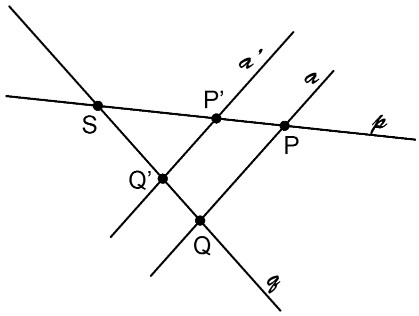
10 Elementarni zadaci: Sličnost traouglova i Talesova teorema

Elementarna pitanja:

1. Talesova teorema glasi: Neka su... (vidi sliku)... Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square}$.



2. Poljedica talesove teoreme: $\frac{SP}{SQ} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP'}{PP'} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{\square}{\square}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{\square}{\square}$.
3. Obrat Talesove teoreme glasi: $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square} \Rightarrow a \| a'$.

1. Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_3)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_3) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

2. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je $\triangle PAI$ jkk, da važi poredak $P - M - S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $pp[P, S)$ i kruga k dokazati da je $\triangle AMP \sim \triangle NAP$ i da je $\triangle PIN \sim \triangle PMI$

3. Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_2 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_2)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_2) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

4. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza $(BC = a,\ AC = b,\ AB = c)$. Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

5. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da je $C_1D = \frac{1}{2}h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

6. Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da je $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

Konstruktivni zadaci - Konstrukcija četverougla.

7. Konstruisati kvadrat ako je dato jedno tjeme i po jedna tačka na stranicama koje ne sadrže to tjeme.

8. Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina stranice BC, a N sredina stranice CD.

9. Konstruisati kvadrat ako dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

10. U dati kvadrat upisati drugi kvadrat tako da mu dužine stranica odgovaraju veličini neke date duži.

11. Date su tri tačke. Konstruisati paralelogram, tako da se sredine tri njegove stranice poklapaju sa datim tačkama.

12. Dat je krug $k(I, r)$ i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

13. Konstruisati paralelogram čija će površina biti jednaka površini datog trougla.

14. Konstruisati paralelogram čija će površina i obim biti jednaki površini i obimu datog trougla.

15. Konstruisati kvadrat $\square ABCD$ takav da date tačke P, Q, R i S pripadaju redom stranicama AB, BC, CD i DA.
Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Presječna tačka simetrale ivice BC i simetrale unutrašnjeg ugla $\measuredangle BAC$ trougla $\triangle ABC$ pripada opisanom krugu oko tog trougla.

Zadaci za vježbu

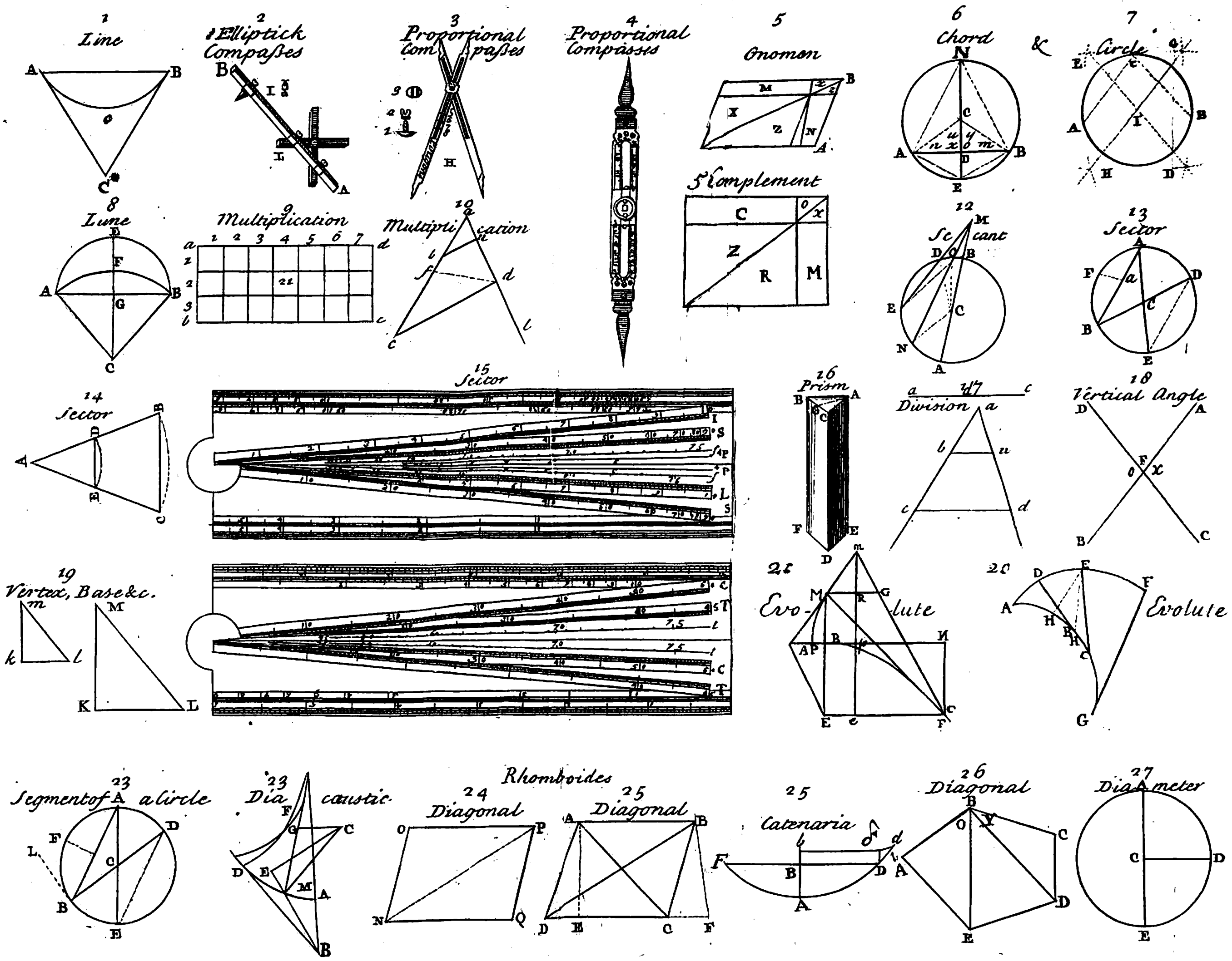
16. U dati kvadrat upisati drugi kvadrat, tako da prava određena jednom stranicom toga kvadrata prolazi kroz datu tačku.

17. Konstruisati kvadrat ako je data po jedna tačka na svakoj od njegovih stranica ili na njihovim produžecima.

18. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove visine leže na datim pravama.

