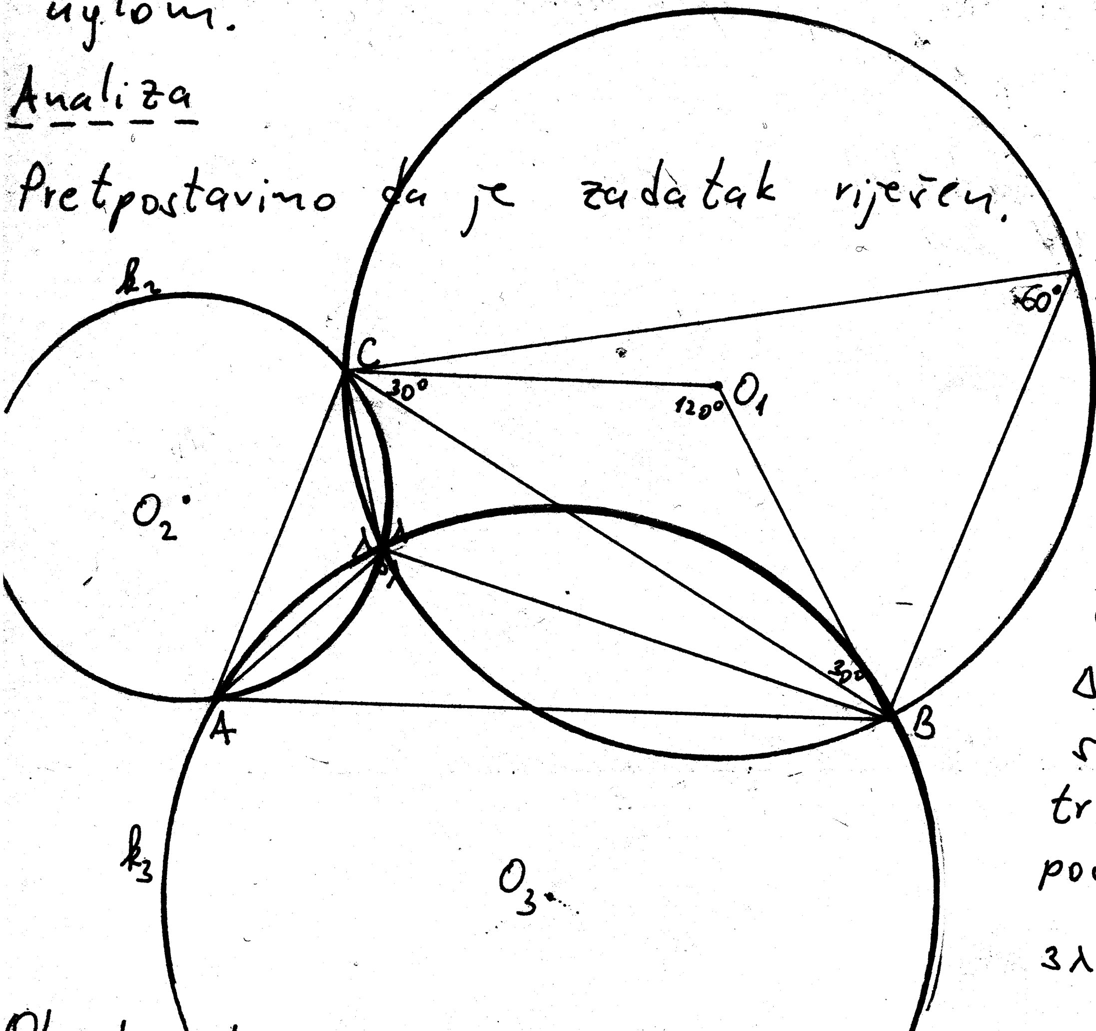
$$p^2+q^2=2a^2+2b^2$$

q.e.d

(#) U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri strane trougla vide pod podudarnim uglom.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je tačka P u unutrašnjosti ΔABC iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglom λ.

$3\lambda = 360^\circ \Rightarrow \lambda = 120^\circ$

Oko trougla ΔBCP opišimo krug $k_1(O_1, r_1)$. Tada je $\measuredangle BPC = 120^\circ$ tupi periferiski ugao nad tetivom BC kome odgovara oštri periferiski ugao nad istom tetivom od 60° pa je centralni ugao nad tetivom BC, $\measuredangle BO_1C = 120^\circ$.

ΔBO_1C jkk $\Rightarrow \measuredangle O_1CB = \measuredangle CBO_1 = 30^\circ$.

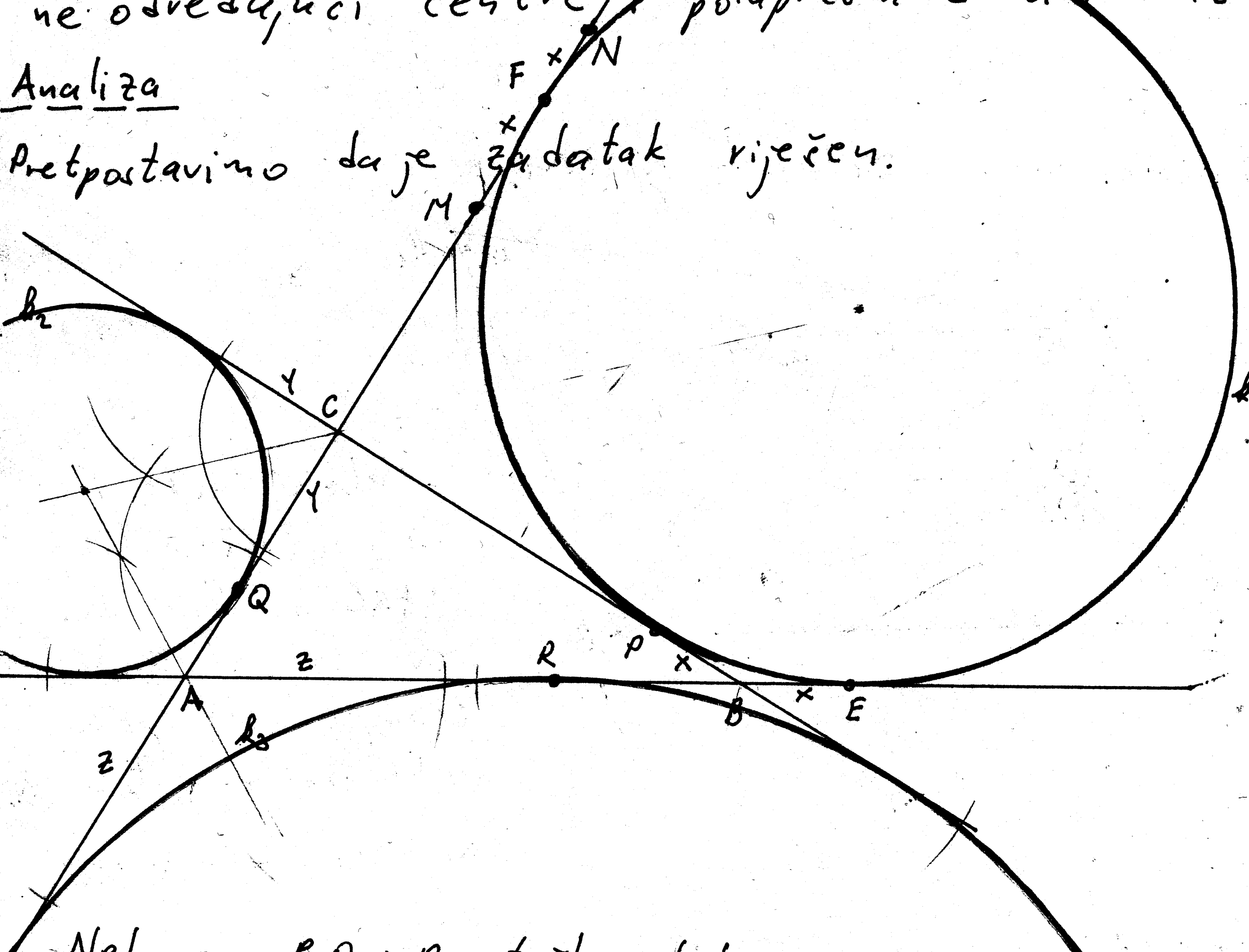
Ako bi oko trougla ΔAPC opisali krug $k_2(O_2, r_2)$ ili oko ΔABP opisali krug $k_3(O_3, r_3)$ na sličan način bi došli do rezultata $\measuredangle ACO_2 = \measuredangle O_2AC = \measuredangle BAO_3 = \measuredangle ABO_3 = 30^\circ$.

