9 Elementarni zadaci: Prizma i kvadar

Elementarna pitanja:

1. Kako glasi formula za računanje površine prizme?
2. Kako glasi formula za računanje zapremine prizme? [$V = B \cdot H$]
3. Kako glasi formula za računanje zapremine kvadra?

1. U trostranu prizmu, čija je osnova pravougli jednakokraki trougao, može se upisati lopta poluprečnika 2cm koja dodiruje sve strane prizme. Kolika je zapremina te prizme?

2. Osnova prizme je romb. Omotač prizme je 2400cm^2. Jedna dijagonala romba je 40cm, a rastojanje naspram bočnih strana prizme jednako je visini prizme. Kolika je zapremina prizme?

3. Baza uspravne prizme je jednakokraki trougao osnovice a i ugla pri vrhu $120°$. Kolika je zapremina prizme (u funkciji od a) ako je površina omotača dva puta veća od površine baze?

4. Baza (osnova) pravilne četverostrane prizme je kvadrat stranice a (cm). Ravan koja sadrži jednu ivicu baze i nagnuta je prema ravni baze pod uglom od $30°$, dijeli zapreminu date prizme u razmjeri $2 : 3$. Kolika je visina prizme?

5. Dijagonala kvadra ima dužinu $d = 2\sqrt{2}$. Njen nagib prema jednoj bočnoj strani iznosi $30°$, a prema drugoj bočnoj strani $45°$. Kolika je zapremina ovog kvadra?

Konstruktivni zadaci - Konstrukcija trougla.

Svaki konstruktivni zadatak ima četri dijela:

1. Analiza
2. Konstrukcija
3. Dokaz
4. Diskusija (determinizacija)

U analizi pretpostavimo da je zadatak riješen, i na osnovu slike (skice) rješenja, logičkim razmišljanjem (i po potrebi dodavanjem nekih novih elemenata skici, kao što su tačka, prava i slično), dolazimo do ideje šta možemo konstruisati od datih elemenata u zadatku. U analizi ne objašnjavamo kako se šta može konstruisati, nego samo konstatujemo šta se može konstruisati i na osnovu čega.

U konstrukciji pravimo niz od jasnih i nedvosmislenih koraka šta i kojim redom trebamo konstruisati da bismo od datih elemenata u zadatku došli do rješenja. Konstrukciju možemo tumačiti i kao Algoritam u kome su ulaz dati elementi zadatka a izlaz rješenje zadatka.

U dokazu dokazujemo one tvrdnje na koje smo se pozvali u Analizi a koje nismo tamo dokazali. Generalno u dokazu treba da se nalazi rečenica šta se treba dokazati, i dati dokaz toga.

U diskusiji (determinizaciji) razmatramo broj rješenja u odnosu na položaj datih elemenata.

6. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati uglovi α, β i njegov obim.

7. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R koje su podnožja visina datog trougla.

8. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b - c$.

9. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati visine h_a i h_c, i težišna linija t_a.

10. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, težišnica t_a i visina h_a.

11. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica c, duž $a - b$ i ugao $\alpha - \beta$.

12. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, visina h_a i ugao α.

13. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$.

14. Konstruisati raznostranični trougao $\triangle ABC$ ako su pozati stranica b, visina h_c (koja odgovara stranici c) i zbir $a + c$.

15. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

Napomena. *Konkurentne prave* su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

16. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao α i poluprečnik kružnice r upisane u taj trougao.

17. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, duž $b+c$ i ugao $\beta-\gamma$.

18. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične centru opisane kružnice trougla.

19. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru trougla.

Neki zadaci sa ispitnih rokova

20. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date stranice a i b, i zna se da je $\alpha = 3\beta$.

21. Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

22. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati visina h_c, težišnica t_c i poluprečnik opisane kružnice R.

23. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati stranica a, ugao β i poluprečnik upisane kružnice r.

24. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz tjemena C sijeku kružnicu opisanu oko trougla.

25. Date su paralelne prave a i b, tačka M između njih i prava c koja nije paralelna ni sa a, ni sa b. Konstruisati jednakokraki trougao $\triangle MAB$, sa osnovicom AB, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $p(A,B) \| c$.

26. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu težišne duži podudarne trima datim dužima.

27. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu tri date nekolinearne tačke S_a, S_b i S_c centri spolja upisanih krugova.