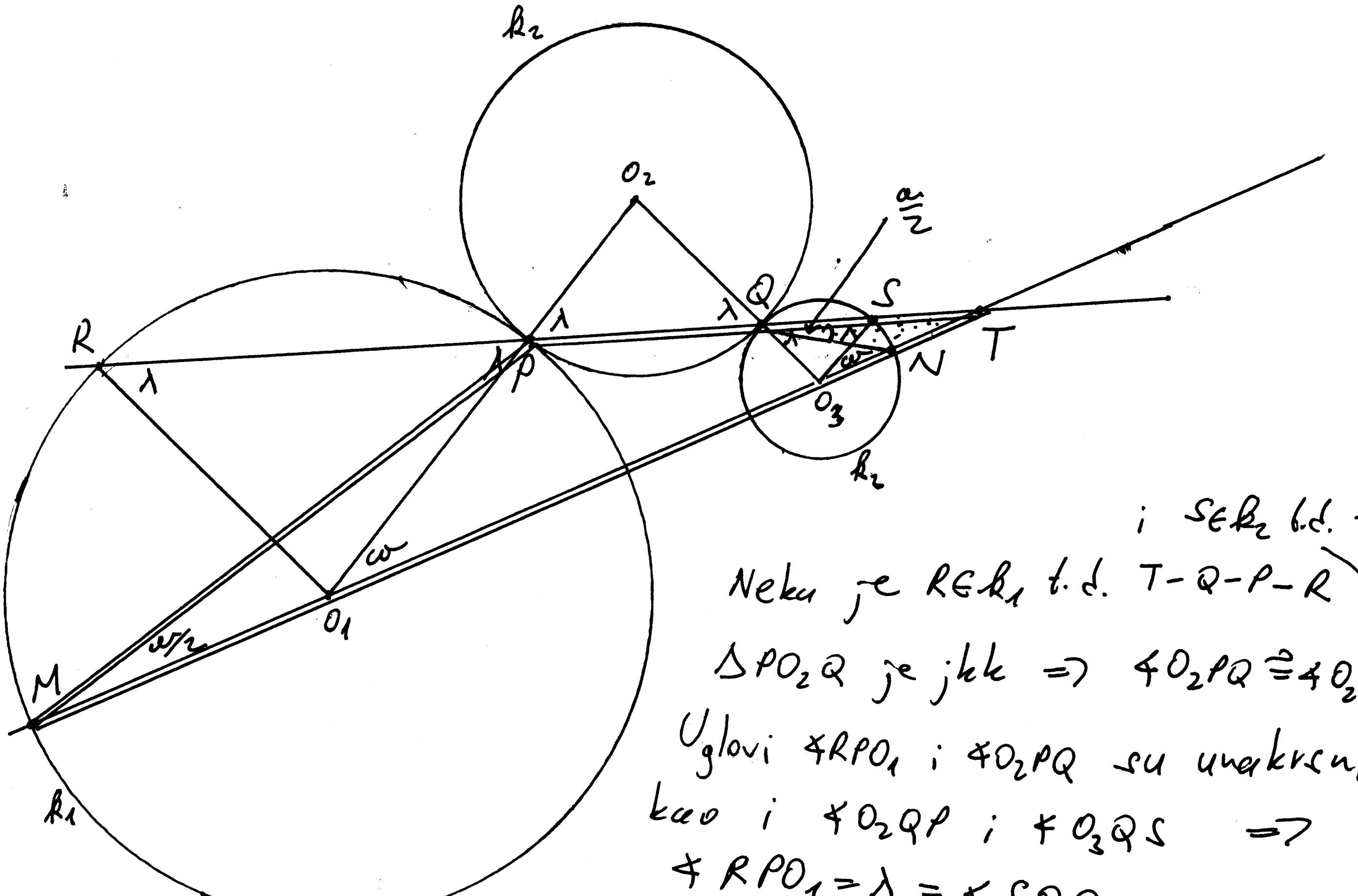
19. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove simetrale uglova leže na datim pravama.

20. "Prevesti" nazive figura datih na slici ispod.



(#) Neka su dati krugovi $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ i $k_3(O_3,r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1,O_2)$ date su tačke M i N takve da $M\in k_1$, $N\in k_3$ i važi poredak $M-O_1-O_2-N$. Neka je $\{T\} = p(O_1,O_2)\cap p(P,Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

Rj.



Neka je $R\in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$ i $S\in k_2$ t.d. $T-S-Q$

$\triangle PO_2Q$ je jkk $\Rightarrow \sphericalangle O_2PQ \cong \sphericalangle O_2QP = \lambda$.

Uglovi $\sphericalangle RPO_1$ i $\sphericalangle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\sphericalangle O_2QP$ i $\sphericalangle O_3QS$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle RPO_1 = \lambda = \sphericalangle SQO_3$

Kako su $\triangle PO_1R$ i $\triangle SO_3Q$ jkk $\Rightarrow \sphericalangle PRO_1 = \lambda$ i $\sphericalangle QSO_3 = \lambda$

Ako posmatramo $p(S,R)$ i primjetimo da je $\sphericalangle RSO_3 \cong \sphericalangle RPO_1 = \lambda$

$\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M,N)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle SO_3T \cong \sphericalangle PO_1T = \omega$.

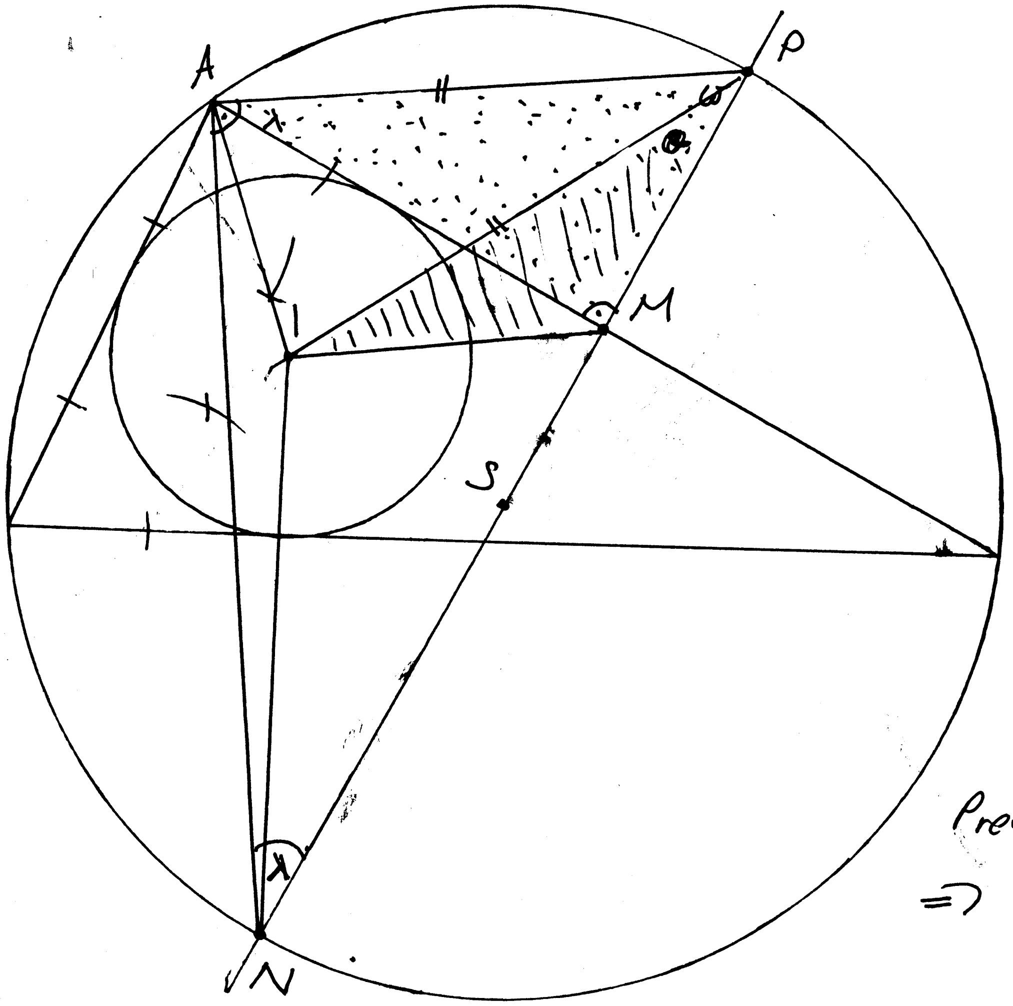
Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\sphericalangle O_1MP$ i $\sphericalangle NQS$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle QTN \cong \sphericalangle MTQ \text{ (zajednički ugao)} \\ \sphericalangle TQN \cong \sphericalangle TMP = \frac{\omega}{2} \\ \sphericalangle TNQ \cong \sphericalangle TPM \text{ (treći ugao)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(slič UUU)}} \triangle TNQ \sim \triangle TPM$$