Kako možemo konstruisati kružnice k_1, k_2 i k_3 time možemo konstruisati i tačku P.

(#) Dat je trougao ΔABC. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su P, Q i R tačke dodira spolja upisanih kružnica k_1, k_2 i k_3 redom sa stranicama BC, AC i AB trougla ΔABC.
Analizirat ćemo konstrukciju tačke R.
Na kružnici k_1 imamo tri para tangentnih duži tj.
$BE \cong BP$, $CP \cong CF$, $AF \cong AE$ (E i F su tačke dodira k_1 i $p(A,B)$ i $p(A,C)$)
Neka je $M \in p(A,C)$: $AM \cong AB \Rightarrow MF = BE = x$.
Neka je $N \in p(A,C)$: $CN \cong CB \Rightarrow NF = PB = BE = x$.
Sad imam $MN = AN - AM = b + a - c$

pa je $x = \frac{MN}{2} = \frac{b+a-c}{2}$.

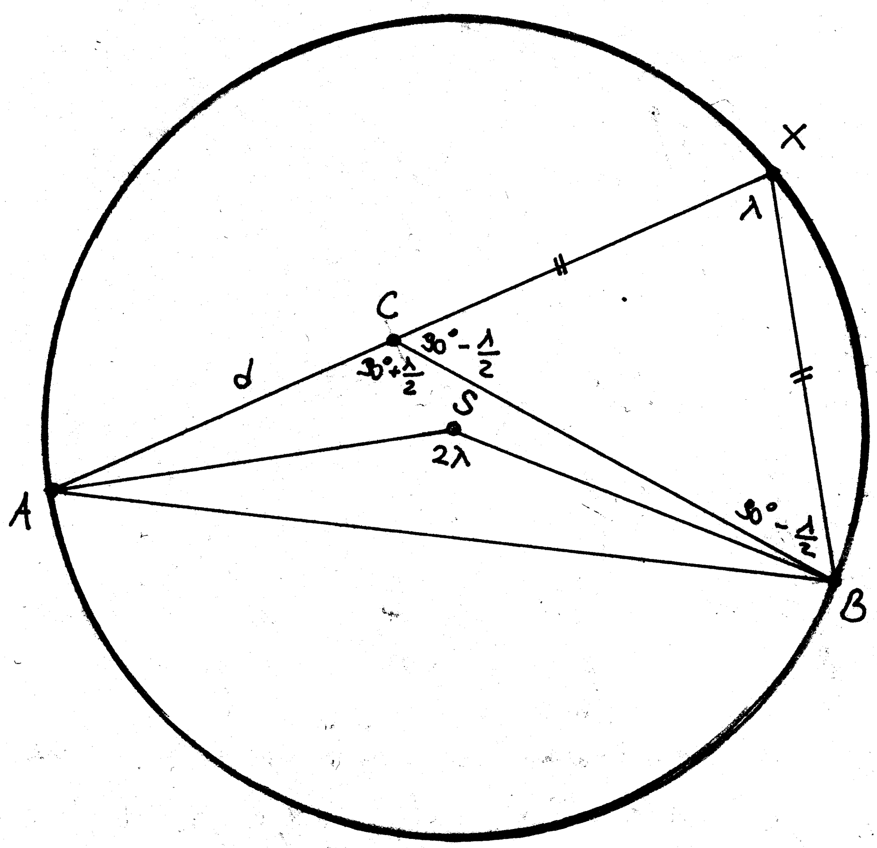
Slično bi pokazali da je $y = \frac{c+b-a}{2}$ i $z = \frac{a+c-b}{2}$.

Kako znamo duži x, y i z sad nije teško konstruisati tačke P, Q i R.

#) Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX - BX = d$ gdje je d data duž.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica k s centrom u S takva da prolazi kroz tačke A, B i X i da je $AX - BX = d$, gdje je d data duž.

Uzmimo tačku C na duži AX tako da je $AC = d$. Tada je $CX = BX$.

$$\sphericalangle ASB = 2\lambda \Rightarrow \sphericalangle AXB = \lambda \xRightarrow{\Delta CBX \text{ jk}} \sphericalangle XCB = \sphericalangle CBX = 90° - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle ACB = 90° + \frac{\lambda}{2}$$

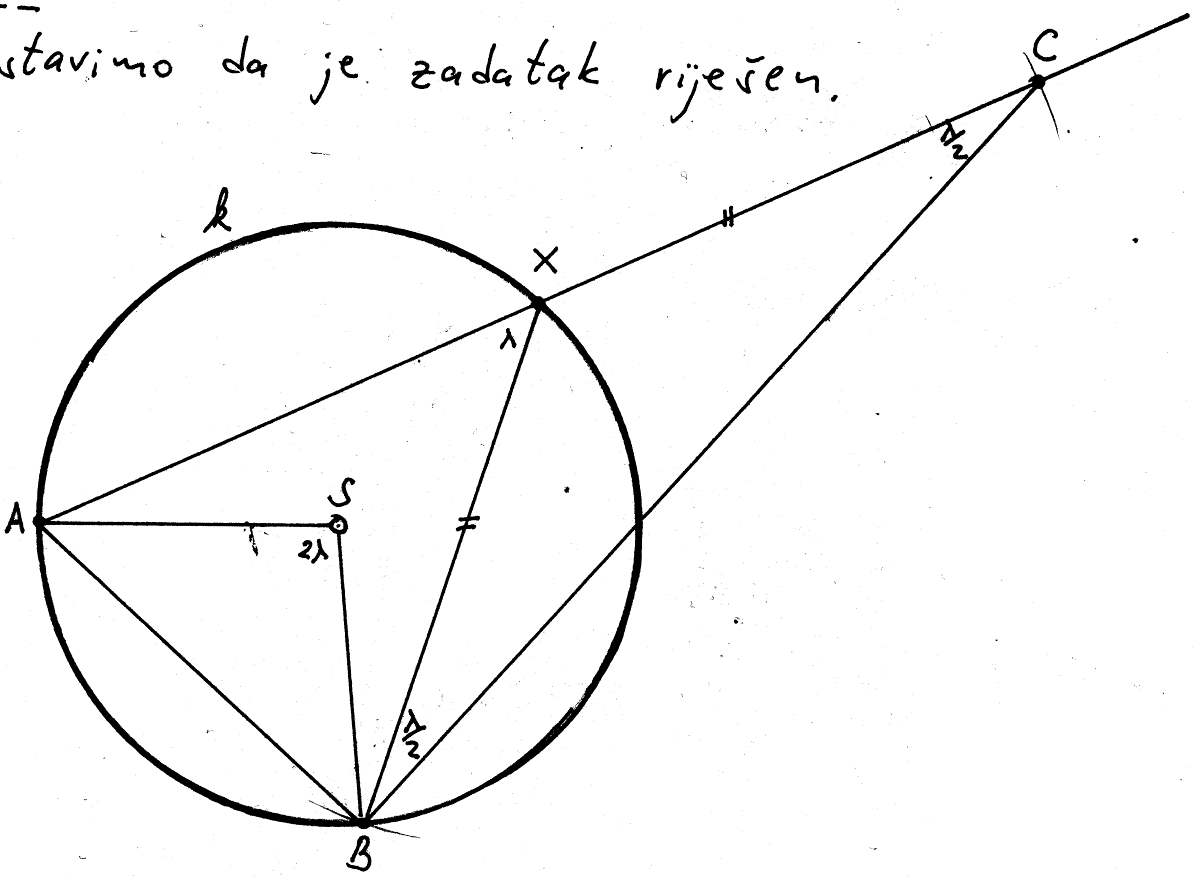
U trouglu ΔABC su poznate dvije stranice i tup ugao pa ga možemo konstruisati.

