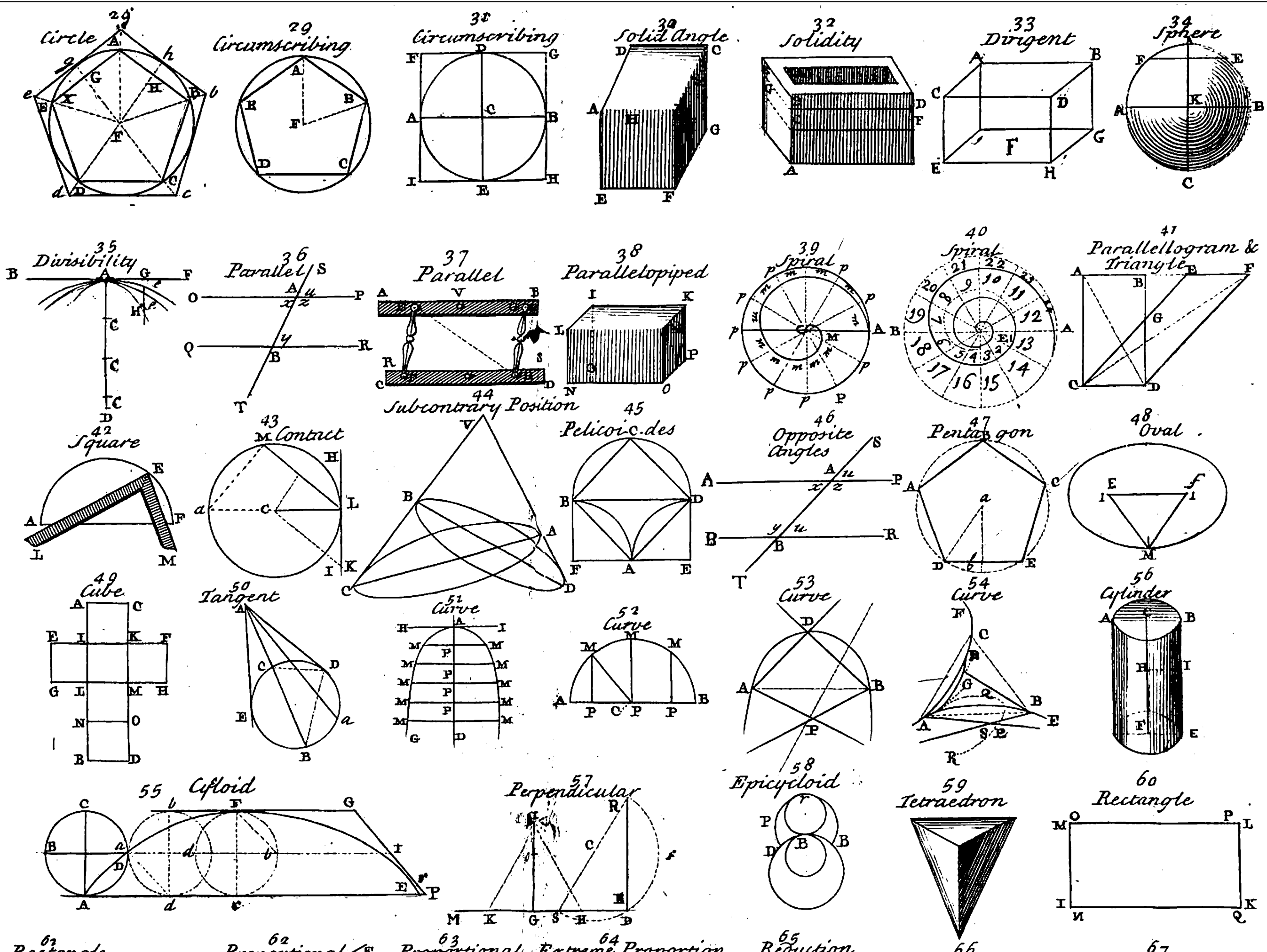
11 Elementarni zadaci: Omjeri u trouglu i deltoid

Elementarna pitanja:

1. Kako glasi definicija Deltoida? [Deltoid je konveksan četverougao koji ima dva para susjednih podudarnih stranica. Ili, deltoid je konveksan četverougao u kojem iz dva dijagonalna tjemena izlaze po dvije međusobno podudarne stranice.]
2. Kakvu osobinu imaju dijagonele deltoida?
3. Na slici ispod pronaći deltoid, petougao, cilindar, cikloidu, paralelne prave, kvadar, tetraedar...



1. U trouglu $\triangle ABC$ je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice $\triangle ABC$) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1 : 2$ računajući od vrha A.

2. Ako jednakostraničnom trouglu $\triangle ABC$ (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijemo trougao $\triangle A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$.

3. Dokazati da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

4. Centar upisanog kruga u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu $12 : 5$. Ako je dužina kraka trougla $60\,cm$, naći dužinu osnovice tog trougla.

5. Deltoid je upisan u krug k_1. Kraća dijagonala dijeli dužu na odsječke $37\,cm$ i $54\,cm$. Nad tim odsječcima kao nad prečnicima konstruisani su krugovi k_2 i k_3. Naći površinu $P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3}$, označiti na slici šta predstavlja ova površina i odrediti dužinu kraće dijagonale BD.

Konstruktivni zadaci - Konstrukcije prave.

6. Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

7. Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

8. Date su podudarne kružnice k_1 i k_2, i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

9. Kroz datu tačku konstruisati pravu koja siječe datu kružnicu pod datim uglom.

Napomena. *Ugao između prave i kruga* je ugao kojeg zaklapa data prava sa tangentom koja je povučena u tački presjeka prave i kruga.

10. Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

11. Konstruisati pravu koja siječe dvije date kružnice pod datim uglom.

12. Date su tačke A, B i C. Konstruisati kroz tačku C pravu, tako da su tačke A i B podjednako udaljene od te prave.

13. Date su tačke A i B, i kružnica k. Konstruisati paralelne prave a i b kroz tačke A i B redom, tako da kružnica k odsjeca na njima podudarne tetive.

14. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima.

15. Kroz datu tačku u ravni datog paralelograma povući pravu koja dijeli taj paralelogram na dva podudarna dijela.

16. Kroz tačku C pravouglog trougla $\triangle ABC$ konstruisati pravu koja će trougao podijeliti na dva dijela tako da su površine dobijenih dijelova jednaki.

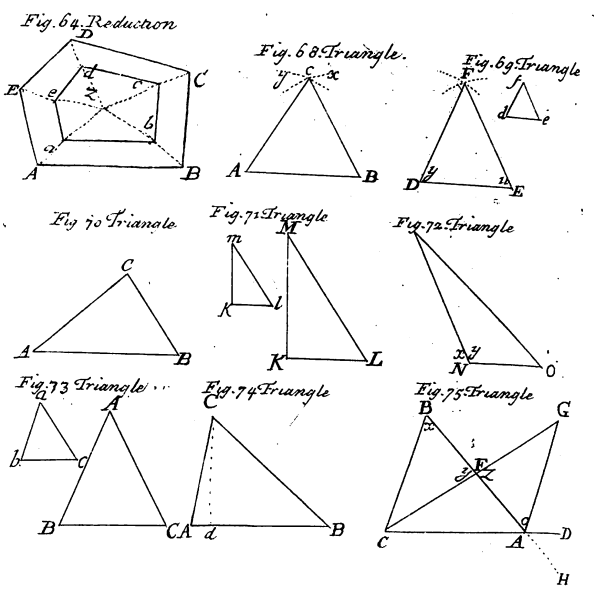
17. Dat je $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD + EB = DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

18. Dat je $\triangle ABC$. Kroz vrh A konstruisati pravu koja će dati trougao podijeliti na dva trougla sa jednakim površinama.

Zadaci za vježbu

19. Date su tačke A, B, C i duž d. Kroz tačku A konstruisati pravu, tako da zbir rastojanja tačaka B i C od te prave bude jednak duži d.

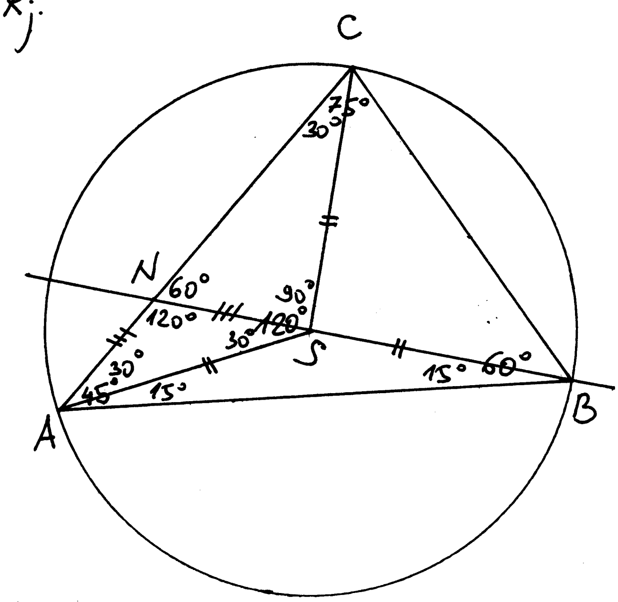
20. Date su kružnice k_1 i k_2 i duži d_1 i d_2. Konstruisati pravu koja siječe kružnicu k_1 u tačkama A_1 i B_1 i kružnicu k_2 u tačkama A_2 i B_2, tako da je $A_1B_1 = d_1$ i $A_2B_2 = d_2$.