q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je ΔPAI jkk, da važi poredak $P-M-S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $[P,S)$ i kruga k dokazati da je $\Delta AMP \sim \Delta NAP$ i da je $\Delta PIM \sim \Delta PMI$.

Rj.



Posmatrajmo ΔAMP i NAP. Ugao $\measuredangle APM \cong \measuredangle APN = \omega$ im je zajednički, imaju po jedan ugao od $90°$ tj.

$\measuredangle AMP = \measuredangle NAP = 90°$

($\measuredangle NAP$ je ugao nad prečnikom). Prema tome i treći ugao im je podudaran $\measuredangle PAM \cong \measuredangle ANP = \lambda$.

Prema sličnosti UUU

$\Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta NAP$

$\Downarrow$

$$\frac{AP}{NP} = \frac{MP}{AP}$$

q.e.d

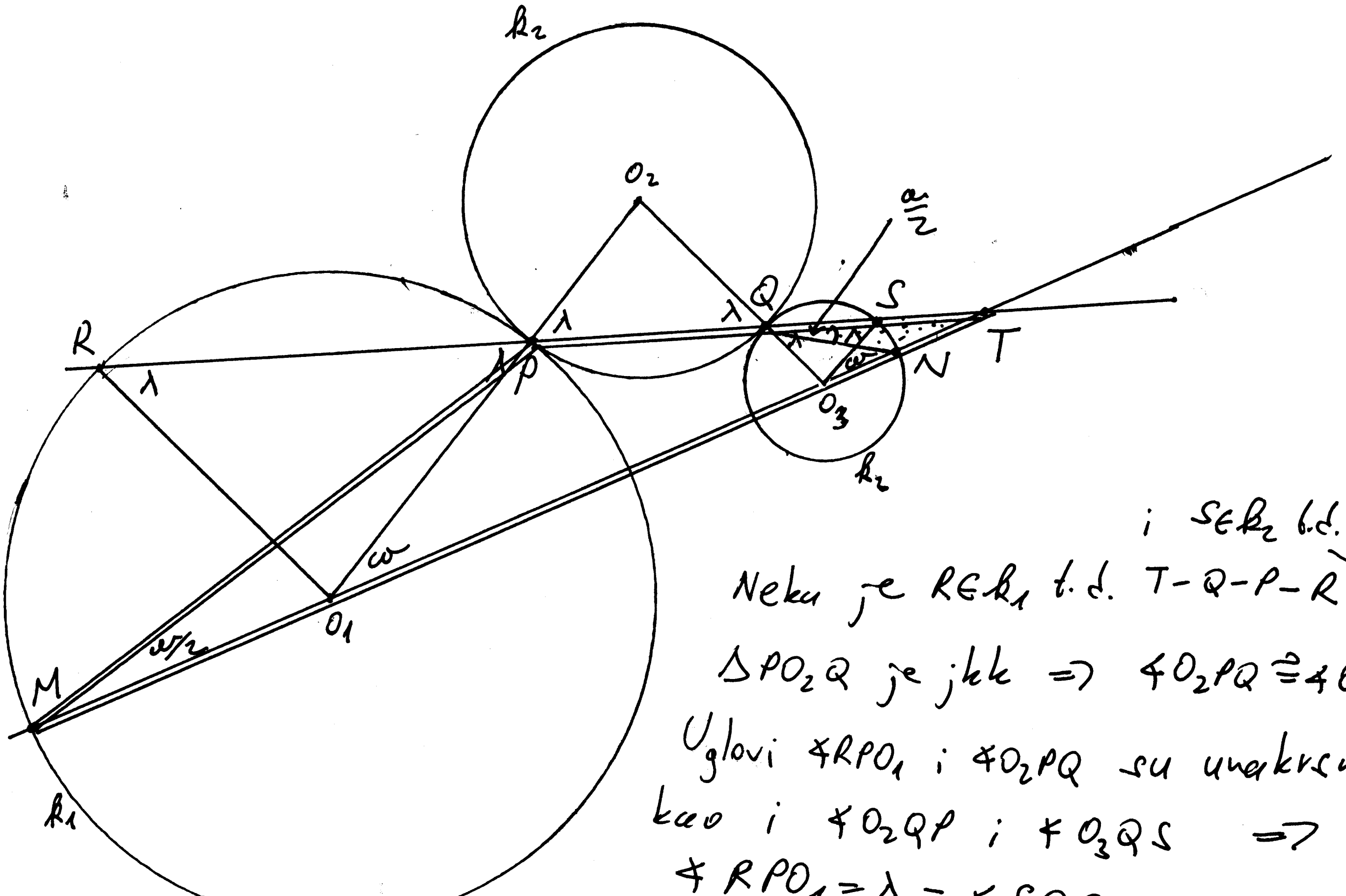
Kako je ΔAPI jkk to je $AP \cong PI$.
Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{PI}{NP} = \dfrac{MP}{IP} \\ \measuredangle IPN \cong \measuredangle MPI = \theta \\ \text{(zajednički ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(sličn. SUS)}} \Delta PIN \sim \Delta PMI$$

q.e.d.

(#) Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_2)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_2 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_2) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi ΔTNQ i ΔTPM slični.

Rj.



Neka je $R \in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$ i $S \in k_3$ t.d. $T-S-Q$

ΔPO_2Q je jkk $\Rightarrow \measuredangle O_2PQ \cong \measuredangle O_2QP = \lambda$.

Uglovi $\measuredangle RPO_1$ i $\measuredangle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\measuredangle O_2QP$ i $\measuredangle O_3QS$ $\Rightarrow$

$\measuredangle RPO_1 = \lambda = \measuredangle SQO_3$

Kako su ΔPO_1R i ΔSO_3Q jkk $\Rightarrow \measuredangle PRO_1 = \lambda$ i $\measuredangle QSO_3 = \lambda$

Ako posmatramo $p(S,R)$ i primjetimo da je $\measuredangle RSO_3 \cong \measuredangle RPO_1 = \lambda$

$\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M,N)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle SO_3T \cong \measuredangle PO_1T = \omega$.

Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\measuredangle O_1MP$ i $\measuredangle NQS$. Sad imamo

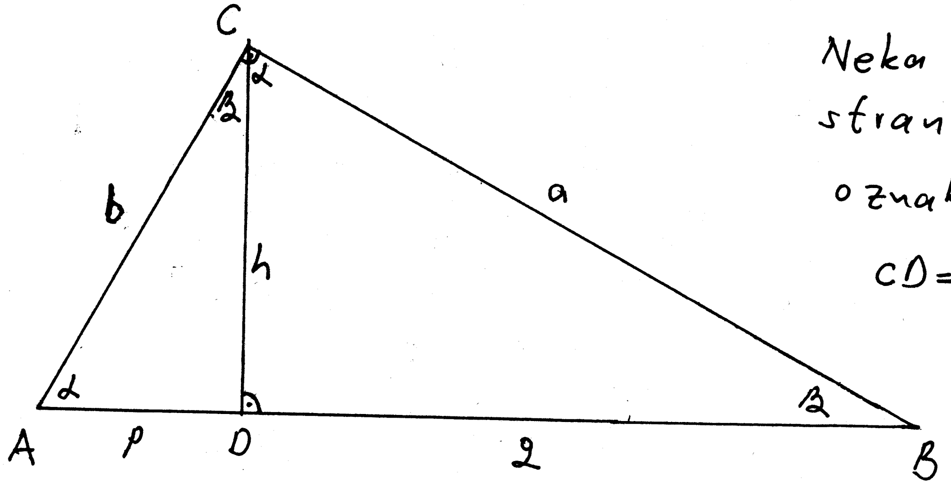
$\measuredangle QTN \cong \measuredangle MTQ$ (zajednički ugao)
$\measuredangle TQN \cong \measuredangle TMP = \frac{\omega}{2}$
$\measuredangle TNQ \cong \measuredangle TPM$ (treći ugao)

$\xrightarrow{\text{(slič UUU)}}$ $\Delta TNQ \sim \Delta TPM$

q.e.d.

U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\measuredangle CAB=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

$c=p+q$.

U ΔADC, $\measuredangle ADC=90^\circ$, $\measuredangle CAD=\alpha \Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\measuredangle BDC=90^\circ$, $\measuredangle DBC=\beta \Rightarrow \measuredangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle ADC=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle CAD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \ldots(2)$$

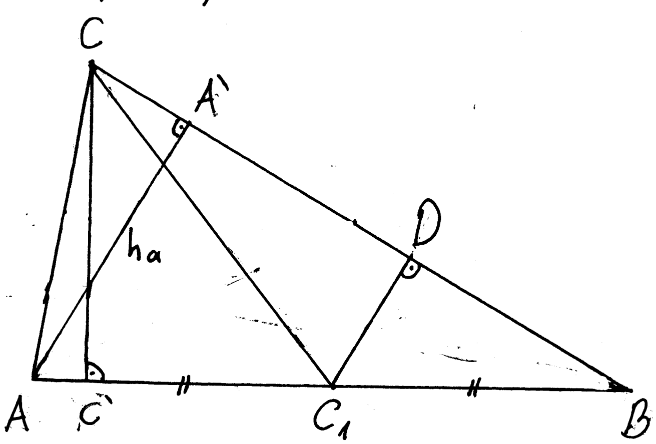
$$(1)\ ;\ (2) \Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i poznata je težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da $C_1D = \frac{1}{2} h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

Rj.



Prvo primjetimo da je C_1 sredina duži AB.

Kako je $AA' \perp BC$ i $C_1D \perp BC$ to je $p(A, A') \parallel p(C_1, D)$.

Primjenom Talesove teoreme sad možemo zaključiti da je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{AA'}{C_1D}$.

Kako je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{2}{1} \Rightarrow AB = 2C_1B$.

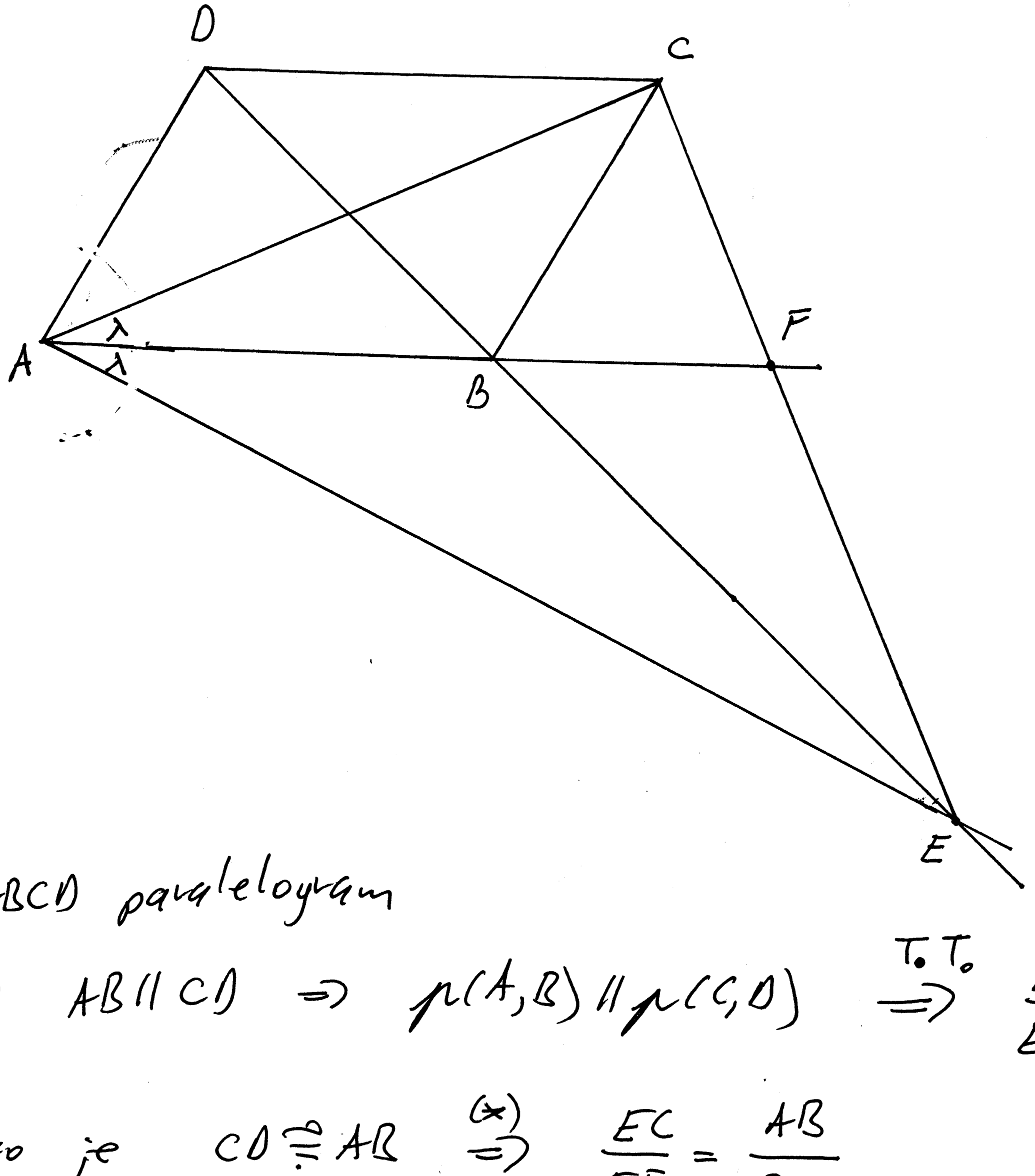
Možemo zaključiti $\frac{AA'}{C_1D} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2C_1D = AA'$

$$\Rightarrow \quad C_1D = \frac{1}{2} h_a$$

q.e.d.