Zadaci za vježbu

28. Konstruisati trougao ako je dato:

(a) h_a, $2p$, r; (p je poluobim trougla, r poluprečnik upisane kružnice)

(b) α, r_a, $b+c-a$;

(c) $2p$, r, r_a; (r_a je poluprečnik spolja upisane kružnice koja dodiruje stranicu a i prave koje sadrže stranice b i c);

(d) a, r, r_a;

(e) r, r_a, $b-c$;

(f) r_b, r_c, $\beta-\gamma$;

(g) a, r_b, r_c;

(h) r_b, r_c, $b+c$; (i) c, r, r_c;

(j) c, γ, $\alpha-\beta$; (k) h_c, t_c, $\alpha-\beta$;

29. Konstruisati trougao ako su dati elementi:

(a) $b-c$, r, $\beta-\gamma$;

(b) a, r, $b-c$;

\#

U trostranu prizmu, čija je osnova pravougli jednakokraki trougao, može se upisati lopta poluprečnika $2cm$ koja dodiruje sve strane prizme. Kolika je zapremina te prizme?

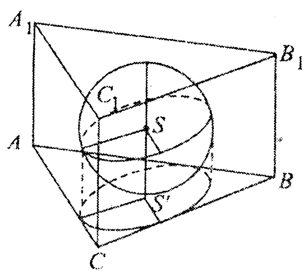
R:

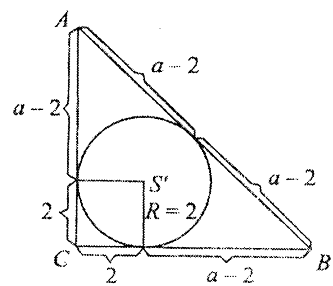
Neka je $ABCA_1B_1C_1$ trostrana prizma čija je osnova jednakokraki pravougli trougao ΔABC ($\angle C = 90^0$) u koju je upisana lopta poluprečnika $R = 2cm$ tako da dodiruje sve njene strane. Visina prizme je $H = 2R = 4cm$. Da bismo izračunali površinu baze, izračunaćemo dužine stranica ΔABC. Koristeći činjenice da je ΔABC jednakokraki i pravougli i jednakost tangentnih duži, na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$a^2 + a^2 = (2a^2 - 4)^2$$

odnosno

$$a^2 - 8a + 8 = 0 .$$





Zapišemo li posljednju jednačinu u obliku $(a-4)^2 = 8$, dobićemo da je $a = (4 + 2\sqrt{2})cm$ ili $a = (4 - 2\sqrt{2})cm$. Vrijednost $a = (4 - 2\sqrt{2})$ ne zadovoljava: hipotenuza trougla ΔABC je $2a-4$, a $2a - 4 = 2(4 - 2\sqrt{2}) - 4 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2}) < 0$. Dakle, $a = (4 + 2\sqrt{2})cm$.

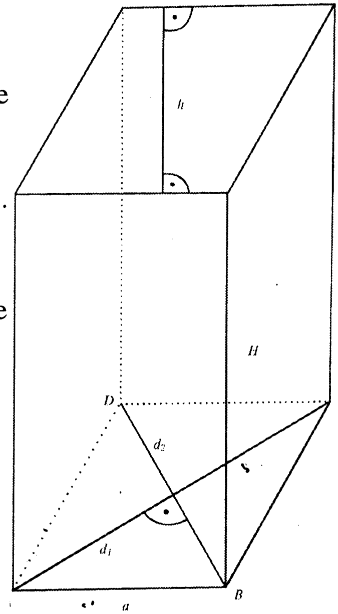
Površina baze je

$$B = \frac{(4 + 2\sqrt{2})^2}{2} cm^2 = (12 + 8\sqrt{2})cm^2 .$$

Zapremina prizme je

$$V = B \cdot H = \left(12 + 8\sqrt{2}\right) \cdot 4cm^3 .$$

Osnova prizme je romb. Omotač prizme je $2400\,\mathrm{cm}^2$. Jedna dijagonala romba je $40\,\mathrm{cm}$, a rastojanje naspram bočnih strana prizme jednako je visini prizme. Kolika je zapremina prizme?



R. Neka je osnovna ivica prizme a. Tada je $M = 4aH = 2400$, pa je $a = \frac{600}{H}$. Rastojanje naspramnih bočnih strana prizme je visina h romba.

Površina romba je $B = ah = h \cdot \frac{600}{H} = H \cdot \frac{600}{H}$, tj.