Prema tome tačka X kružnice k možemo konstruisati.

Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX + BX = d$ gdje je d data duž.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je k kružnica s centrom u S opisana oko tački A, B i X tako da je $AX + BX = d$, gdje je d neka data duž.

Duž AX produžimo do tačke C tako da je $A - X - C$ i $BX \cong CX$.

$$\measuredangle ASB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle AXB = \lambda \xRightarrow{\Delta BCX \text{ jk}} \measuredangle XBC = \measuredangle XCB = \frac{\lambda}{2}$$

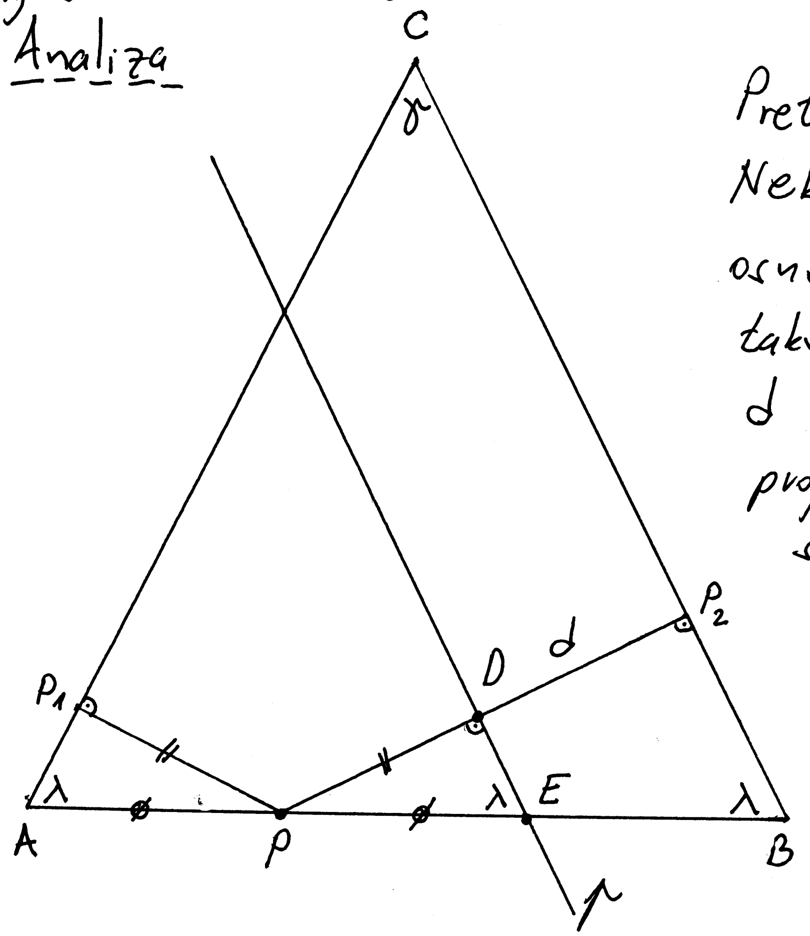
Kako ugao $\frac{\lambda}{2}$ mogu konstruisati to u ΔABC su poznate dvije stranice (AC i AB) i ugao ($\measuredangle ACB$) pa ga možemo konstruisati.

Tačku X kružnice k možemo konstruisati.

(#) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

Rj:

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je P tražena tačka na osnovici AB datog jkk $\triangle ABC$ takva da je $PP_1 - PP_2 = d$ gdje je d data duž, a P_1 i P_2 su ortog. projekcije tačke P redom na stranice AC i BC.

Na duži PP_2 izaberimo tačku D t.d. $PP_1 \cong PD$, i kroz tačku D postavimo pravu $p \parallel p(B,C)$.

$p \parallel p(B,C)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle PED \cong \measuredangle PBC$

$$\left.\begin{array}{r} \measuredangle PAP_1 \cong \measuredangle PED = \lambda \\ \measuredangle PP_1A \cong \measuredangle EDP = 90^\circ \\ PP_1 \cong PD \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \triangle APP_1 \cong \triangle PED$$

$$\Downarrow$$

$$AP \cong PE$$

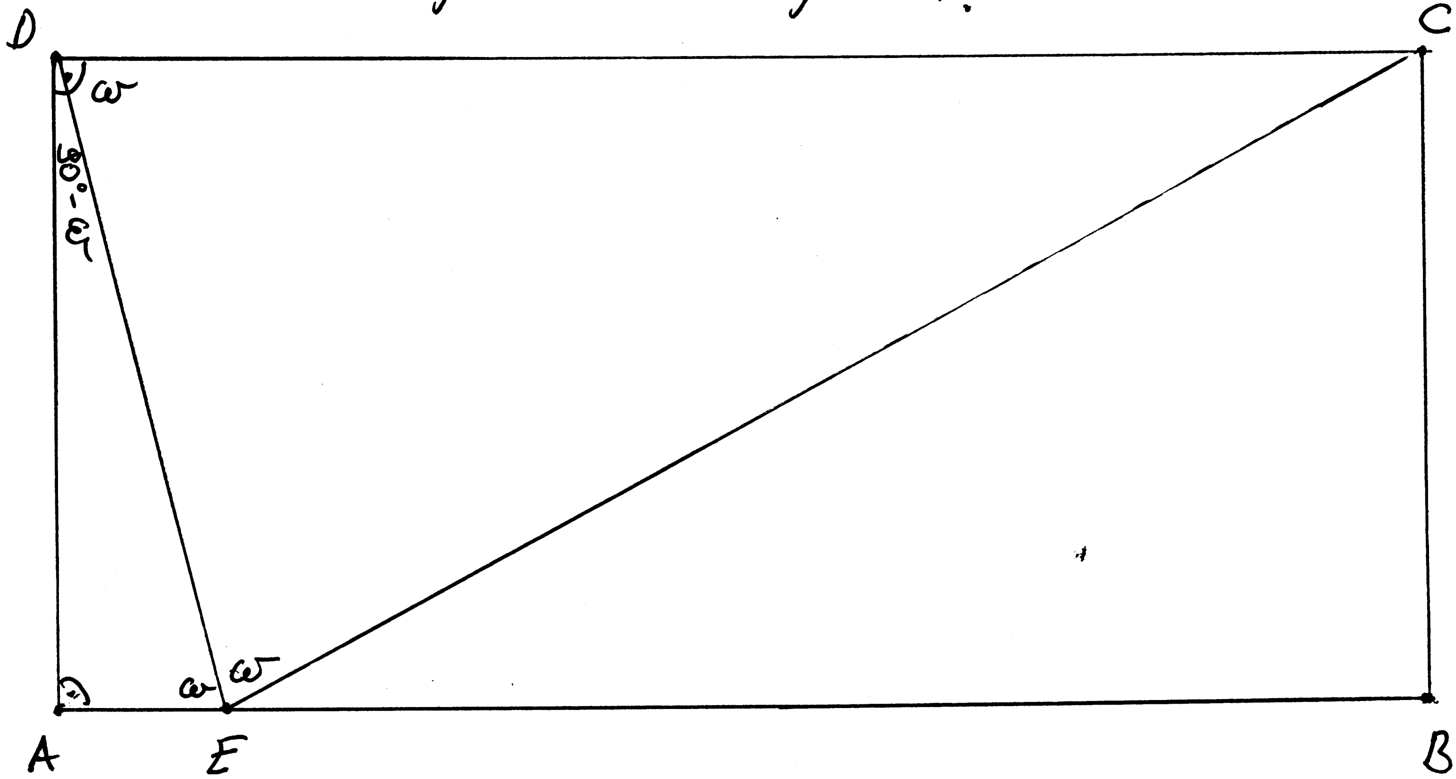
Kako je dat $\triangle ABC$ i dužina d, to pravu p možemo konstruisati (prava p se nalazi na rastojanju d od stranice BC). Poslije toga ćemo dobiti tačku E, pa nije teško konstruisati sredinu P duži AE.