(#) Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

Rj.



$\square ABCD$ paralelogram

$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \xRightarrow{T.T.} \frac{EC}{EF} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{BF}$ ... (*)

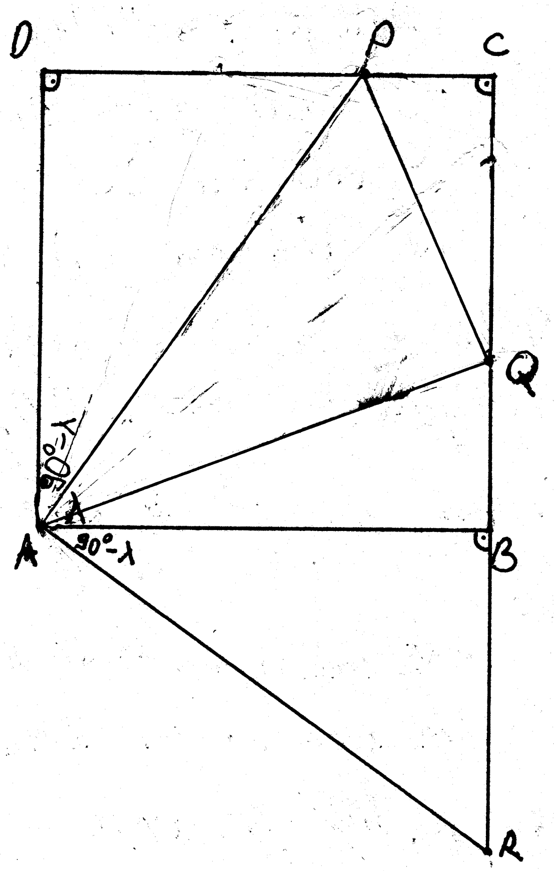
Kako je $CD \cong AB \xRightarrow{(*)} \frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$

q.e.d.

\# Konstruisati kvadrat ako je dato jedno tjeme i po jedna tačka na stranicama koje ne sadrže to tjeme.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ kod koga je $P \in CD$ i $Q \in BC$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle PAB$.

Tada je $\measuredangle PAD = 90° - \lambda$

Neka je $R \in p(C,B)$: $C-B-R$ i $\measuredangle BAR = 90° - \lambda$.

Tad
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle DAP = \measuredangle BAR = 90°-\lambda \\ AD = AB \\ \measuredangle ADP = \measuredangle ABR = 90° \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ADP \cong \triangle ABR$$
$$\Downarrow$$
$$AP \cong AR$$

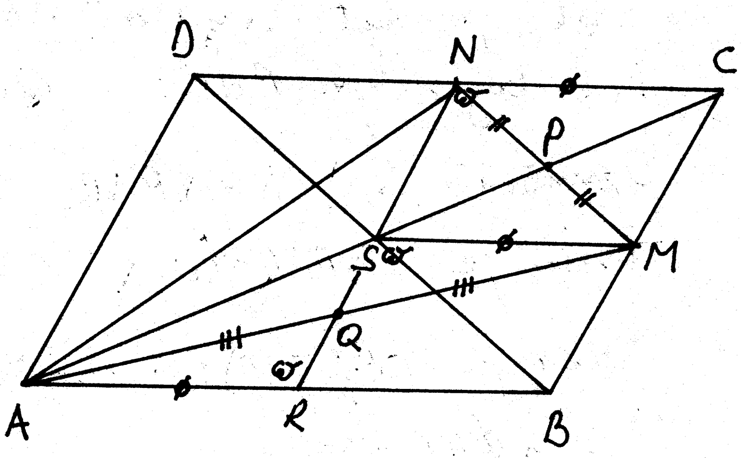
Primjetimo da je i
$\measuredangle PAR = 90°$.

Kako su date tačke A, P i Q sad nije problem konstruisati tačku R a poslije nje tačk B i C.
Prema tome kvadrat $\square ABCD$ možemo konstruisati.

(#) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina BC, a N sredina stranice CD.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Dat je paralelogram $\square ABCD$, gdje su M sredina BC i N sredina CD.

Neka je tačka S presjek dijagonala AC i BD.

Dijagonale u paralelogramu se polove pa je S sredina dijagonala AC i BD.

S sredina BD, N sredina CD $\overset{u\ \triangle BCD}{\Longrightarrow}$ SN sred. lin. $\Rightarrow SN \parallel p(B,C)$

S sredina BD, M sredina BC $\overset{u\ \triangle DBC}{\Longrightarrow}$ SM sred. lin $\Rightarrow SM \parallel p(C,D)$

pa je $\square SMCN$ paralelogram. Neka je $\{P\} = SC \cap MN$

$\Rightarrow$ P sredina MN i P sredina SC tj. $MP \cong NP$.

Neka je $\{R\} = p(N,S) \cap AB$. Tad
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ASR \cong \measuredangle NSC \\ \measuredangle ARS \cong \measuredangle SNC = \omega \\ AS \cong SC \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARS \cong \triangle CNS \;\Downarrow\; AR \cong CN \quad ...(*)$$

Neka je $\{Q\} = SR \cap AM$. Tada:
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle AQR \cong \measuredangle SQM \\ \measuredangle QRA \cong \measuredangle QSM = \omega \\ AR \cong SM \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARQ \cong \triangle MSQ \;\Downarrow\; AQ \cong QM \quad ...(**)$$

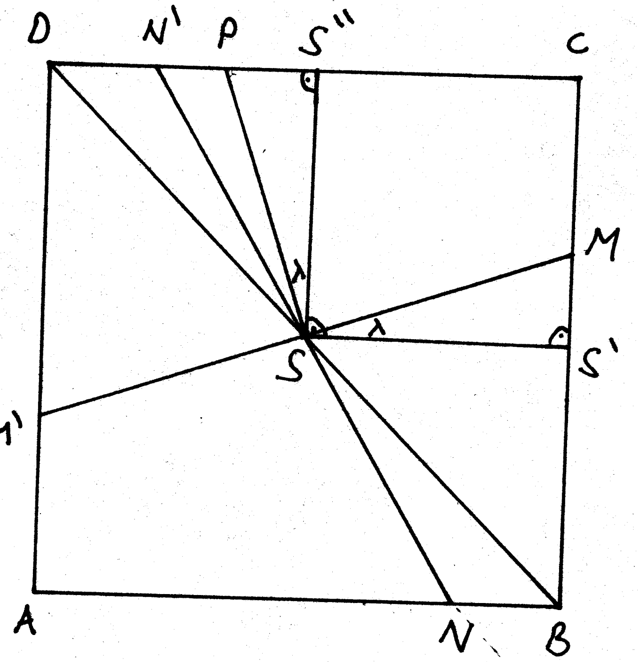
Na osnovu $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ S težište $\triangle AMN$.