$B = 600cm^2$ jer je $h = H$ po uslovu zadatka.

Kako je $B = \frac{d_1 d_2}{2}$, imamo $600 = \frac{40 \cdot d_2}{2}$, tj. odavde $d_2 = 30cm$.

Kako je $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 20^2 + 15^2 = 625$,

imamo $a = 25cm$, te $H = \frac{600}{a} = \frac{600}{25} = 24dm$.

Dakle, zapremina prizme iznosi

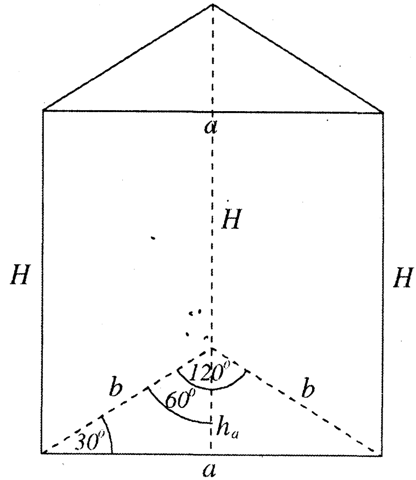
$V = BH = 600 \cdot 24 = 14400cm^2$.

Dijagonala kvadra ima dužinu $d = 2\sqrt{2}$. Njen nagib prema jednoj bočnoj strani iznosi 30°, a prema drugoj bočnoj strani 45°. Kolika je zapremina ovog kvadra?

R. Ugao između prave i ravni jednak je uglu između te prave i njene projekcije na tu ravan. Zbog toga treba dijagonalu kvadra projicirati na obje bočne strane. U jednom slučaju dobijamo pravougli trougao sa uglovima 30^0 i 60^0, a u drugom slučaju sa uglovima 45^0. Neka dijagonala CE sa bočnom stranicom $ADHE$ zaklapa ugao od 30^0. Tada je projekcija dijagonale CE na tu stranicu duž DE. Trougao ΔDCE je pravougli trougao u kojem je $\measuredangle DEC = 30^0$ i $\measuredangle CDE = 90^0$. Tada je $\overline{ED} = \overline{DC}\sqrt{3} = \frac{CE\sqrt{3}}{2} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$. Neka je $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{EA} = c$. Tada je $\overline{ED} = \sqrt{b^2 + c^2}$ i $\overline{CD} = a$. Tako imamo $\sqrt{b^2 + c^2} = a\sqrt{3}$. Nakon kvadriranja imamo $b^2 + c^2 = 3a^2$. Po pretpostavci zadatka dijagonala CE sa stranicom $ABFE$ gradi ugao od 45^0. Projekcija EC na tu bočnu stranicu je EB. Tada je trougao ΔEBC jednakokraki i pravougli, pa je $\overline{BC} = \overline{EB}$, tj. $\sqrt{a^2 + c^2} = b$. Odavde je $a^2 + c^2 = b^2$. Sada nalazimo da je $a = c$ i $b = a\sqrt{2}$. Zapremina kvadra je $V = abc = a^3\sqrt{2}$. Kako je

$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, to je $a = \frac{d}{2}$. Dakle, $V = \frac{d^3\sqrt{2}}{8} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{8} = 4$.

Baza uspravne prizme je jednakokraki trougao osnovice a i ugla pri vrhu 120^0. Kolika je zapremina prizme (u funkciji od a) ako je površina omotača dva puta veća od površine baze?



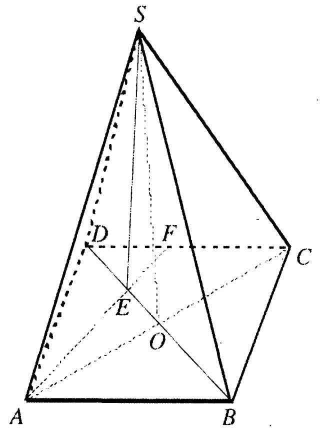
R: Neka je b krak jednakokrakog trougla osnovice a i visine h_a koja odgovara osnovici. Tada visina baze iz vrha ugla od 120^0 razlaže trougao na dva podudarna trougla sa uglovima od 60^0 i 30^0, pa je $h_a = \frac{b}{2}, \frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, tj. $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$, a odavde $h_a = \frac{b}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Sada je $B = \frac{ah_a}{2} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}, M = 2B = \frac{a^2}{2\sqrt{3}}$,

$$M = aH + 2bH = (a+2b)H = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)H \Rightarrow \frac{a^2}{2\sqrt{3}} = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{\frac{a^2}{2\sqrt{3}}}{a\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2(2+\sqrt{3})}, \quad V = B \cdot H = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{a^3}{8\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}.$$

Neka je $SABCD$ pravilna usparavna četverostrana piramida (S - vrh piramide) čija je zapremina $V = 36 cm^3$. Ako je tačka O centar osnove (baze) $ABCD$ date piramide, tačka F središte ivice CD i $\{E\} = AF \cap BD$, izračunati zapreminu piramide $SOEFC$.