21. Obrazložiti šta predstavljaju figure na slici desno.

(#) U trouglu ΔABC je $\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$. Dokazati da prava koja sadrži polupréčnik BS (S je centar opisane kružnice ΔABC) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1:2$ računajući od vrha A.

Rj.



$\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{4}{5}$

$\alpha = \frac{3}{4}\beta$ $\quad \gamma = \frac{5}{4}\beta$

$\alpha+\beta+\gamma = 180°$

$\frac{3}{4}\beta + \beta + \frac{5}{4}\beta = 180°$

$3\beta = 180°$

$\beta = 60°$

$\Rightarrow \alpha = 45°$; $\gamma = 75°$

$\sphericalangle ASC$ centralni ugao nad tetivom AC

$\sphericalangle ASC = 120°$ $\Rightarrow \sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA =$

ΔABS jkk sa osnovicom AB $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 15°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle CNB = 60°$ (vanjski ugao ΔABN)

$\Rightarrow \sphericalangle ANB = 120°$ $\Rightarrow \sphericalangle ASN = 30°$ $\Rightarrow$ $AN \cong SN$

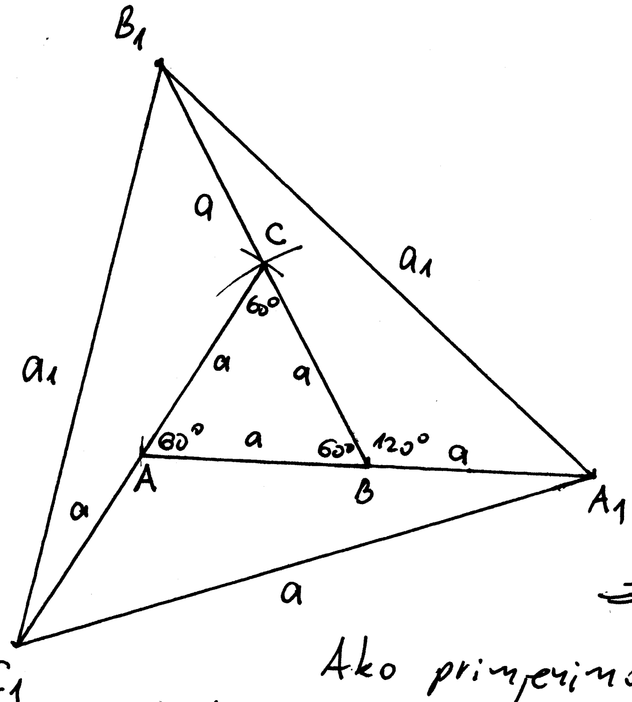
ΔNSC je pravougli pa $\cos 60° = \frac{SN}{CN}$ $\Rightarrow$ $CN \cdot \frac{1}{2} = SN = AN$

$CN = 2AN$

tj. $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ q.e.d.

Ako jednakostraničnom trouglu ΔABC (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijemo trougao $\Delta A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$?

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike. Dužinu stranice a_1 ćemo odrediti na dva načina.

I način

Primjetimo da kako je ΔABC jks to $\measuredangle BAC = \measuredangle B = \measuredangle C = 60°$

$\Rightarrow \measuredangle B_1BA_1 = 120°$.

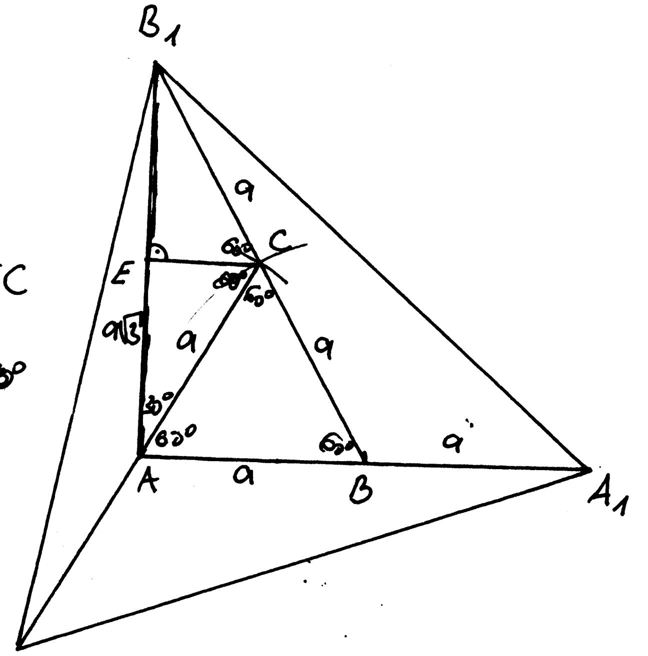
Ako primjenimo kosinusnu teoremu na stranicu a_1 u ΔB_1BA_1 imamo

$$a_1^2 = (2a)^2 + a^2 - 2(2a)\cdot a \cdot \cos 120° = 4a^2 + a^2 - 4a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a\sqrt{7}$$

II način

Posmatrajmo ΔACB_1 i neka je CE visina tog trougla



$AC \cong CB_1$
$CE \cong CE$
$\measuredangle CEA \cong \measuredangle CEB_1 = 90°$ } $\xRightarrow{SSU}$ (ugao naspram veće str.) $\Delta AEC \cong \Delta B_1EC$

$\Downarrow$

$\measuredangle ECA \cong \measuredangle B_1CE = 60°$ $(\measuredangle ACB = 120°)$

$\Rightarrow \measuredangle CAE = 30° \Rightarrow \measuredangle A_1AB_1 = 90°$

ΔABB_1 pravougli $\xRightarrow{\text{Pit. teor.}}$ $AB_1^2 = 3a^2$

ΔA_1AB_1 pravougli $\xRightarrow{\text{Pit. teor.}}$ $A_1B_1^2 = 7a^2$

$\Rightarrow \quad a_1 = a\sqrt{7}$

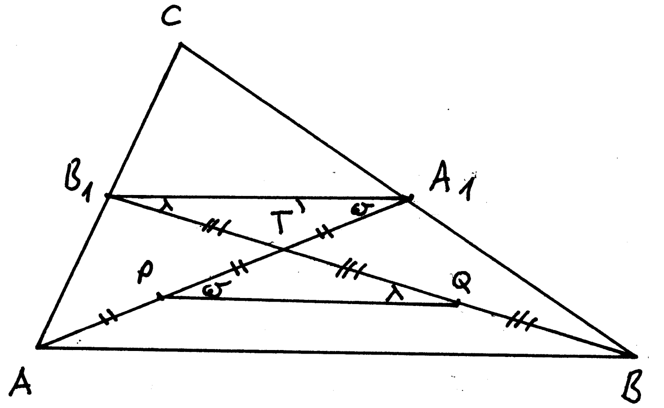
Sada imamo:

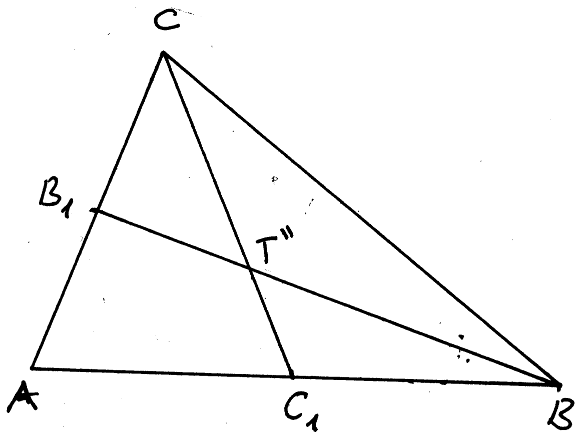
$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a_1\cdot h}{2} = \frac{a_1\sqrt{a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}}}{2} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 7\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 7\,P_{\Delta ABC}$$

$$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta A_1B_1C_1} = 1 : 7$$

(#) Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu ΔABC i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija ΔABC pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.