(#) Na pravoj određenoj ivicom AB pravougaonika $\square ABCD$ konstruisati tačku E takvu da su uglovi $\measuredangle AED$ i $\measuredangle DEC$ podudarni.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je E tačka na pravoj $p(A,B)$ pravougaonika $\square ABCD$ takva da $\measuredangle AED \cong \measuredangle DEC = \omega$.

Posmatrajmo $\triangle AED$. Kako je $\measuredangle DAE = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \measuredangle ADE = 90^\circ - \omega \xRightarrow{\measuredangle ADC = 90^\circ} \measuredangle CDE = \omega$$

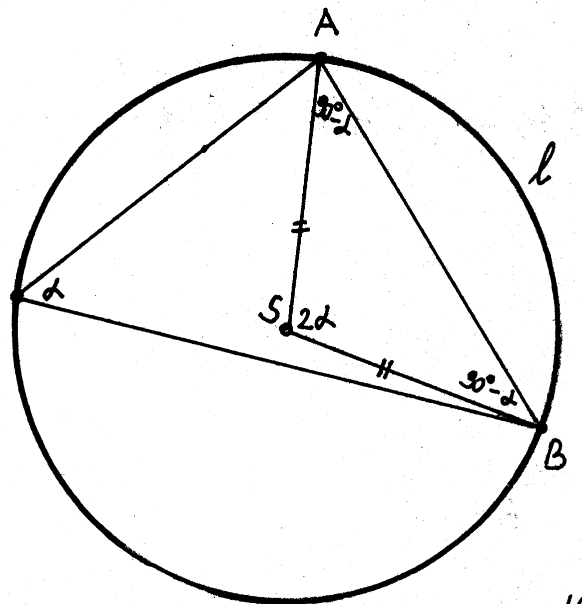
$$\Rightarrow \triangle CDE \text{ jkk } (CD \cong CE).$$

Kako nam je dat pravougaonik $\square ABCD$ to tačku E sad nije teško konstruisati.

(#) Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



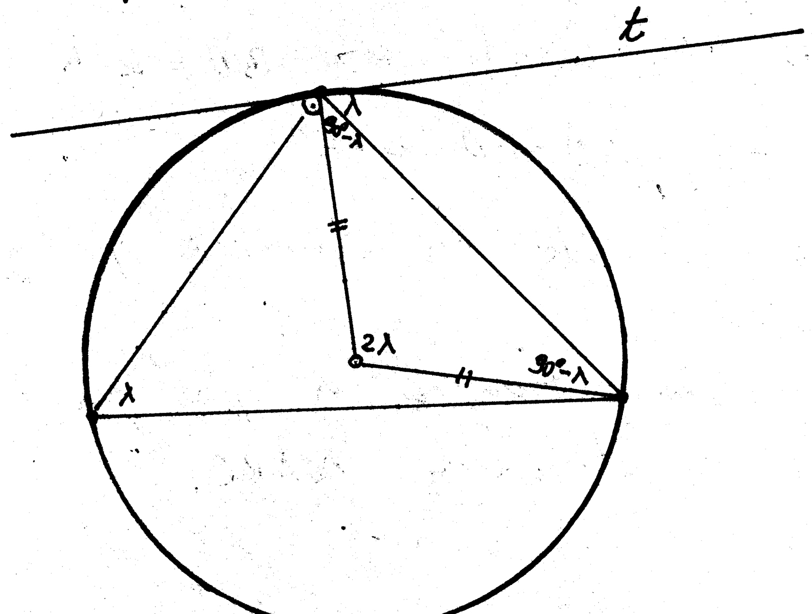
Neka su date tačke A i B, kružnica $k(S,SA)$ koja sadrži tačke A i B takva da su periferiski uglovi nad l (l je kružni luk čije su krajnje tačke A i B) jednaki datom uglu α.

Primjetimo da je $\measuredangle BSA = 2\alpha$.

Kako je ΔASB jkk sa osnovicom AB imamo da je $\measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 90° - \alpha$.

Prema tome ΔASB možemo konstruisati pa time i kružni luk l.

Primjedba:

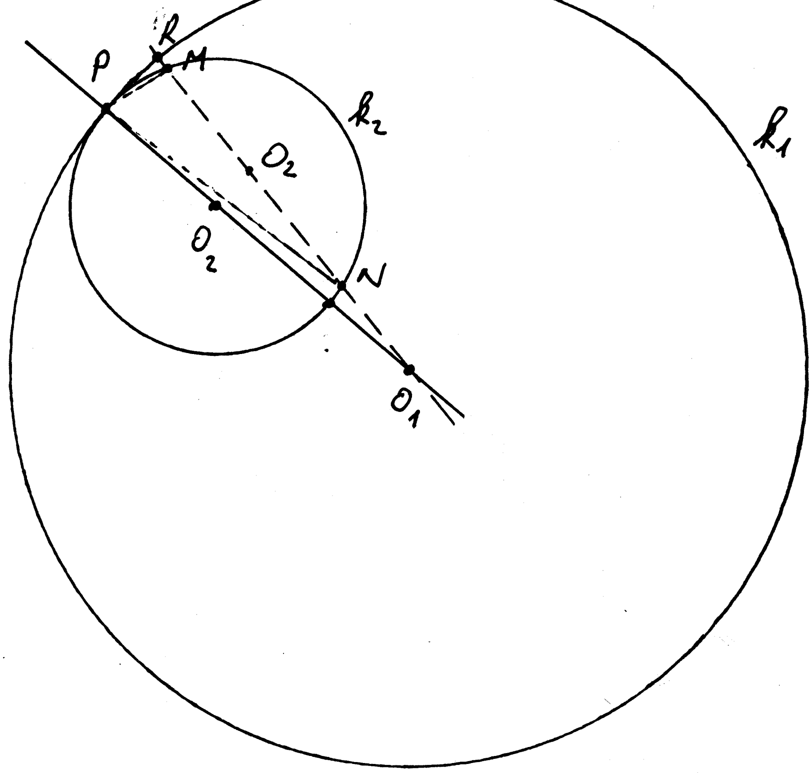


Primjetite da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Prema tome luk kruga možemo konstruisati i na drugi način.

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

Rj.