Tačku S možemo konstruisati, a time i $p(N,C)$ i $p(M,C)$. Sad nije problem dobiti tačke B i D a time i $\square ABCD$.

(#) Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ čiji je centar opisane kružnice tačka S (ujedno i presjek dijagonala) i neka su date tačke $M \in BC$ i $N \in AB$.

$p(M,S) \cap AD = \{M'\}$

$p(N,S) \cap CD = \{N'\}$

Neka su S' i S'' redom sredine stranica BC i CD.

$$\left.\begin{array}{l} SS' \text{ srednja linija } \Delta DBC \Rightarrow SS' = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} AB \\ SS'' \text{ srednja linija } \Delta ACD \Rightarrow SS'' = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB \end{array}\right\} \Rightarrow SS' \cong SS''$$

Nije teško pokazati (iz podudarnosti USU) da je $MS \cong M'S$ i da je $NS \cong N'S$.

Neka je $P \in CD$ takva $SP \perp MM'$. Označimo sa $\lambda = \measuredangle PSS''$.

$\measuredangle PSS' = 90° + \lambda$, $\measuredangle PSS' = \measuredangle PSM + \measuredangle MSS' = 90° + \measuredangle MSS'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle MSS' = \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MSS' \cong \measuredangle S''SP = \lambda \\ SS' \cong SS'' \\ \measuredangle SS'M \cong \measuredangle SS''P = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta SS'M \cong \Delta SS''P$$

$$\Downarrow$$

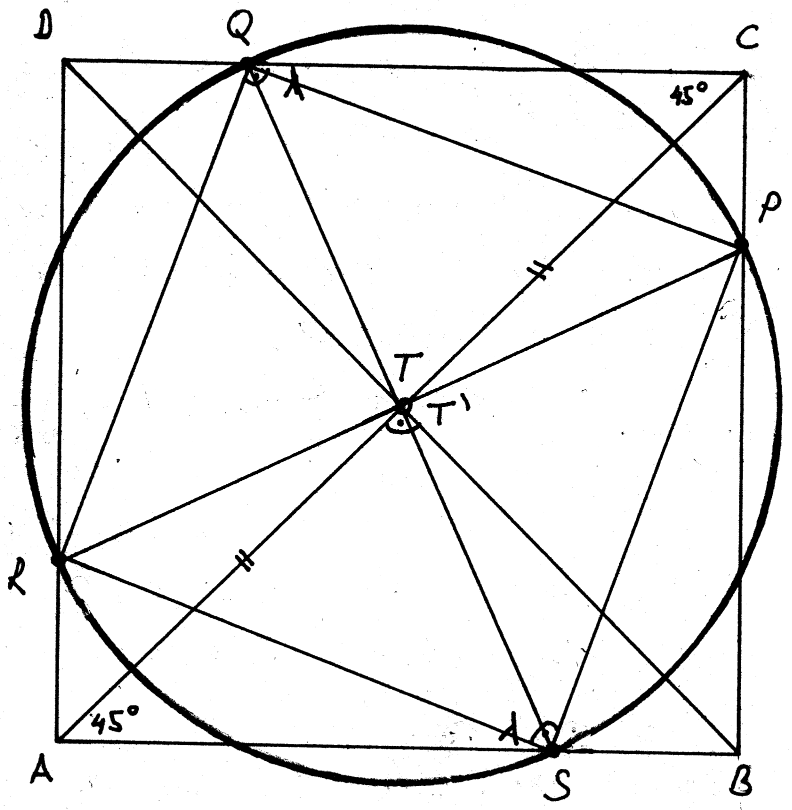
$$SM \cong PS$$

Kako su nam date tačke M i S to možemo konstruisati duž MM' a poslije toga i tačku P. Kako možemo konstruisati duž NN' time nije teško konstruisati i kvadrat $\square ABCD$.

(#) U dati kvadrat upisati drugi kvadrat tako da mu dužine stranica odgovaraju veličini neke date duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je u dati kvadrat □ABCD upisan neki drugi kvadrat □PQRS.

Iz osobina kvadrata znamo da se dijagonale polove pod pravim uglom.

Označimo sa $\{T\} = AC \cap BD$ a sa $\{T'\} = PR \cap QS$.

□PQRS je tetivni četverougao pa oko njega možemo opisati kružnicu.

U dokazu ćemo pokazati da je $T \equiv T'$ centar opisane kružnice □PQRS.

Kako znamo dužinu RS nije teško dobiti poluprečnik kružnice RT a time i □PQRS.

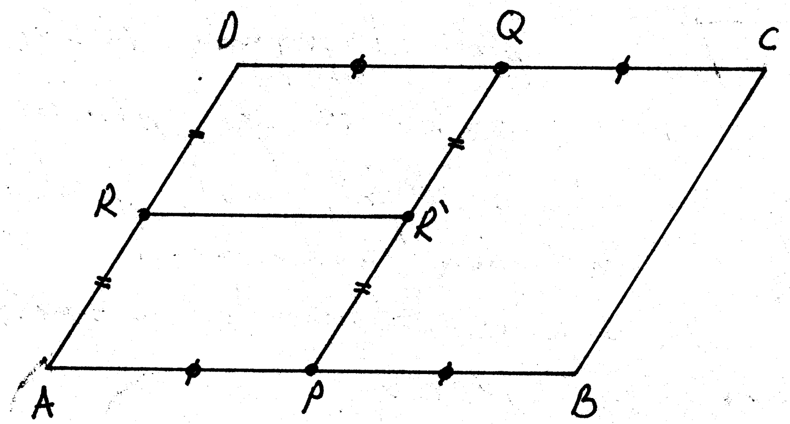
(Napomena. U dokazu treba da pokažemo i da je dobijeni četverougao kvadrat. Kako je

$\measuredangle CTB \cong \measuredangle BTA = 90°$

(#) Date su tri tačke. Konstruisati paralelogram tako da se sredine tri njegove stranice poklapaju sa datim tačkama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat paralelogram $\square ABCD$ i neka su tačke P, Q i R redom sredine stranica AB, CD i AD.

P sredina AB, Q sredina CD, $AB \cong CD \Rightarrow AP \cong PB \cong CQ \cong DQ$.

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $PB \cong CQ \Rightarrow \square PBCQ$ paralelogram.

Slično $\square APQD$ paralelogram.

Označimo sa R' sredinu duži PQ.