Neka su P i Q redom središta duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\Delta ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\Delta PQT'$ i $\Delta B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

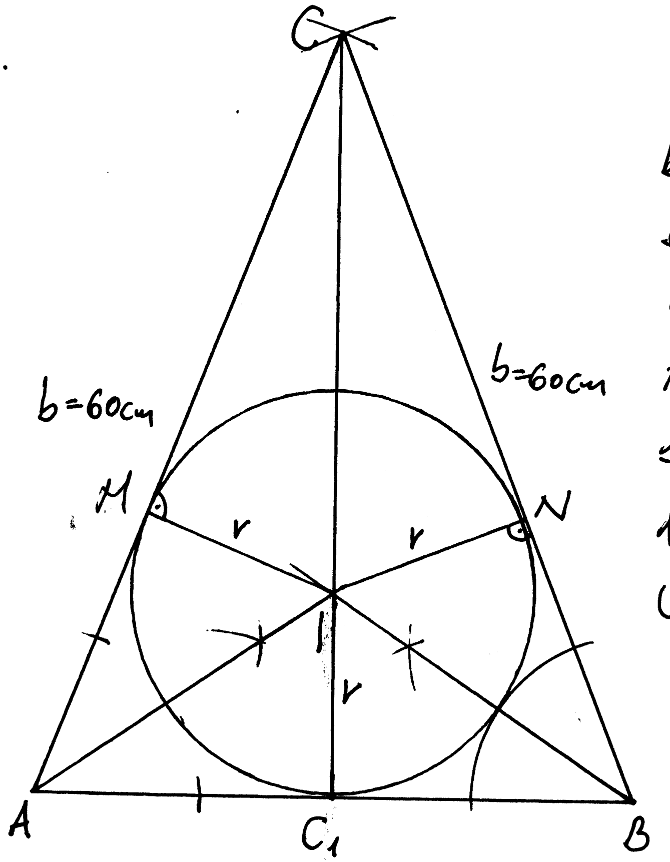
Pa imamo $\quad \dfrac{AT'}{T'A_1} = \dfrac{BT'}{T'B_1} = \dfrac{2}{1}$.

Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\dfrac{CT''}{T''C_1} = \dfrac{BT''}{T''B_1} = \dfrac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

(#) Centar upisane kružnice u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu 12 : 5. Ako je dužina kraka trougla 60 cm, naći dužinu osnovice tog trougla.

Rj.



Označimo sa I centar upisanog kruga. Visina CC_1 spuštena na stranicu AB je ujedno i simetrala ugla $\measuredangle ACB$ pa je $I \in CC_1$. Posmatrajmo trouglove $\triangle AIC$ i $\triangle BIC$. U $\triangle AIC$ visina na stranicu AC je $MI = r$.

U $\triangle BIC$ visina na stranicu BC je $NI = r$.

U $\triangle ABI$ visina na stranicu AB je $C_1I = r$.

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AIC} + P_{\triangle BIC} + P_{\triangle ABI}$$

(ako označimo sa $h = CC_1$, sa $a = AB$, i sa $b = BC = AC$)

$$\frac{h \cdot a}{2} = \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot a}{2}$$

($b = 60$ cm)

$$\frac{h \cdot a}{2} = r \cdot 60 + \frac{r \cdot a}{2}$$

(Znamo $\frac{CI}{IC_1} = \frac{12}{5}$ (iz postavke)

$$\frac{CI}{IC_1} + 1 = \frac{12}{5} + 1$$

$$\frac{\overbrace{CI + IC_1}^{=h}}{\underbrace{IC_1}_{=r}} = \frac{17}{5} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{17}{5}$$

$$h = \frac{17}{5} r$$

... (1))

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{17}{5} r \cdot \frac{a}{2} = 60r + \frac{a}{2} r \quad /:r$$

$$60 + \frac{a}{2} = \frac{17a}{10} \quad / \cdot 10$$

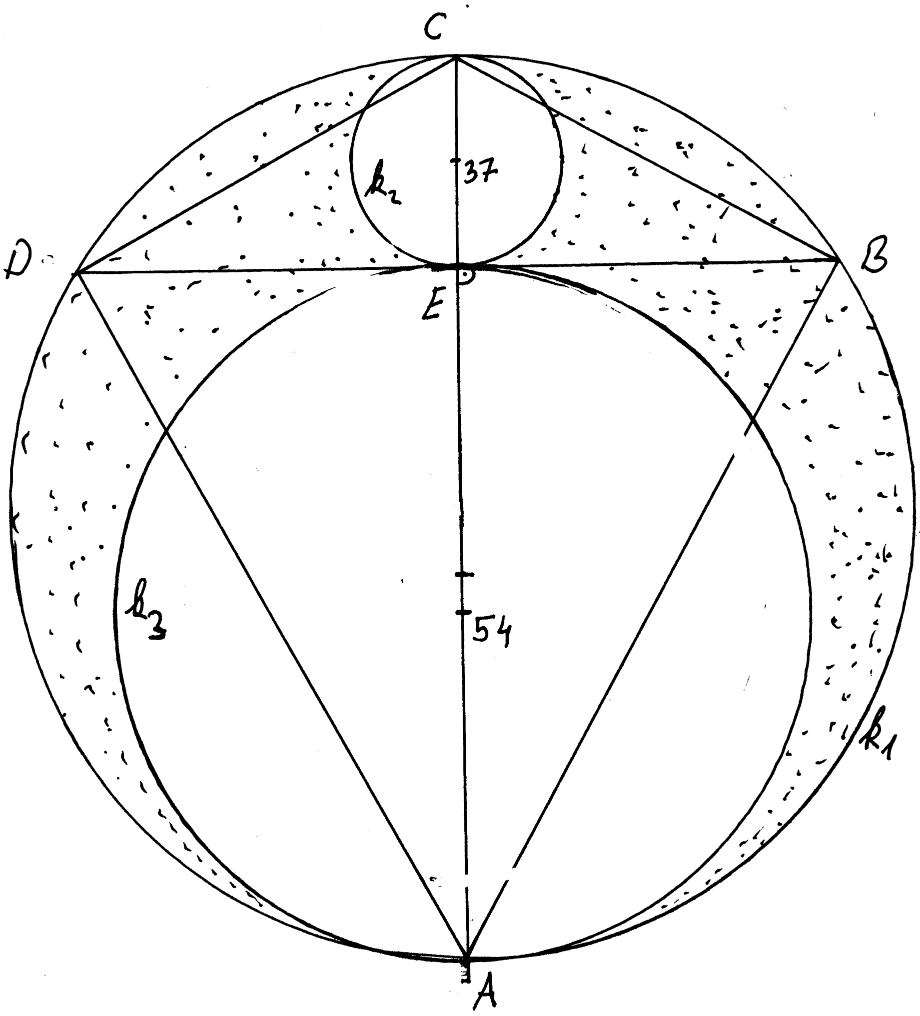
$$17a - 5a = 600$$

$$12a = 600$$

$$a = 50 \text{ cm} \leftarrow \text{traženo rješenje}$$

(#) Deltoid je upisan u krug k_1. Kraća dijagonala dijeli dužu na odsječke 37 cm i 54 cm. Nad tim odsječcima kao nad prečnicima konstruisani su krugovi k_2 i k_3. Naći površinu $P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3}$, označiti na slici šta predstavlja ova površina i odrediti dužinu kraće dijagonale BD.

Rj.



P je označena na slici istačkano.

$$P_{k_1} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{54+37}{2}\right)^2 \pi$$

$$P_{k_2} = \left(\frac{EC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{37}{2}\right)^2 \pi$$

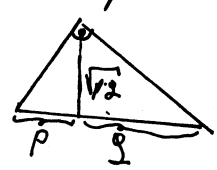
$$P_{k_3} = \left(\frac{AE}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{54}{2}\right)^2 \pi$$

$$P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3} =$$

$$= \frac{54^2 + 2 \cdot 54 \cdot 37 + 37^2 - 37^2 - 54^2}{4} \pi$$

$$= 27 \cdot 37 \pi = 999 \pi$$

Primjetimo da je $\angle ABC$ u stvari ugao nad prečnikom AC pa je $\angle ABC = 90°$. Od ranije znamo da