Posmatrajmo pravu $p(O_1, P)$. Ako tačka O_2 ne bi pripadala ovoj pravoj imali bi da $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{M, N\}$ gdje je MN prečnik kruga k_2. Recimo da je poredak $O_1 - N - O_2 - M$.
Neka je R tačka na k_1 t.d. $N - M - R$.
Ugao nad prečnikom je prav tj. $\sphericalangle MPN = 90°$. Kako je $\sphericalangle MPO_1 > \sphericalangle MPN \Rightarrow \sphericalangle MPO_1$ je tup, pa u ΔMPO_1 stranica MO_1 je najveća tj. $MO_1 > PO_1$

kontradikcija

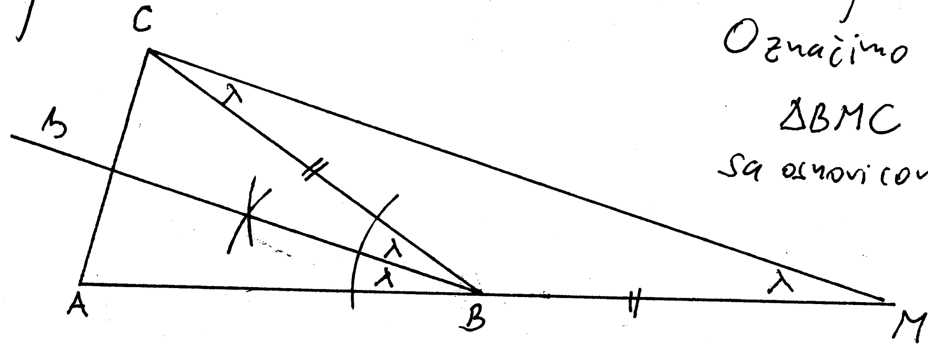
(PO_1 i RO_1 su poluprečnici kruga k_1 i kako je $O_1 - M - R$ to je $MO_1 < PO_1$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome tačke O_1, O_2 i P su kolinearne

q.e.d.

(#) Na pravoj $p(A,B)$ trougla ΔABC data je tačka M takva da je $A-B-M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M,C)$ paralelna simetrali ugla.

Rj:



Neka je s simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle ABs \cong \measuredangle CBs$

$\left.\begin{array}{l}\Delta BMC \text{ jkk} \\ \text{sa osnovicom } MC\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle BMC = \measuredangle MCB$

Kako je $\measuredangle ABC = 2\lambda$ i

$\measuredangle ABC = \measuredangle BMC + \measuredangle MCB$

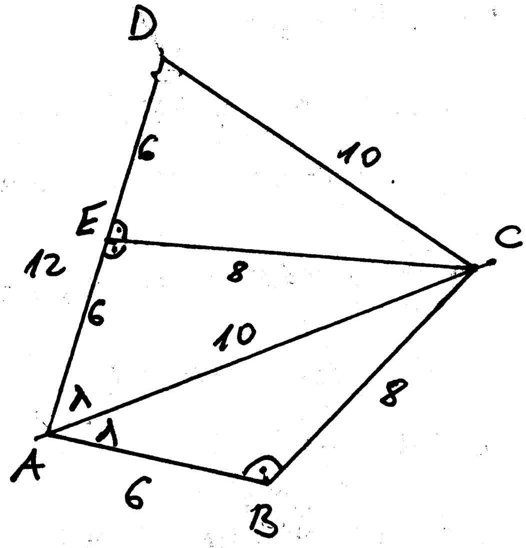
$\Rightarrow \measuredangle BCM \cong \measuredangle BMC = \lambda$

Sad na pravoj $p(A,B)$ imamo $\measuredangle ABs = \measuredangle AMS = \lambda \Rightarrow s \parallel p(M,C)$

q.e.d.

#) U četverouglu $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za 2 cm (izuzev AB i AD). Nađi površinu četverougla, ako mu je obim 36 cm i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Rj.



$AB < BC$, $BC - AB = 2 \Rightarrow BC = AB + 2$

$BC < CD$, $CD - BC = 2 \Rightarrow CD = AB + 4$

$CD < AD$, $AD - CD = 2 \Rightarrow AD = AB + 6$

$O = 36$ cm $\Rightarrow$

$AB + BC + CD + AD = 36$ tj. $4AB + 12 = 36$

$AB = 6$

$\Rightarrow BC = 8$, $CD = 10$ i $AD = 12$

Dijagonala AC leži na dijagonali. Uzmimo tačku $E \in AD$ takvu da je $AE = 6$. Iz podudarnosti SUS $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AEC$

$\Downarrow$

$AB \cong AE = 6$ cm

ΔECD je pravougli

$10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \measuredangle AEC \cong \measuredangle DEC = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$AC = 10$

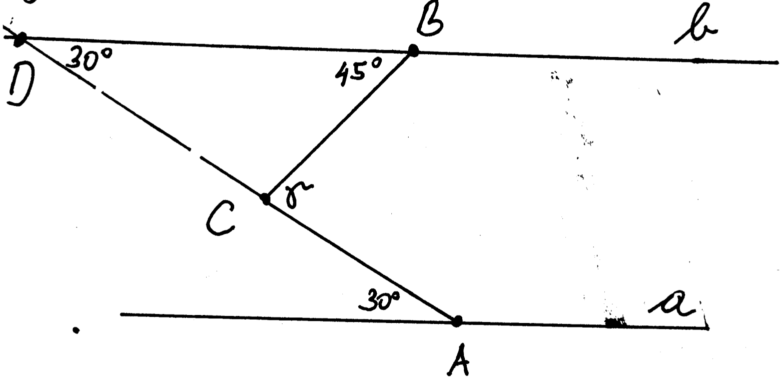
$$P_{\Delta ACD} = \frac{AD \cdot h_{AD}}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$P_{\square ABCD} = 72 \text{ cm}^2$$

(#) Date su dvije paralelne prave a i b, tačke $A \in a$, $B \in b$ i C koja se nalazi "između" pravih a i b. Ako je $\measuredangle CAa = 30^\circ$ i $\measuredangle CBb = 45^\circ$ izvračunati ugao $\measuredangle ACB$.

Rj..



$\gamma = ?$

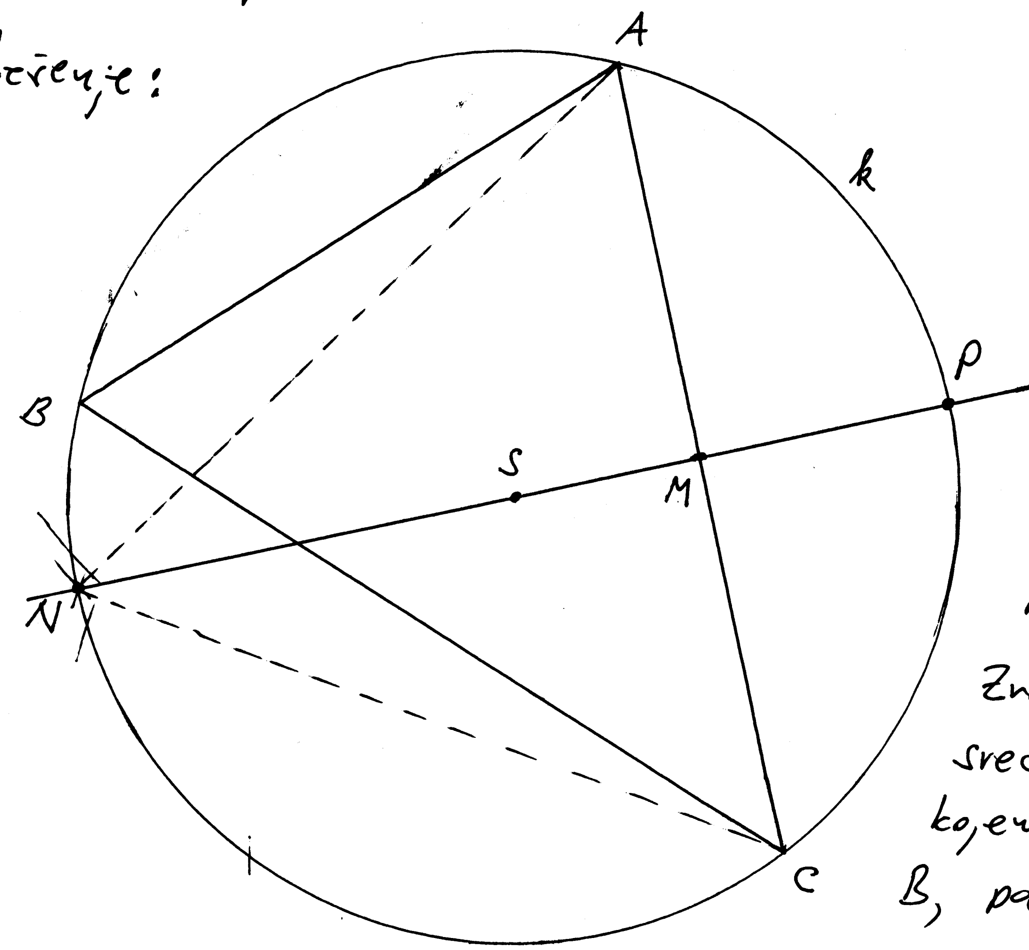
Neka je $p(A, C) \cap b = \{D\}$ (vidi sliku lijevo).