$p(A,D) \parallel p(P,Q)$, $AD \cong PQ$, R sredina AD, R' sredina PQ

$\Rightarrow$ $AR \cong PR'$ i $p(A,R) \parallel p(P,R') \Rightarrow \square APR'R$ paralelogram

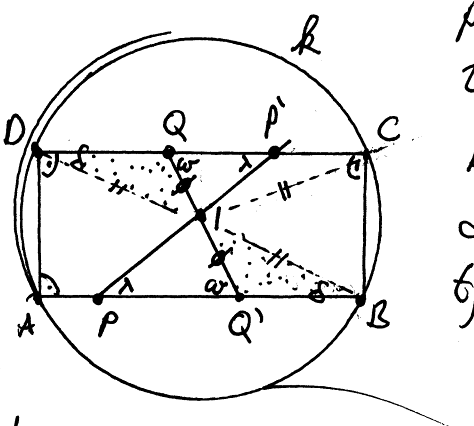
$DR \cong QR'$ i $p(D,R) \parallel p(Q,R') \Rightarrow \square DRR'Q$ paralelogram

Date su tačke P, Q i R. Sad nije problem konstruisati tačke A i D a poslije njih i tačke B i C.

(#) Dat je krug k i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije dvije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\square ABCD$ traženi pravougaonik, gdje su tačke P i Q date tačke koje pripadaju stranicama pravougaonika. Kako je ugao nad prečnikom prav to su dijagonale pravougaonika ujedno i prečnici od k tj. $AC \cap BD = \{I\}$



I slučaj:

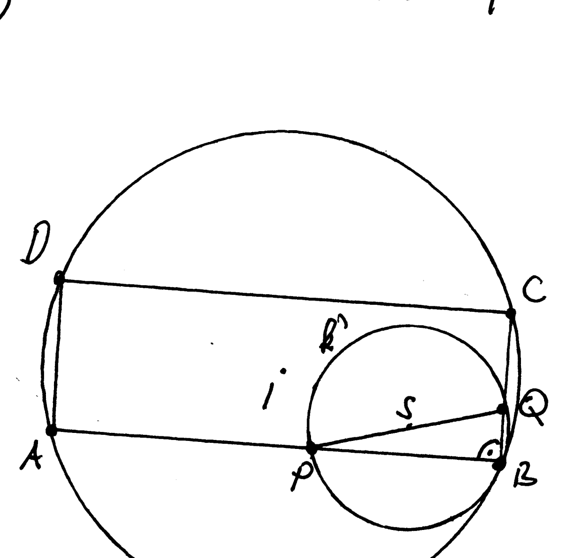
Tačke P i Q pripadaju suprotnim stranicama, recimo $P \in AB$, $Q \in CD$. Neka je $p(P,I) \cap CD = \{P'\}$ i $p(Q,I) \cap AB = \{Q'\}$. Postavljamo pitanje: Da li je $\triangle PQ'I \cong \triangle IP'Q$? Da, ova dva trougla su podudarna (na osnovu UUS $\Rightarrow \triangle Q'BI \cong \triangle QDI \Rightarrow$ na osn. UUS $\Rightarrow \triangle PQ'I \cong \triangle P'QI$)

ZA VJEŽBU OVO RASPISATI

Sad kako možemo konstruisati tačke P' i Q' time možemo konstruisati i prave $p(P,Q')$, $p(Q,P')$ a time i traženi pravougaonik.

II slučaj

Tačke P i Q pripadaju susjednim stranicama, recimo $P \in AB$, $Q \in BC$. Kako je $\measuredangle ABC = 90^\circ$ to je i $\measuredangle PBQ = 90^\circ \Rightarrow \triangle PBQ$ je pravougli.
$\Rightarrow$ centar S kruga opisanog oko $\triangle PBQ$ se nalazi na sredini PQ.



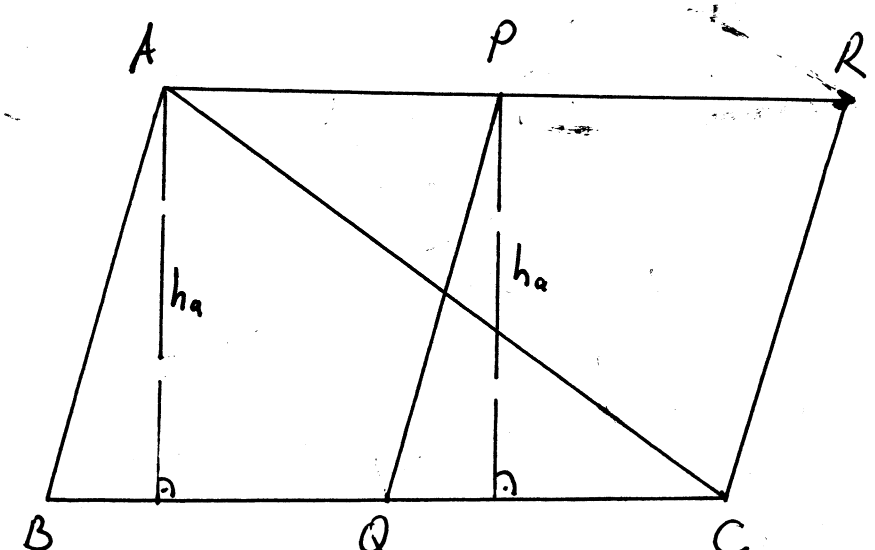
Kako su P i Q dvije date tačke, to nije teško konstruisati tačku B a poslije nje i pravougaonik $ABCD$.

Konstruisati paralelogram čija će površina biti jednaka površini datog trougla.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\triangle ABC$ dati trougao i neka je $\square QCRP$ traženi paralelogram (gdje je $Q \in BC$ i gdje $A \in p(P,R)$).



$$P_{\triangle ABC} = \frac{h_a \cdot a}{2}$$

$$P_{\square QCPR} = h_a \cdot |QC|$$

Kako je površina $\triangle ABC$ jednaka površini četverougla $\square PQCR$ to je $\frac{h_a \cdot |BC|}{2} = h_a \cdot |QC|$

$|BC| = 2 \cdot |QC| \Rightarrow Q$ je na sredini od BC

Kakve osobine treba da ima tačka P?