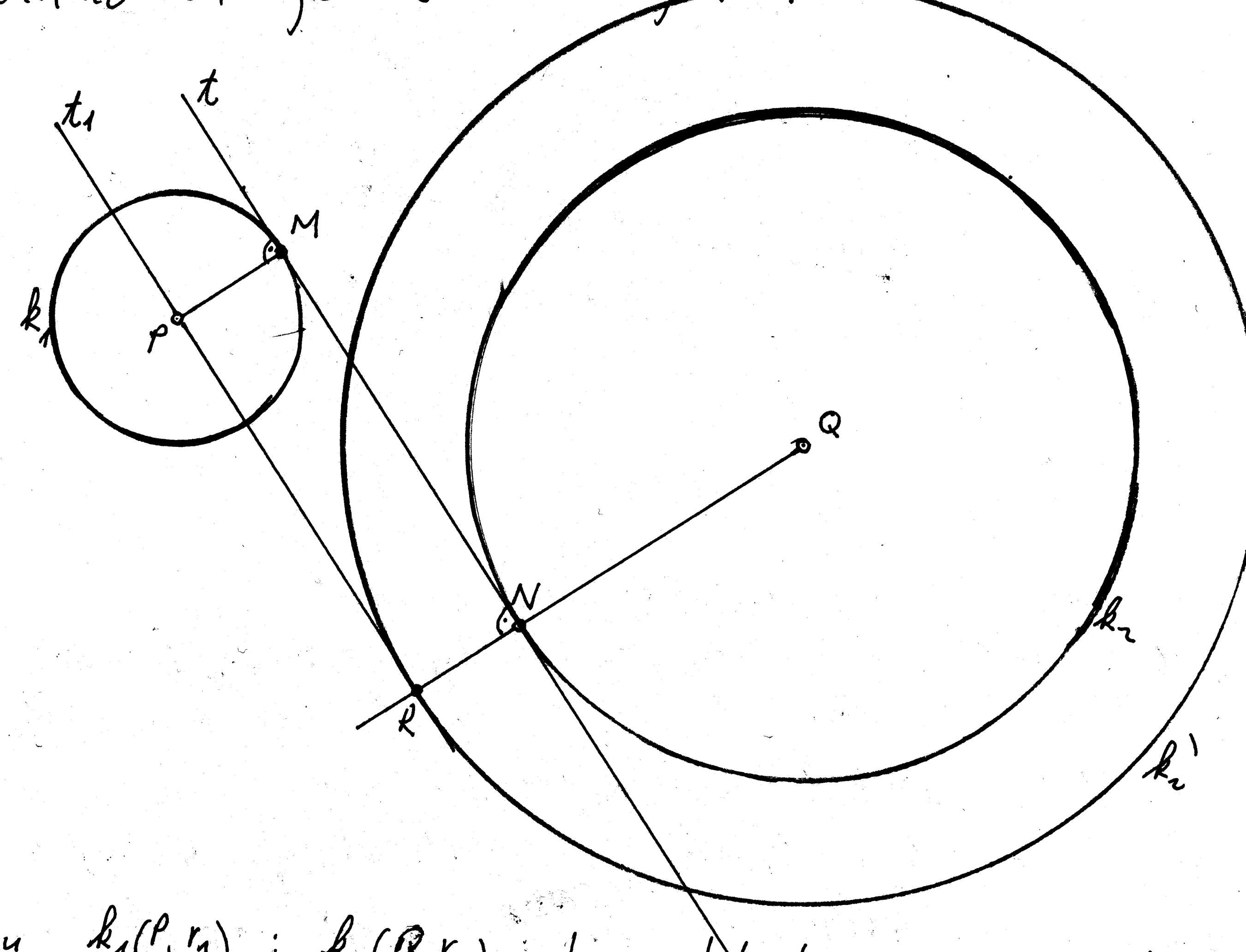
pa $BE = \sqrt{37 \cdot 54} = \sqrt{37 \cdot 6 \cdot 9} = 3\sqrt{222}$

$BD = 6\sqrt{222}$.

(#) Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

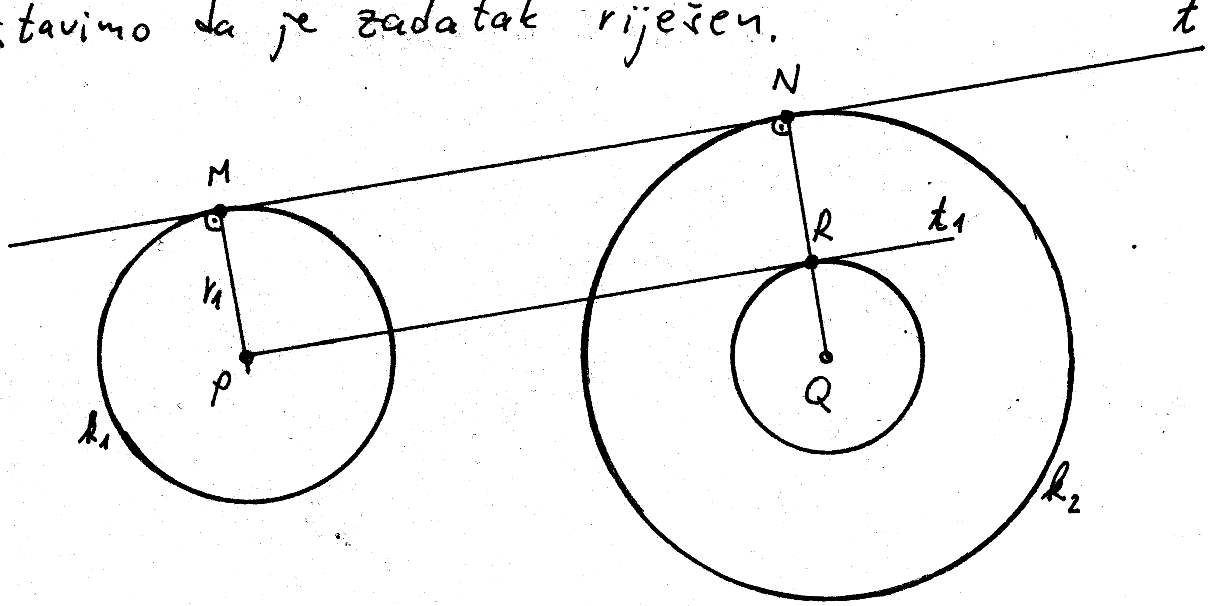
Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

(#) Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta $(r_2 > r_1)$. Označimo sa M tačku dodira k_1 i t, a sa N tačku dodira k_2 i t.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P, M) \parallel p(Q, N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $t_1 \ni P$ i $t_1 \cap NQ = \{R\}$ $(NQ > PM)$.

Imamo da je $\square PRNM$ paralelogram (preciznije pravougaonik).

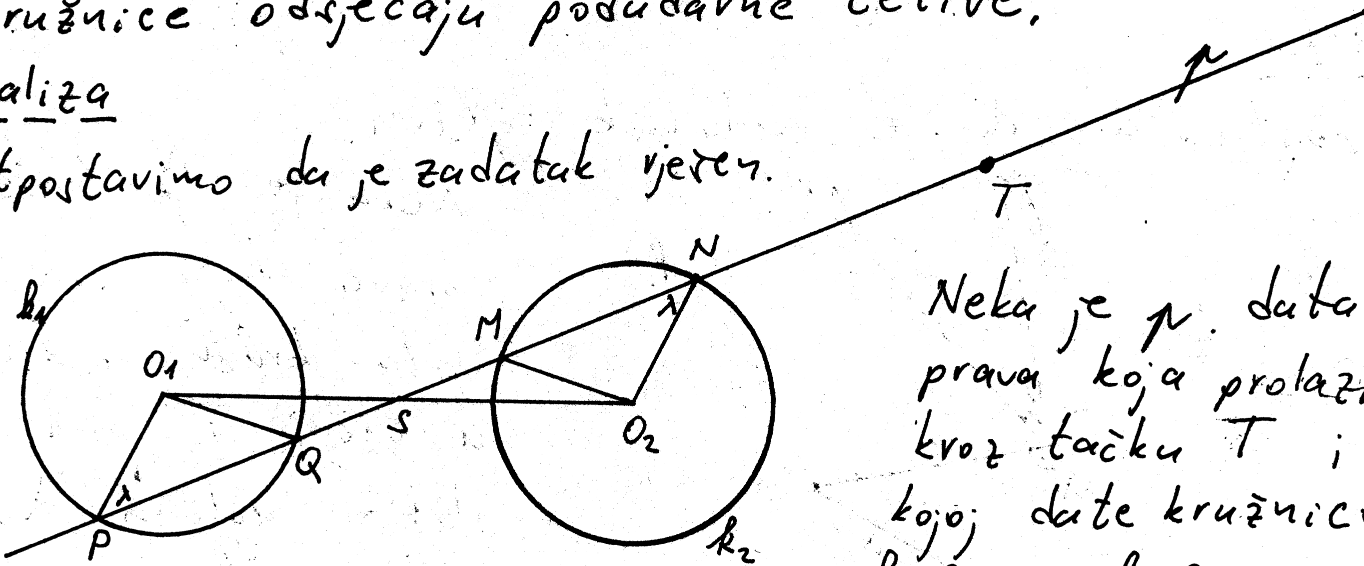
$QR = r_2 - r_1$, pa kako su tačke P i Q date mogu konstruisati tangentu t_1.

Tangenta t je paralelna sa t_1 i udaljena je od t_1 za dužinu r_1, pa je možemo konstruisati.

(#) Date su podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku T i kojoj date kružnice $k_1(O_1,r)$ i $k_2(O_2,r)$ odsjecaju podudarne tetive PQ i MN.

$\Delta PQO_1 \cong \Delta MO_2N$ (podud. SSS)

$\Downarrow$

$\sphericalangle O_1PQ \cong \sphericalangle MNO_2 = \lambda$. Neka je $\{S\} = p \cap O_1O_2$.

Sad imamo
$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle O_1SP &\cong \sphericalangle NSO_2 \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle SPO_1 &\cong \sphericalangle SNO_2 = \lambda \\ PO_1 &\cong NO_2 = r \end{aligned}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta PSO_1 \cong \Delta NSO_2$$
$\Downarrow$
$O_1S \cong O_2S$.

Prema tome S je sredina duži O_1O_2 pa pravu p sad nije teško konstruisati.