R: Data piramida $SABCD$ i piramida $SOEFC$ imaju jednake visine pa je

$$\frac{V(SOEFC)}{V(SABCD)} = \frac{P(OEFC)}{P(ABCD)} \quad (P \text{ - površina baze}).$$

Tačka E je očigledno težište ΔACD (jer su AF i DO njegove težišnice), pa je

$$P(OEFC) = \frac{1}{3} P_{\Delta ACD} = \frac{1}{6} P(ABCD).$$

Dakle, $V(SOEFC) = \frac{1}{6} V(SABCD) = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 cm^3$.

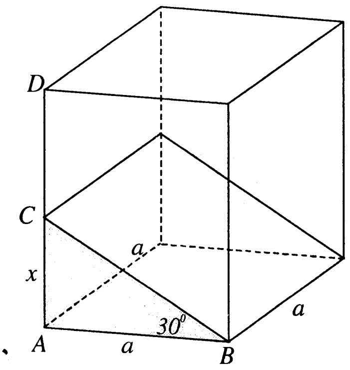
#

Baza (osnova) pravilne četverostrane prizme je kvadrat stranice a (cm). Ravan koja sadrži jednu ivicu baze i nagnuta je prema ravni baze pod uglom od 30°, dijeli zapreminu date prizme u razmjeri $2:3$. Kolika je visina prizme?

R:

Manji odsječak date prizme je trostrana prizma čija je visina i jedna ivica baze dužine a, a druga ivica baze, kateta trougla ΔABC je $\overline{AC} = x$. Trougao ΔABC je polovina jednakostraničnog trougla (jer je $\measuredangle ACB = 60^0$) pa je $\overline{AB} = a$ visina tog trougla a baza mu je $2x$. Zbog toga je:

$$a = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



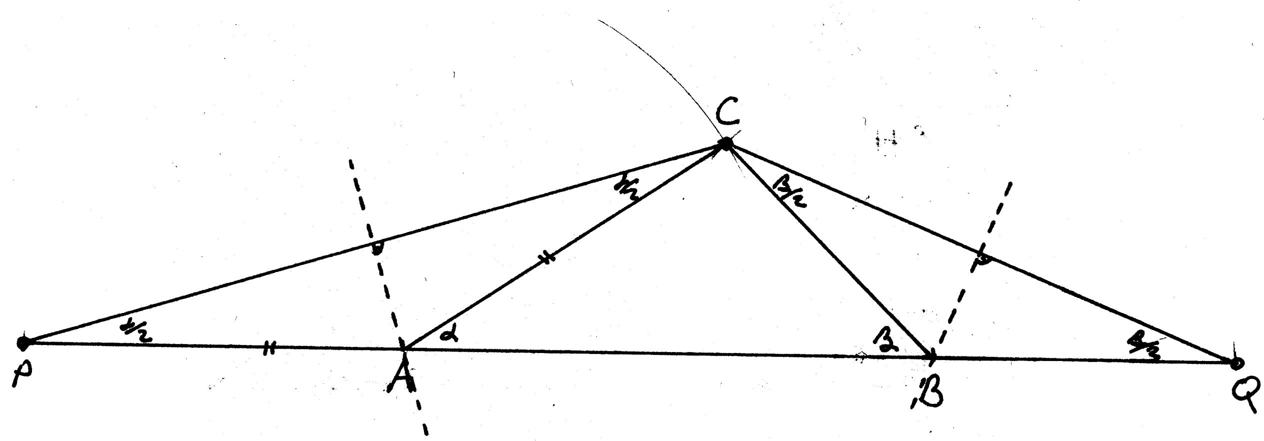
Zapremina ove trostrane prizme je: $V_1 = \frac{1}{2} a \cdot x \cdot a = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. Zapremina date prizme je $V = a^2 H$, gdje je H visina čija se dužina traži. Prema uvjetu zadatka, zapremina trostrane prizme čini $\frac{2}{5}$ zapremine date prizme, tj.

$$V_1 = \frac{2}{5} V \Rightarrow \frac{a^3}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{5} a^2 H \Rightarrow H = \frac{5a}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{12} cm.$$

(#) Konstruisati ΔABC ako su dati uglovi α, β i njegov obim.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC sa uglovima $\measuredangle BAC = \alpha$ i $\measuredangle ABC = \beta$.

