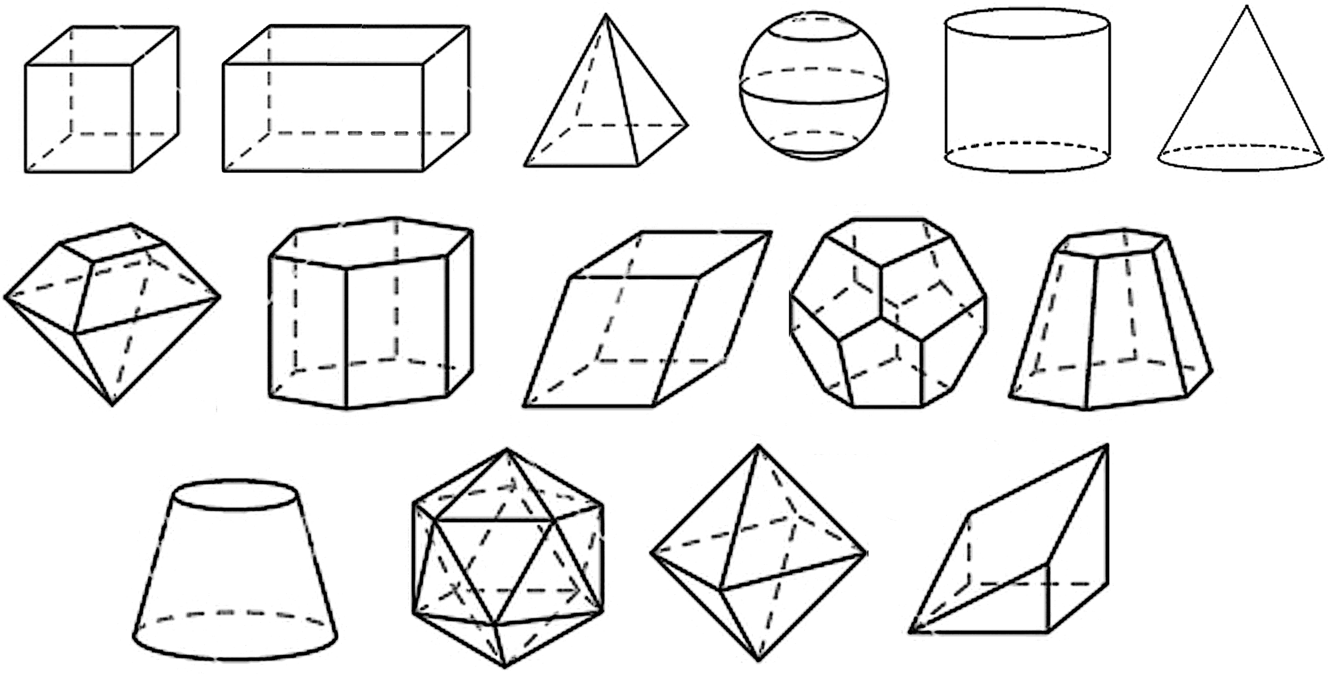
12 Elementarni zadaci: Računanje površine tijela u ravni i trigonometrija

Elementarna pitanja:

1. Nabrojati sve geometriske figure prikazane na slici ispod.

[kocka, kvadar, četverostrana piramida, sfera (kugla), valjak (cilindar), konus (fišek, stožac), zarubljeni oktaedar, šesterostrana prizma, paralelopiped, dodekaedar, zarubljena šesterostrana piramida, zarubljeni konus (frustum), ikosaedar, oktaedar, koso zasječeni kvadar]



1. Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

2. Površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

3. (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\alpha$.

4. Neka je $\square ABCD$ paralelogram kod koga su $AB = a$, $BC = b$, $AC = p$ i $BD = q$. Dokazati da vrijedi jednakost $p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2$ (uputa: iskoristiti kosinusnu teoremu).

Konstruktivni zadaci - Konstrukcija tačke.

5. U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglovima.

6. Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica.

7. Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX + BX = d$, gdje je d data duž.

8. Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX - BX = d$, gdje je d data duž.

9. Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

10. Na pravoj određenoj ivicom AB pravougaonika $\square ABCD$ konstruisati tačku E takvu da su uglovi $\measuredangle AED$ i $\measuredangle DEC$ podudarni.

Konstrukcija luka kruga.

11. Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B, i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

Zadaci za vježbu

12. Na datoj kružnici konstruisati tačku, tako za koju je razlika rastojanja dvije date prave jednaka datoj duži.

Razni zadaci za vježbu (sa rješenjima) iz ravni i prostora

13. Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

14. Na pravoj $p(A, B)$ trougla $\triangle ABC$ data je tačka M takva da je $A - B - M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M, C)$ paralelna simetrali ugla.

15. U četverougao $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za $2\,cm$ (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim $36\,cm$ i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

16. Date su dvije paralelne prave a i b, date su tačke $A \in a$, $B \in b$ i tačka C koja se nalazi "između" pravih a i b. Ako je $\measuredangle CAa = 30^\circ$ i $\measuredangle CBb = 45^\circ$ izračunati ugao $\measuredangle ACB$.

17. Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

18. U $\triangle ABC$ je upisan krug $k(I, r)$. Centar opisanog kruga $k''(M, r'')$ oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A, I]$ i kruga $k'(S, r')$ koji je opisan oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C, M)$ gdje je M centar kruga k''.

19. Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od 90° u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

20. Poluprečnik baze (osnove) uspravnog valjka (cilindra) povećan je za 200%, a visina valjka je smanjena za $p\%$. Ako se zapremina tog valjka povećala za $p\%$, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.

21. Zbir dužina prečnika baze i visine prave (uspravne) kupe je 18. Od svih takvih kupa odrediti površinu one koja ima najveću zapreminu.

22. Jednakokraki trougao čiji je obim $O = 64\,\text{cm}$, a visina na osnovicu $h_a = 24\text{cm}$ rotira oko kraka b. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog rotacionog tijela.

23. Data su dva jednaka pravougla jednakokraka trougl a $\triangle OAB$ i $\triangle OAC$ koji pripadaju dvjema međusobno okomitim ravnima. Neka su dužine hipotenuza OB i OC jednake $2a$. Sa S ćemo označiti središte hipotenuze OC, sa H središte duži OA, a sa M proizvoljnu tačku duži OB. Neka je x dužina duži OM.

(a) Izraziti SM^2 kao funkciju od a i x.

(b) U općem slučaju ravan (SHM) dijeli piramidu $OABC$ na dva dijela. Izraziti odnos zapremine piramide $SOHM$ i zapremine drugog dijela kao funkciju od a i x.