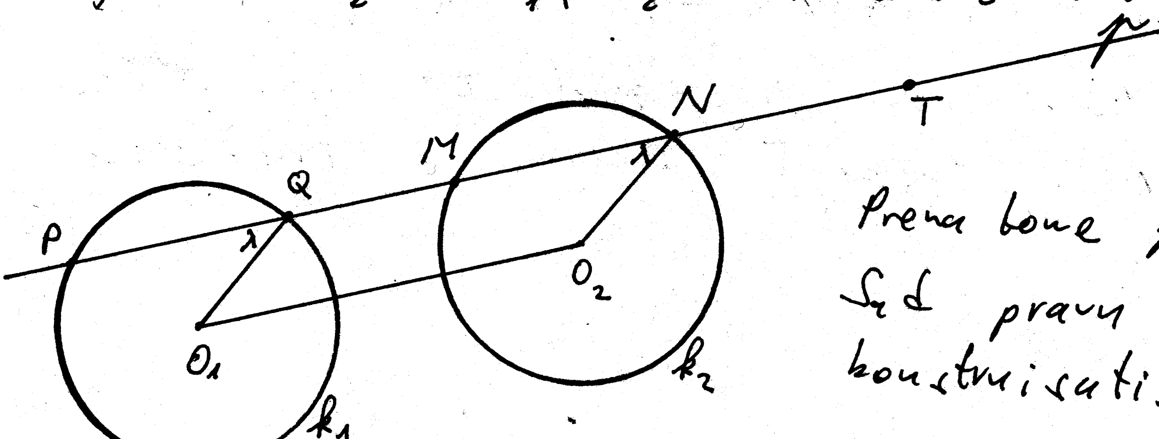
II način

Iz podudarnosti SSS $\Rightarrow$ $\Delta PQO_1 \cong \Delta MNO_2$

$\Downarrow$

$\sphericalangle O_1QP \cong \sphericalangle O_2NM = \lambda$.

Kako je $O_1Q \cong O_2N$ i $O_1Q \parallel O_2N$ $\Rightarrow$ $\square O_1O_2NQ$ je paralelogram.



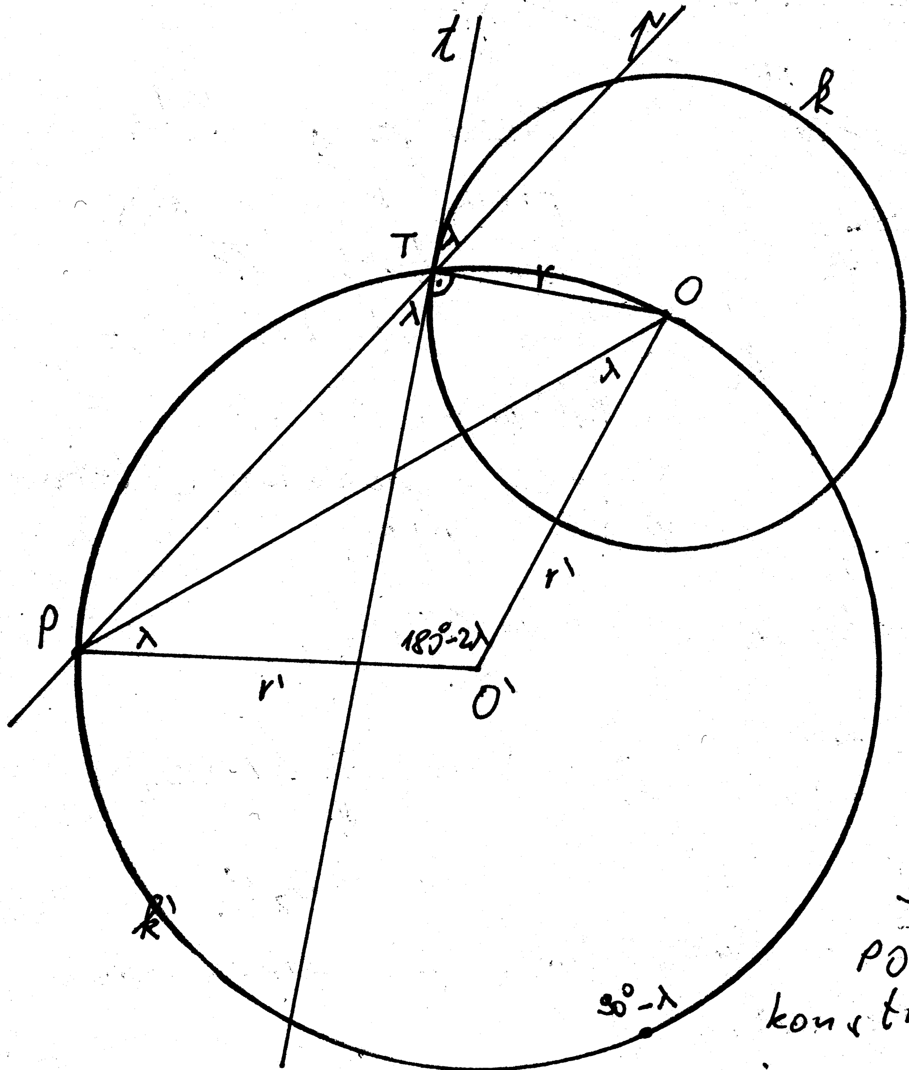
Prema tome $p \parallel O_1O_2$.

Sad pravu p možemo konstruisati.

(#) Kroz datu tačku konstruisati pravu koja siječe datu kružnicu pod datim uglom.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja siječe datu kružnicu $k(O,r)$ u tački T, pod datim uglom λ. Neka je t tangenta na krug k u tački T.

I način

Primjetimo da je ugao $\measuredangle OTP = 90^\circ + \lambda$. Kako su poluprečnik r i duž PO poznati to nije teško konstruisati $\measuredangle OPT$ a time i pravu p.

II način

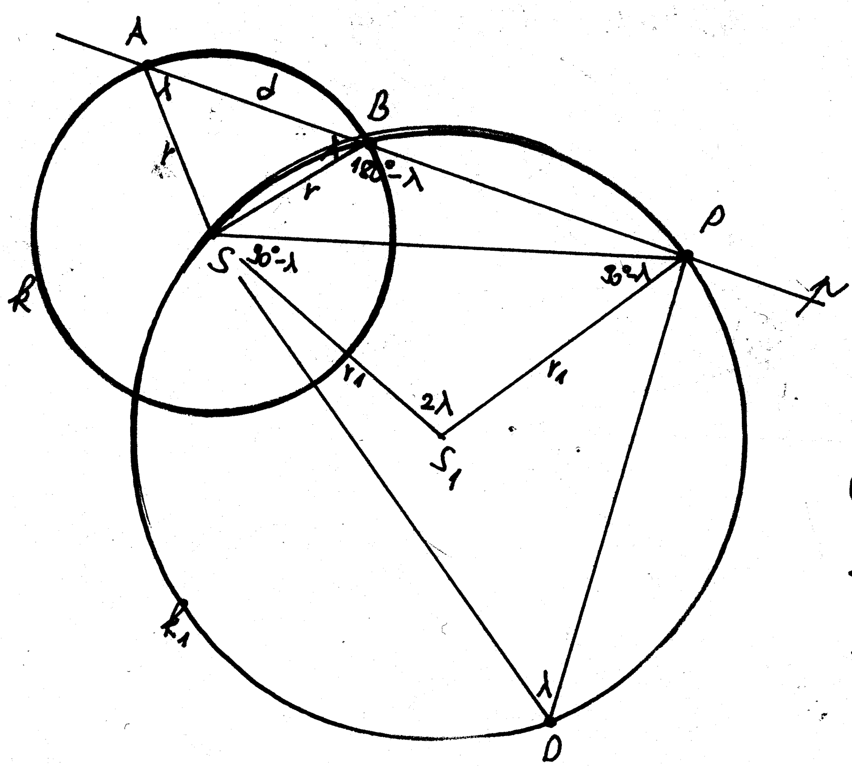
Primjetimo da je $\measuredangle OTP = 90^\circ + \lambda$. Neka je $k'(O', r')$ kružnica opisana oko trougla $\triangle POT$. Tada je $\measuredangle PO'O = 180^\circ - 2\lambda$ (Zašto?) pa je i $\measuredangle OPO' = \measuredangle O'OP = \lambda$ (Zašto?).

Kako su duž PO i ugao λ poznati to nije teško konstruisati $\triangle PO'O$, tačku T pa time i traženu pravu p.

(#) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja prolazi kroz datu tačku P i na datoj kružnici $k(S, r)$ odsjeca tetivu AB podudarnu datoj duži d.