Primjetimo da za proizvoljnu tačku P t.d. $p(P,R) \parallel p(QC)$ i da je P na udaljenosti h_a od $p(Q,C)$ imamo da je

$$P_{\triangle ABC} = P_{\square QCRP}$$

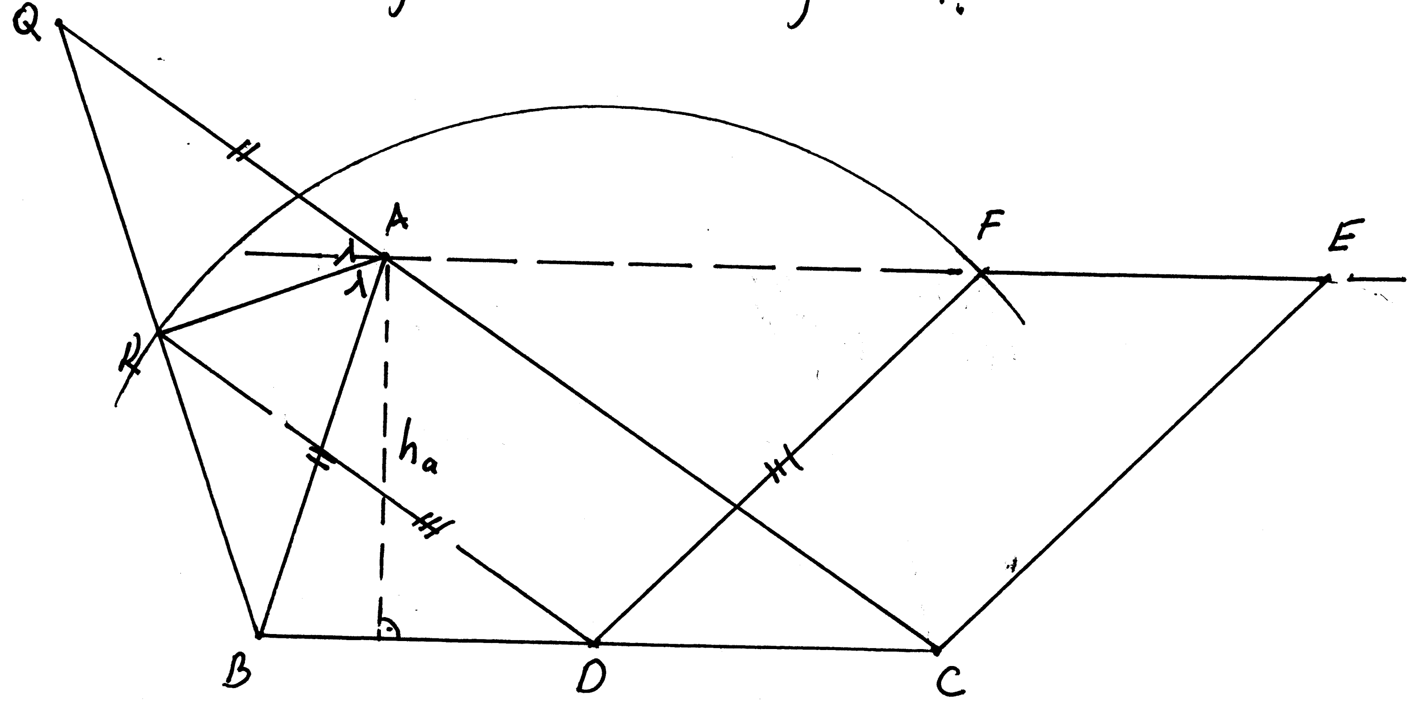
Dati paralelogram sad nije teško konstruisati.

(#) Konstruisati paralelogram čija će površina i obim biti jednaki površini i obimu datog trougla.

Rj:

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\square DCEF$ traženi paralelogram, čiji su obim i površina jednaki površini datog $\triangle ABC$, i gdje su $D \in BC$, $F, E \in p(A,E)$ i $p(A,E) \parallel p(B,C)$. Ako sa h_a označimo visinu iz vrha A $\triangle ABC$ tada imamo

$$P_{\triangle ABC} = P_{\square DCEF} \Rightarrow \frac{|BC| \cdot h_a}{2} = |DC| \cdot h_a \Rightarrow |BC| = 2|DC| \Rightarrow D \text{ sredina stranice } BC$$

Tada $BC = BD + CD = DC + EF$. Kako su obimi jednaki tačke F i E moraju imati osobinu da je $\overbrace{DF + CE}^{=2DF} = AB + AC$.
Produžimo duž CA do tačke Q t.d. $AQ \cong AB$ i neka je AR simetrala ugla $\measuredangle BAQ$. Prema podudarnosti SUS imamo da je $\triangle QAR \cong \triangle BAR$

$$\Downarrow$$

$BR \cong RQ \Rightarrow R$ je sredina BQ | tj. DR je srednja linija $\triangle BCQ$

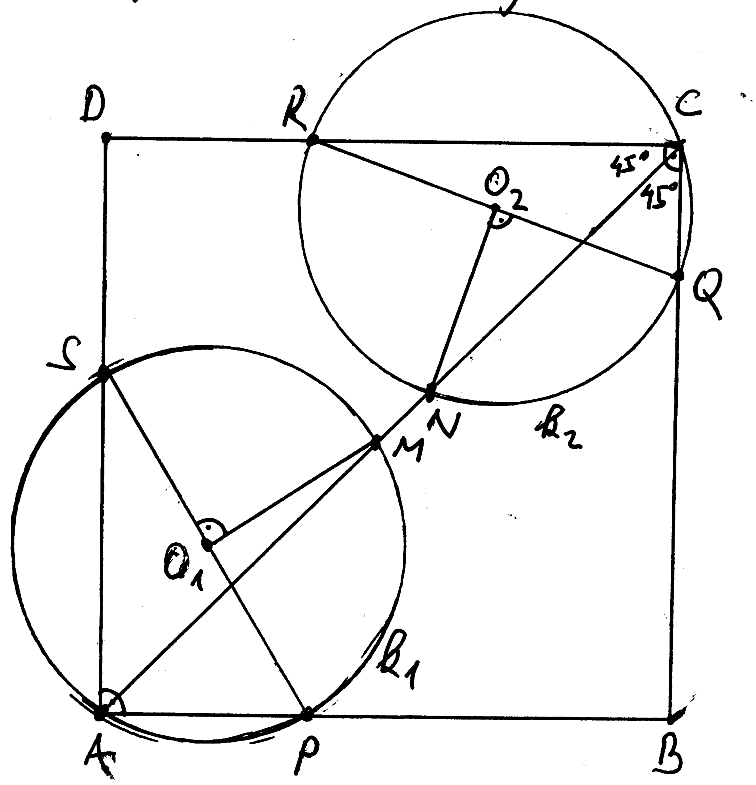
$DR = \frac{1}{2} QC = \frac{1}{2}(AB + BC)$

Paralelogram $\square DCEF$ nije teško konstr.

Konstruisati kvadrat □ABCD takav da date tačke P, Q, R, S pripadaju redom stranicama AB, BC, CD i DA.

R: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je □ABCD



traženi kvadrat i neka tačke P, Q, R, S pripadaju, redom, stranicama AB, BC, CD i AD. Posmatrajmo upr. trouglove ΔAPS i ΔQCR. Ova dva trougla su pravougla i centar njihovog opisanog kruga k_1 i k_2 se nalazi na sredinama duži PS i QR.

Prisjetimo se sljedeće leme:

<u>Presječna tačka simetrale ivice BC i simetrale unutrašnjeg ugla $\measuredangle BAC$ trougla ΔABC pripada opisanom krugu oko tog trougla.</u>

Označimo sa M presječnu tačku simetrale $\measuredangle SAP$ i simetrale duži PS, a sa N simetrale ugla $\measuredangle QCR$ i simetrale duži RQ. Prema navedenoj lemi $M \in k_1$ a $N \in k_2$.
Kako su date tačke P, Q, R i S to krugove k_1 i k_2 možemo konstruisati a time i tačke M i N. Poslije toga nije teško konstruisati tačke A i C a time i kvadrat □ABCD.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*