$a \parallel b \overset{\measuredangle CAa = 30^\circ}{\Longrightarrow} \measuredangle CDB = 30^\circ$

γ je vanjski ugao $\triangle BDC \Rightarrow \gamma = 75^\circ$.

(#) Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla ΔABC, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka $\overset{\frown}{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačku presjeka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\overset{\frown}{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \text{ (} M \text{ sredina } AC\text{)} \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ANM \cong \Delta CNM$$

$$\Downarrow$$

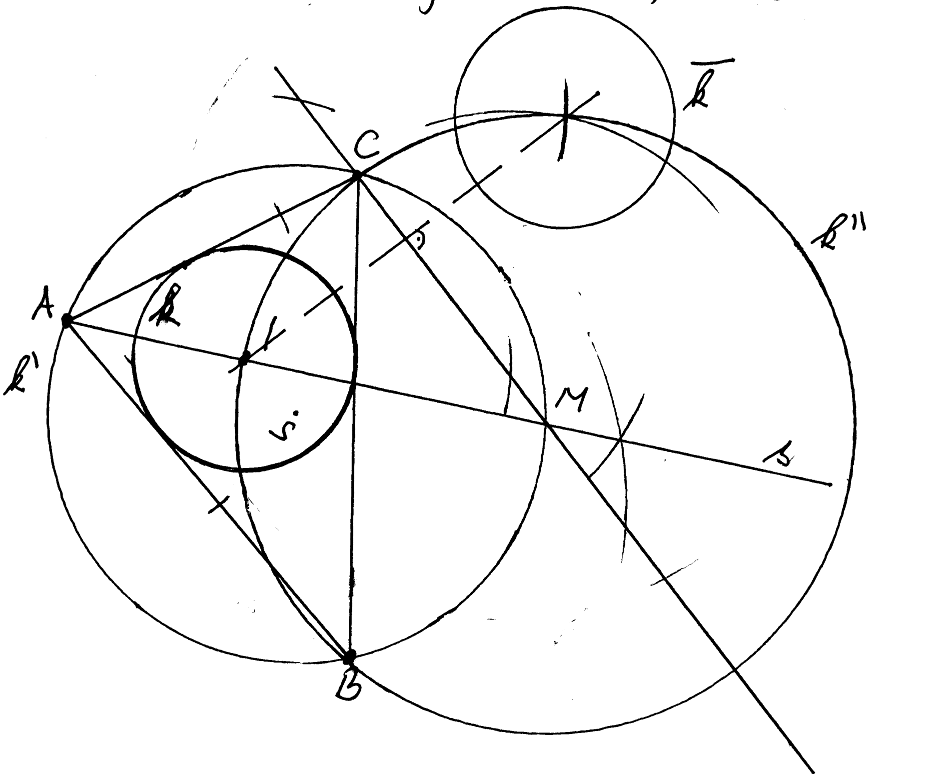
$$\measuredangle AMN \cong \measuredangle CMN = 90^\circ \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presjek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow$ NP je prečnik opisane kružnice.

(#) U ΔABC je upisan krug k sa centrom u I. Centar opisanog kruga k'' oko ΔBCI nalazi se na presjeku $p[A,I)$ i kruga k' koji je opisana oko ΔABC. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C,M)$ gdje je M centar kruga k''.

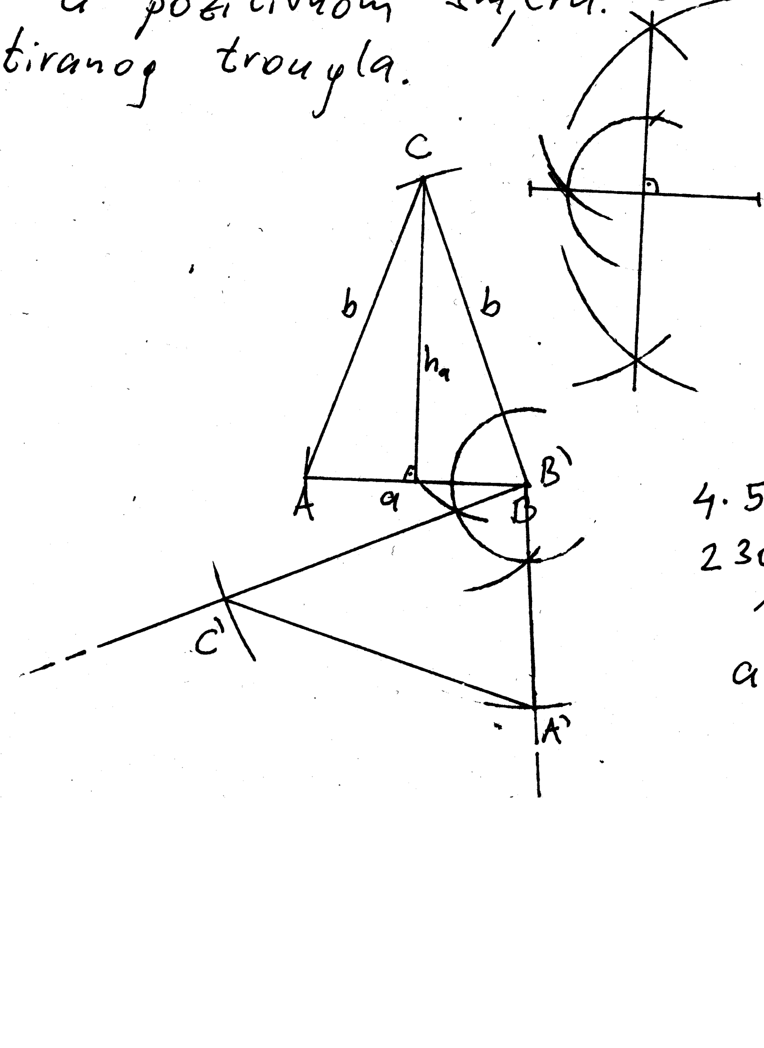
Rj. Prvo ćemo nacrtati $k'(S,r')$, pa ćemo nacrtati ΔABC, pa simetralu s ugla $\measuredangle BAC$, krug $k''(M,r'')$ i na kraju $k(I,r)$



$$G_{p(M,C)}(k) = \bar{k}$$

Jednakokraki trougao ΔABC čiji je obim $O=64\,cm$, a visina na osnovici $h_a=24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od 90° u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Rj.



Rotacija čuva dužine pa su novonastali trougao $\Delta A'B'C'$ i ΔABC podudarni.