Označimo uglove

$\measuredangle SAB \cong \measuredangle SBA = \lambda$

$\Rightarrow \quad \measuredangle PBS = 180° - \lambda$

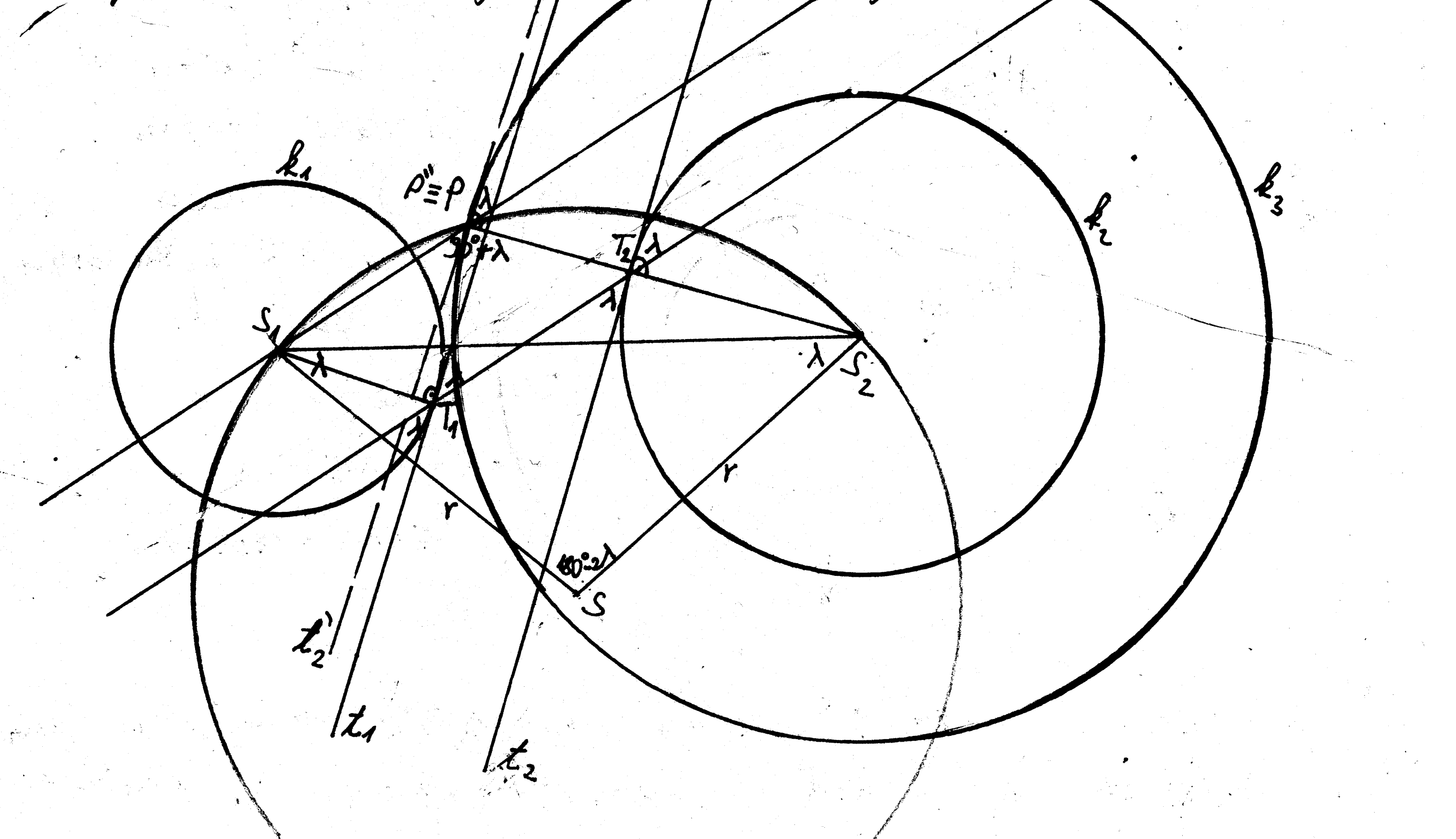
Ako je $k_1(S_1, r_1)$ kružnica opisana oko $\triangle SPB$ tada proizvođen oštri periferiski ugao nad tetivom SP iznosi λ, centralni ugao nad tetivom SP je $\measuredangle SS_1P = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle PSS_1 \cong \measuredangle S_1PS = 90° - \lambda$.

U trouglu $\triangle ASB$ su nam poznate sve tri stranice pa ugao λ možemo konstruisati. Kako je data duž PS to i kružnicu k_1 možemo konstruisati pa dobiti i tačku B. Sad nije teško konstruisati traženu pravu p.

Konstruisati pravu koja siječe dvije date kružnice pod datim uglom. (Ugao između prave i kruga je ugao kojeg zaklapa data prava sa tangentom koja je povučena u tački presjeka prave i kruga.).

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja siječe kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k(S_2, r_2)$ redom u tačkama T_1 i T_2 pod datim uglom λ.

Kroz tačku S_1 paralelno pravoj p povucimo pravu p'.

Označimo sa k_2 kružnicu $k(S_2, r_1+r_2)$.

Neka je $\{P, P'\} = p' \cap k_3$: $S_1 - P - P'$.

Neka $p(S_2, T_2) \cap k_3 = \{P''\}$. Dokažimo da je $P'' \equiv P$.

$P''T_2 \perp t_2$, $P''T_2 = r_1$, $S_1T_1 \perp t_1$, $S_1T_1 = r_1$ $\Rightarrow$ $\square S_1T_1T_2P''$ paralelogram

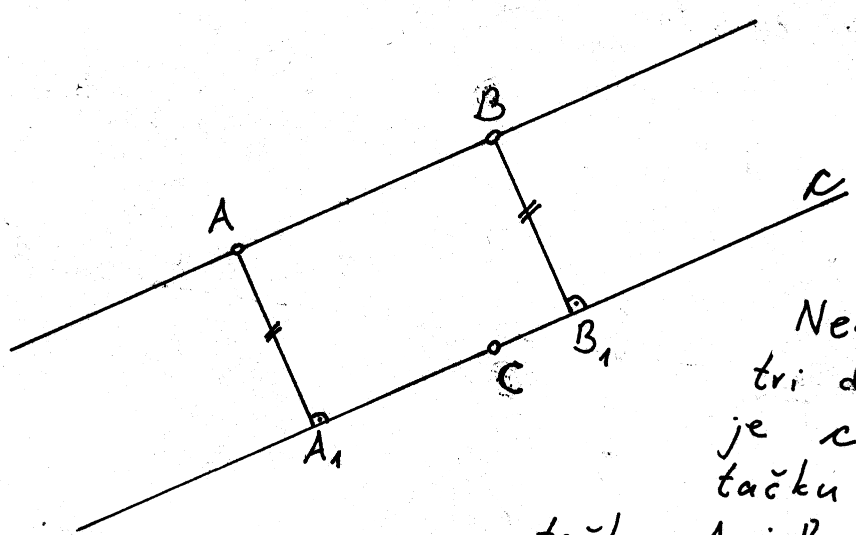
$\Rightarrow P'' \in p' \Rightarrow P'' \equiv P$. $\quad \sphericalangle S_2PS_1 \cong \sphericalangle S_2T_2T_1 = 90° + \lambda$

Kako su nam poznati centri S_1 i S_2, kružnice k_1 i k_3 (i k_2) sad nije teško konstruisati tačku P a poslije toga i traženu pravu p.

Date su tačke A, B i C. Konstruisati kroz tačku C pravu, tako da su tačke A i B podjednako udaljene od te prave.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



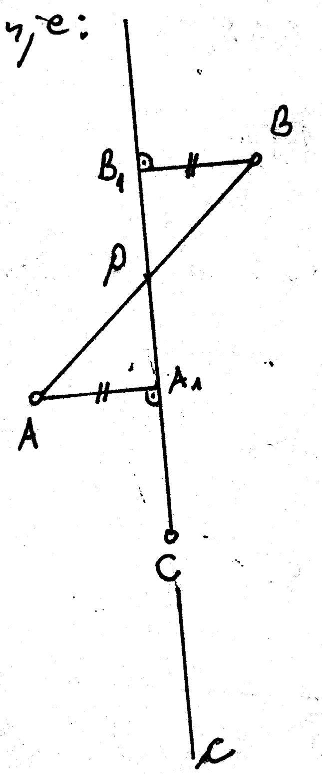
Neka su A, B i C tri date tačke i neka je c prava koja sadrži tačku C takva da su tačke A i B podjednako udaljene od nje.

Neka su A_1 i B_1 tačke koje pripadaju c, koje su ortogonalne projekcije tački A i B. Imamo

$AA_1 \parallel BB_1$ i $AA_1 \cong BB_1 \Rightarrow \square AA_1B_1B$ paralelogram

$\Rightarrow p(A,B) \parallel c$ pa pravu c možemo konstruisati.