$O = 2b + a = 64 \Rightarrow 2b = 64 - a$

$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$4b^2 = (64-a)^2$

$24^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad / \cdot 4$

$= 4096 - 128a + a^2$

$4 \cdot 576 = 4b^2 - a^2$

$2304 = 4096 - 128a$

$128a = 1792$

$a = 14\ cm$

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$

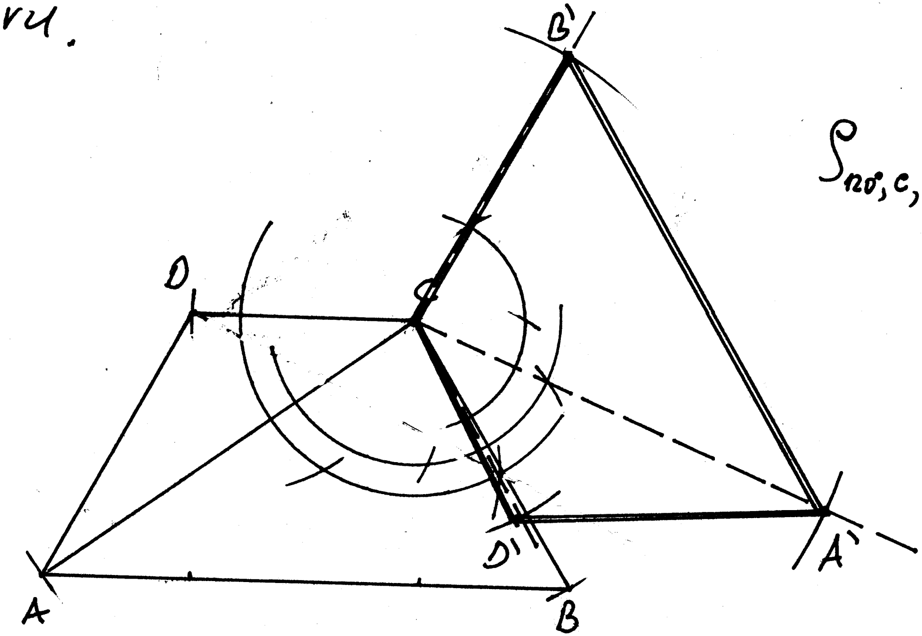
$P = \frac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24$

$P = 168\ cm^2$

(#) Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7$ cm rotirati oko tačke C za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

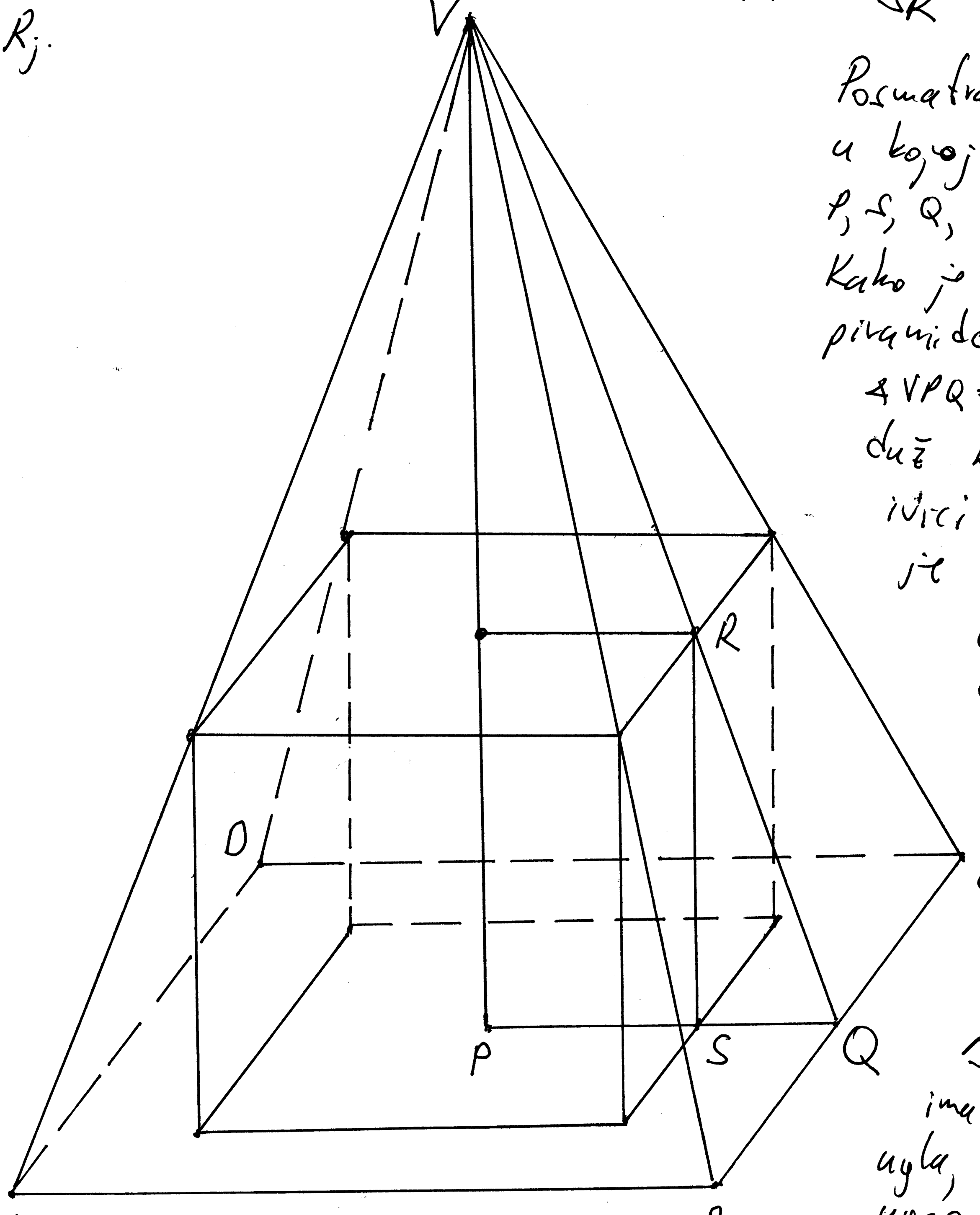
Rj.

$$\rho_{120°, C, +}(\square ABCD) = \square A'B'CD'$$



(#) U pravilnu četvorostranu piramidu upisana je kocka, čija jedna strana leži u osnovi piramide, a ivice njoj naspremne strane pripadaju bočnim stranama piramide (vidi sliku). Pokazati da je $\frac{PQ}{PV} = \frac{SQ}{SR}$.

Rj.



Posmatrajmo ravan u kojoj su tačke P, S, Q, R, V. Kako je PV visina piramide to je $\sphericalangle VPQ = 90^\circ$. SR je duž koja pripada ivici kocke pa je $RS \perp PQ$. Odavde vidimo da je

$$p(P,V) \parallel p(R,S)$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle QRS \cong \sphericalangle QVP = \lambda$$

Primjetimo da u $\triangle PQV$ i $\triangle SQR$ imamo dva podudarna ugla, pa je i treći ugao podudaran.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle VPQ \cong \sphericalangle RSQ = 90^\circ \\ \sphericalangle QVP \cong \sphericalangle QRS = \lambda \\ \sphericalangle PQV \cong \sphericalangle SQR \end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \triangle PQV \sim \triangle SQR$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PQ}{SQ} = \frac{PV}{SR} \Rightarrow \frac{PQ}{PV} = \frac{SQ}{SR} \text{ q.e.d.}$$

#

Poluprečnik baze (osnove) uspravnog valjka (cilindra) povećan je za 200%, a visina valjka je smanjena za $p\%$. Ako se zapremina tog valjka povećala za $p\%$, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.