II rješenje:



Neka su A, B i C tri date tačke.
Neka je c prava koja sadrži tačku C takva da su tačke B i C podjednako udaljene od prave c.
Označimo sa A_1 i B_1 ortogonalne projekcije tački A i B.
Neka je $\{P\} = AB \cap c$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle APA_1 \cong \sphericalangle BPB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle AA_1P \cong \sphericalangle BB_1P = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{USS} \triangle AA_1P \cong \triangle BB_1P$$

$$\Downarrow$$

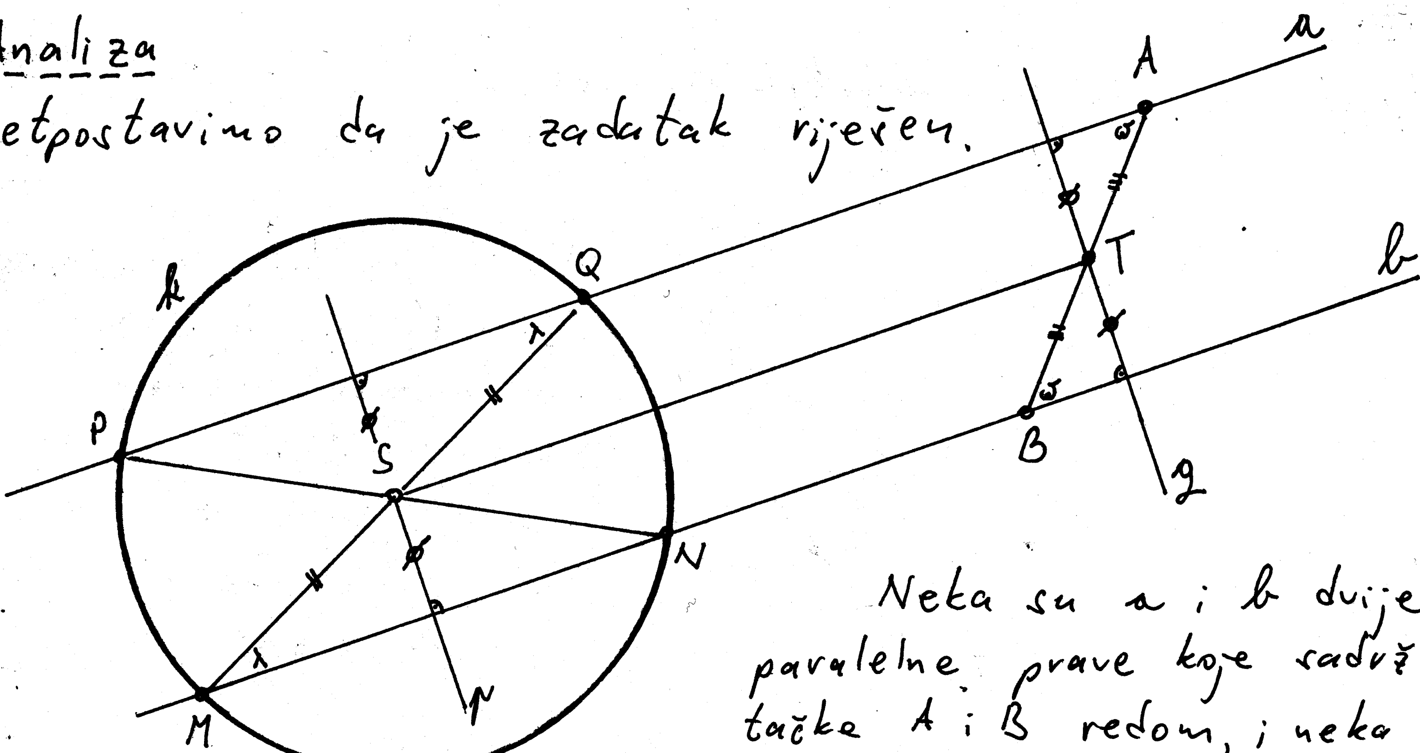
$$AP \cong BP$$

Prava c prolazi kroz sredinu duži AB, pa je možemo konstruisati.

(#) Date su tačke A i B i kružnica k. Konstruisati paralelne prave a i b kroz tačke A i B redom, tako da kružnica k odsjeca na njima podudarne tetive.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su a i b dvije paralelne prave koje sadrže tačke A i B redom, i neka je k data kružnica sa centrom u S koja na pravama odsjeca podudarne tetive PQ i MN.

Primjetimo da je $\square MNQP$ pravougaonik i da je $MS \cong NS \cong PS \cong QS$ (zašto?). (ugao nad prečnikom...).

Neka je tačka T sredina duži AB.

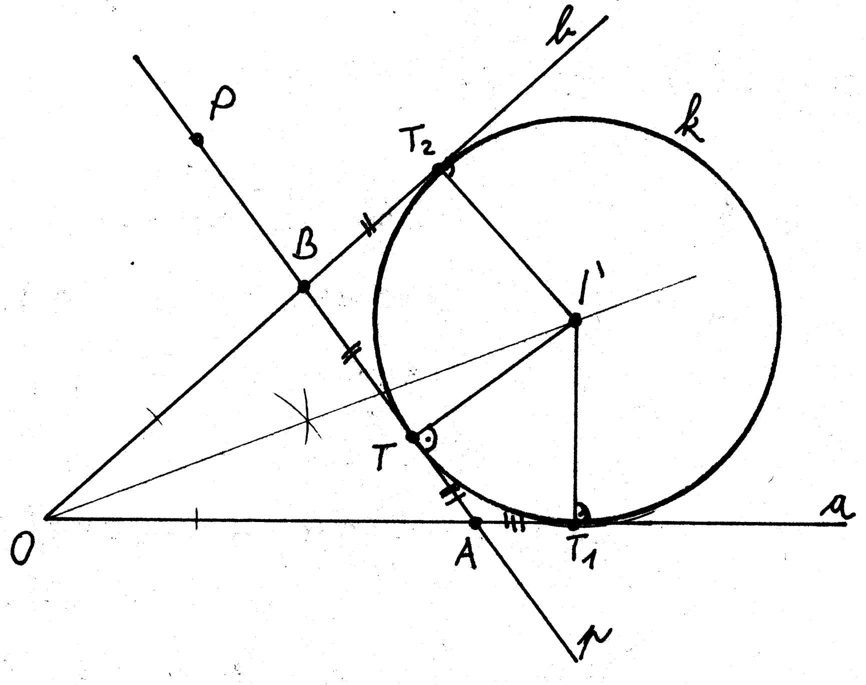
Dalje, duž TS je srednja linija $\square MBAQ$ ili četverougla $\square PNBA$ pa je $p(S,T) \parallel p(P,Q) \parallel p(M,N)$. Ovo možemo i dokazati tako što ćemo kroz S provući pravu p takvu da $p \perp b$ a time $p \perp a$, i kroz tačku T provući pravu g takvu da $g \perp a$ a time $g \perp b$. Sad primjetimo...

Kako pravu $p(S,T)$ možemo konstruisati, time možemo konstruisati i tražene prave a i b.

(#) Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsijeca trougao datog obima.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku P i od datog ugla $\measuredangle aOb$ odsijeca trougao ΔOAB.

stranici AB trougla ΔOAB pripišimo kružnicu k sa centrom u I'.

Označimo sa T tačku dodira kružnice k i prave p, a sa T_1 i T_2 tačke dodira kružnice k sa pravima a i b.

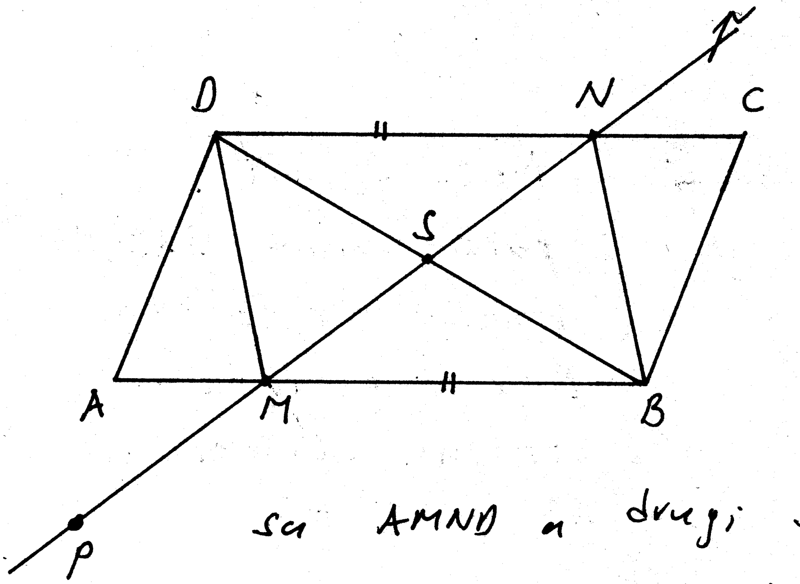
Iz osobina tangenti na kružnicu znamo da je $AT \cong AT_1$ i da je $BT \cong BT_2$ (da li bi ovo znali dokazati?)

Kako je dat $\measuredangle aOb$ i obim trougla ΔOAB tačke T_1 i T_2 nije problem konstruisati, a time i kružnicu k. Ako iz tačke P povučemo tangentu na k dobićemo tačke A i B, a time i ΔOAB.

(#) Kroz datu tačku u ravni datog paralelograma povući pravu koja dijeli taj paralelogram na dva podudarna dijela.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data tačka P u ravni paralelograma $\square ABCD$ i neka je p prava koja dijeli dati paralelogram na dva podudarna dijela (jedan dio označimo sa $AMND$ a drugi sa $MBCN$).

Iz podudarnosti ova dva dijela slijedi da je $BM \cong DN$. (odgovarajuće stranice i odgovarajući uglovi su podudarni).

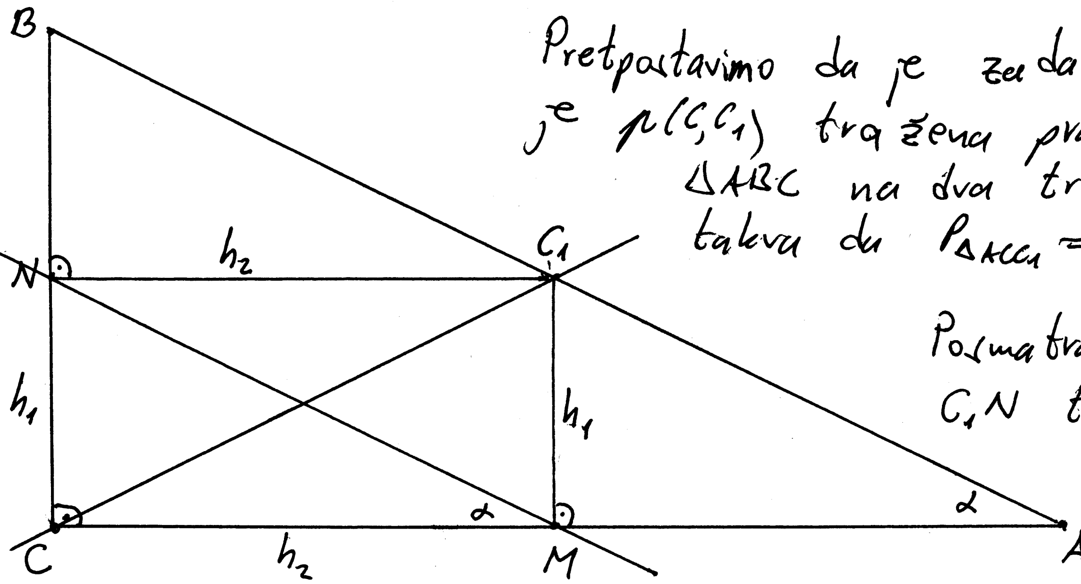
$MB \parallel DN \wedge MB \cong DN \Rightarrow \square MBND$ je paralelogram u kome prava p sadrži dijagonalu MN.

Dijagonale u paralelogramu se polove $\Rightarrow$ prava p sadrži sredinu S dijagonale BD (S je sredina i dijagonale AC).

Prema tome tražena prava p sadrži date tačke P i S pa je možemo konstruisati.

(#) Kroz tačku C pravouglog trougla ΔABC konstruisati pravu koja će trougao podjeliti na dva dijela tako da su površine dobijenih dijelova jednaki.

Rj: Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $p(C,C_1)$ tražena prava koja dijeli trougao ΔABC na dva trougla ΔCAC_1 i ΔCC_1B takva da $P_{\Delta ACC_1} = P_{\Delta CC_1B}$.

Posmatrajmo visine C_1M i C_1N trouglova ΔACC_1 i ΔCC_1B. Uvedimo oznake $AC=b$, $BC=a$, $C_1M=h_1$ i $C_1N=h_2$.

$$P_{\Delta ACC_1} = P_{\Delta CC_1B} \Rightarrow \frac{h_1 \cdot b}{2} = \frac{h_2 \cdot a}{2} \Rightarrow h_1 b = h_2 a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\xRightarrow{MC \cong NC_1 = h_2,\ CN \cong MC_1 = h_1} \frac{CA}{CB} = \frac{CM}{CN} \Rightarrow \frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN} \xRightarrow{O.T.T.} p(M,N) \parallel p(A,B)$$

$p(M,N) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CMN \cong \measuredangle CAB = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAC_1 \cong \measuredangle CMN = \alpha \\ \measuredangle AMC_1 \cong \measuredangle MCN = 90^\circ \\ MC_1 \cong CN \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta AMC_1 \cong \Delta MCN$$

$$\Downarrow$$

$$CM \cong MA$$

$\Rightarrow$ NC_1 srednja linija ΔABC i M sredina AC

$\Rightarrow$ C_1 sredina hipotenuze AB

Kako je lagano pronaći sredinu C_1 hipotenuze AB to pravu $p(C,C_1)$ nije teško konstruisati.

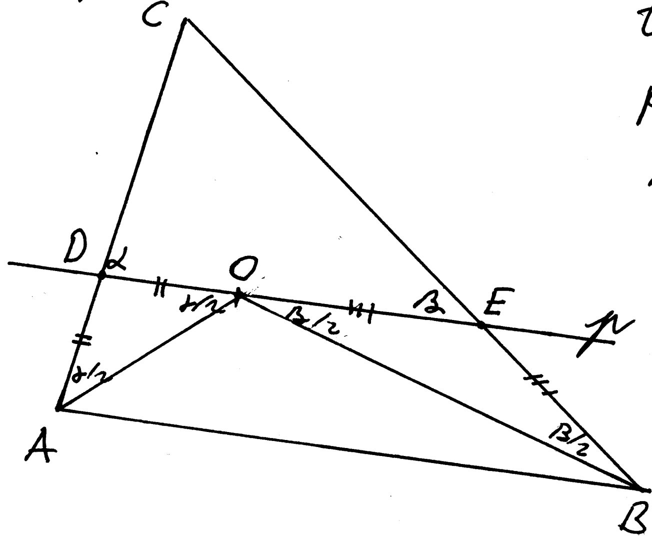
(#) Dat je ΔABC. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD+EB=DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

Rj.:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC dati trougao, i neka je p tražena prava takva da $E \in p$, $p \parallel AB$, $p \cap AC = \{D\}$, $p \cap \{B, C\} = \{E\}$ i

$AD + BE = DE$.



Na duži DE izaberimo tačku O takvu da $AD \cong DO$. i

Kako je $AD + BE = DE$ to je $OE \cong BE$.

$p \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle EDC = \alpha$.

$p \parallel AB$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEC = \beta$.

$\measuredangle EDC = \alpha$ je vanjski ugao jednakokrakog $\Delta AOD \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle AOD \cong \measuredangle OAD = \frac{\alpha}{2}$.

Ugao $\measuredangle DEC = \beta$ je vanjski ugao jkk $\Delta OBE \Rightarrow$

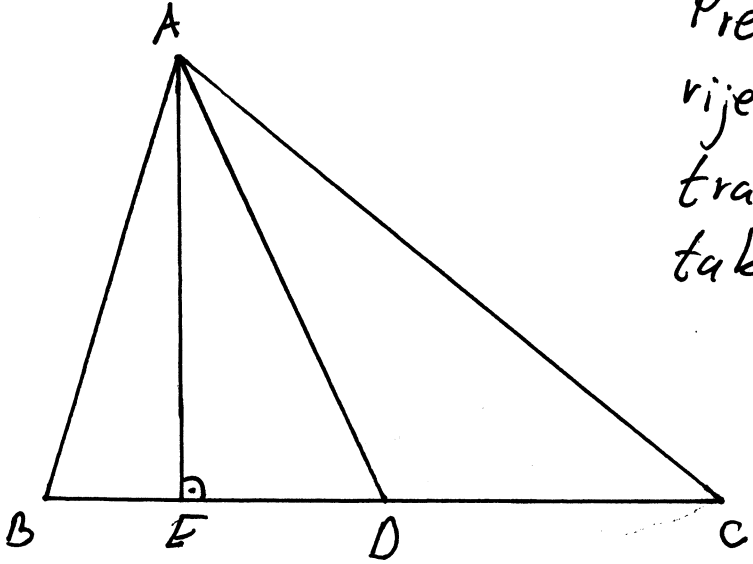
$\Rightarrow \measuredangle OBE \cong \measuredangle BOE = \frac{\beta}{2}$.

$$\measuredangle OAB = \alpha/2 \quad i \quad \measuredangle OBA = \beta/2$$

Kako je dat ΔABC to su dati i uglovi α i β pa tačku O nije teško konstruisati. Kako $O \in p$ i $p \parallel AB$ to nije teško konstruisati i pravu p.

(#) Dat je ΔABC. Kroz vrh A konstruisati pravu koja će dati trougao podijeliti na dva trougla sa jednakim površinama.

Rj. <u>Analiza</u>



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $p(A,D)$ tražena prava $(D \in BC)$ takva da je $P_{\Delta ABD} \cong P_{\Delta ADC}$.

Posmatrajmo trouglove ΔABD i ΔACD.

Ako spustimo visinu iz A u oba ova trougla (npr AE je visina) imamo:

$$P_{\Delta ABD} = P_{\Delta ADC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$\frac{|AE| \cdot |BD|}{2} = \frac{|AE| \cdot |DC|}{2}$$

$$|BD| = |DC|$$

Prema tome D je sredina stranice BC, pa traženu pravu nije teško konstruisati.