R:

Označimo sa r i H poluprečnik baze i visinu valjka, respektivno, a sa r_1 i H_1 označimo poluprečnik baze i visinu novodobijenog valjka. Prema uvjetima zadatka imamo $r_1 = 3r$ i $H_1 = \left(1-\frac{p}{100}\right)H$, i na osnovu toga:

$$V_1 = \left(1+\frac{p}{100}\right)V \Leftrightarrow r_1^2\pi H_1 = \left(1+\frac{p}{100}\right)r^2\pi H \Leftrightarrow 9r^2\pi\left(1-\frac{p}{100}\right)H = \left(1+\frac{p}{100}\right)r^2\pi H$$

$$\Leftrightarrow 9\left(1-\frac{p}{100}\right) = \left(1+\frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow p = 80\%.$$

Označimo sa M površinu omotača polaznog valjka, a sa M_1 površinu omotača novodobijenog valjka. Tada je

$$\frac{M_1}{M} = \frac{2r_1\pi H_1}{2r\pi H} = \frac{3r\left(1-\frac{p}{100}\right)H}{rH} = 3\left(1-\frac{80}{100}\right) = 0,6 .$$

Dakle, površina omotača se smanjila za 40%.

#

Zbir dužina prečnika baze i visine prave (uspravne) kupe je 18. Od svih takvih kupa odrediti površinu one koja ima najveću zapreminu.

R:

Koristeći $A-G$ nejednakost za tri pozitivna broja, imamo

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{\pi}{3}r\cdot r\cdot H \leq \frac{\pi}{3}\left(\frac{r+r+H}{3}\right)^3 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{18}{3}\right)^3 = 72\pi ,$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi kada je $r = H = 6$, tj. u tom slučaju kupa ima najveću zapreminu. Njena izvodnica ima dužinu $s = \sqrt{r^2+H^2} = 6\sqrt{2}$, a površina joj je

$$P = r\pi(r+s) = 36\pi\left(1+\sqrt{2}\right).$$

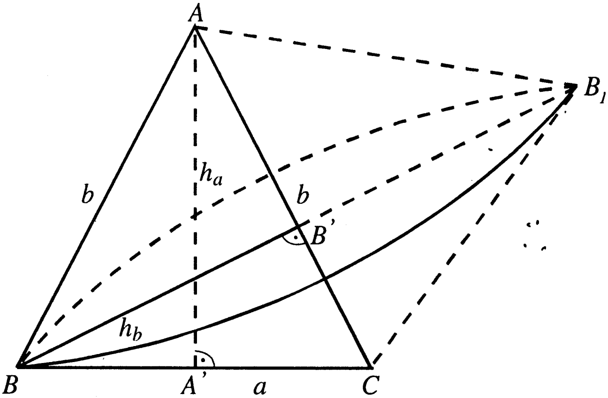
#

Jednakokraki trougao čiji je obim $O=64cm$, a visina na osnovicu h_a=24cm rotira oko kraka b. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog rotacionog tijela.

Rj. Obim trougla ΔABC je $a+2b$, tj. $a+2b=64$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\Delta AA'B$ nalazimo

$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ tj.}$$

$$24^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$



Sada iz sistema jednačina

$$a+2b=64,$$

$$b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 24^2,$$

nalazimo: $b=25cm$ i $a=14cm$.

Kako je $P_{\Delta ABC} = \frac{14\cdot 24}{2} = 168cm^2$ i $P_{\Delta ABC} = \frac{25\cdot h_b}{2}$, to iz jednačine $168 = \frac{25\cdot h_b}{2}$ nalazimo $h_b = \frac{336}{25}cm.$

Rotaciono (obrtno) tijelo sastoji se iz dvije kupe sa zajedničkom osnovom poluprečnika $r = h_b = \frac{336}{25}cm$, bočnih ivica $b=25cm$ i $a=14cm$, visina $\overline{AB'}$ i $\overline{B'C}$.

Površinu čine omotači ovih kupa i ona iznosi

$$P = M_1 + M_2 = h_b b\pi + h_b a\pi = (a+b)h_b\pi = \frac{13104}{25}\pi \ cm^2.$$

Zapremina je

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}h_b^2\pi\cdot\overline{AB'} + \frac{1}{3}h_b^2\pi\cdot\overline{B'C} = \frac{1}{3}h_b^2\pi\left(\overline{AB'}+\overline{B'C}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h_b^2\pi b = \frac{37632}{25}\pi \ cm^3.$$

#

Data su dva jednaka pravougla jednakokraka trougla ΔOAB i ΔOAC koji pripadaju dvjema međusobno okomitim ravnima. Neka su dužine hipotenuza OB i OC jednake $2a$. Sa S ćemo označiti središte hipotenuze OC, sa H središte duži OA, a sa M proizvoljnu tačku duži OB. Neka je x dužina duži OM.

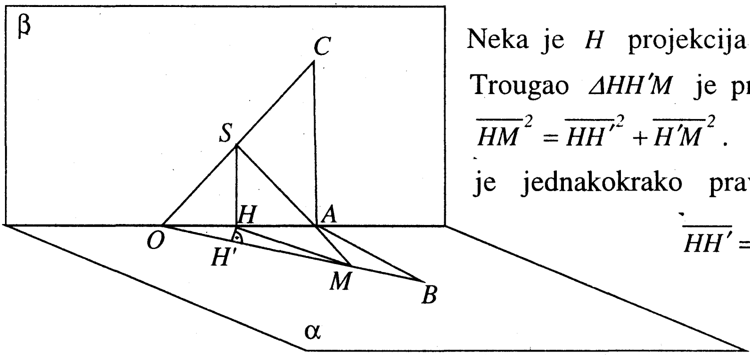
a) Izraziti $\overline{SM}^2$ kao funkciju od a i x.

b) U općem slučaju ravan (SHM) dijeli piramidu $OABC$ na dva dijela. Izraziti odnos zapremine piramide $SOHM$ i zapremine drugog dijela kao funkciju od a i x.

R.

Neka su ravni α i β međusobno okomite. Neka pravougli jednakokraki trougao ΔOAB pripada ravni α a njemu podudaran trougao ΔOAC ravni β. Trougao ΔSHM je pravougli, pa je $\overline{SM}^2 = \overline{SH}^2 + \overline{HM}^2$. SH je srednja linija trougla ΔOAC, pa je $\overline{SH} = \frac{1}{2}\overline{CA}$. Budući da je trougao ΔOAC jednakokraki pravougli, to je

$$\overline{OC} = \overline{AC}\cdot\sqrt{2} \text{ i } \overline{OA} = \overline{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OC} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2};\ \overline{SH} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Neka je H projekcija tačke H na OB. Trougao $\Delta HH'M$ je pravougli, pa je $\overline{HM}^2 = \overline{HH'}^2 + \overline{H'M}^2$. Trougao $\Delta OHH'$ je jednakokrako pravougli, pa je $\overline{HH'} = \overline{OH'} = \frac{a}{2}$.

Dalje, imamo

$$\overline{H'M} = \overline{OM} - \overline{OH'} = x - \frac{a}{2}, \text{ pa je } \overline{HM}^2 = \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ i}$$

$$\overline{SM}^2 = \overline{HM}^2 + \overline{SH}^2 = \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 - ax + a^2.$$

b) Imamo

$$V_1 = \frac{1}{3}P_{\Delta OHM}\cdot\overline{SH} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2x\sqrt{2}}{24} = \frac{1}{3}P_{\Delta OAB}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}$$

Dakle, $V_2 = V - V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} - \frac{a^2x\sqrt{2}}{24} = \frac{a^2\sqrt{2}}{24}(8a-x)$ i $V_1 : V_2 = x : (8a-x)$.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*