Na pravoj $p(A,B)$ uzmimo tačke P i Q takve da je $P-A-B-Q$ i da $PA \cong AC$ i $BC \cong BQ$.

Primjetimo da je ΔPAC jkk a kako je $\measuredangle CAB = \alpha$ njegov vanjski ugao imamo $\measuredangle APC = \measuredangle PCA = \frac{\alpha}{2}$.

ΔCBQ je jkk i kako je $\measuredangle ABC = \beta$ njegov vanjski ugao to je $\measuredangle BCQ = \measuredangle BQC = \frac{\beta}{2}$.

Kako nam je poznata stranica PQ (obim trougla ΔABC) i uglovi $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ to ΔPQC možemo konstruisati.

Tačke A i B leže na simetrali stranica PC i QC.

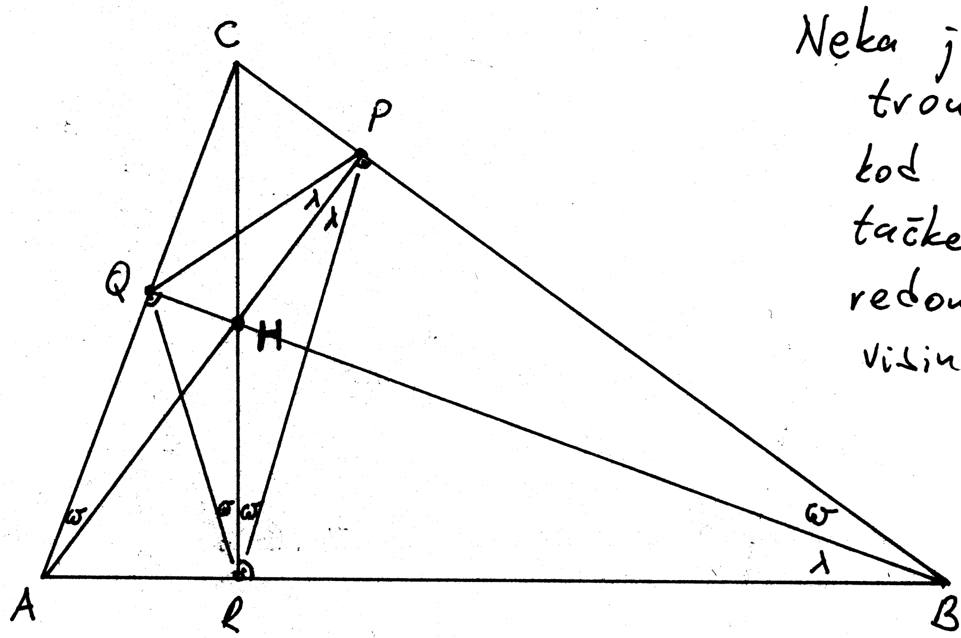
Prema tome ΔABC možemo konstruisati.

(tačke A i B možemo dobiti i na drugi način. Kako?)

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date tačke P, Q i R koje su podnožja visina datog trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC kod koga su tačke P, Q i R redom podnožja visina iz A, B i C.

Označimo sa H presjek visina trougla.

Primjetimo da je $\square ABPQ$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle QPA = \measuredangle ABQ = \lambda$

$\square HRBP$ tetivni $(\measuredangle HPB + \measuredangle HRB = 180^\circ) \Rightarrow \measuredangle RBH = \measuredangle HPR = \lambda$

Prema tome $p[P,H)$ je simetrala $\measuredangle QPR$.

Dalje kako je $\measuredangle ARH + \measuredangle AQH = 180^\circ$ to je

$\square ARHQ$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle QRH = \measuredangle QAH = \omega$

$\square ABPQ$ tetivni (zašto?) $\Rightarrow \measuredangle QAP = \measuredangle QBP = \omega$

Prema tome $p[R,H)$ je simetrala $\measuredangle QRP$.

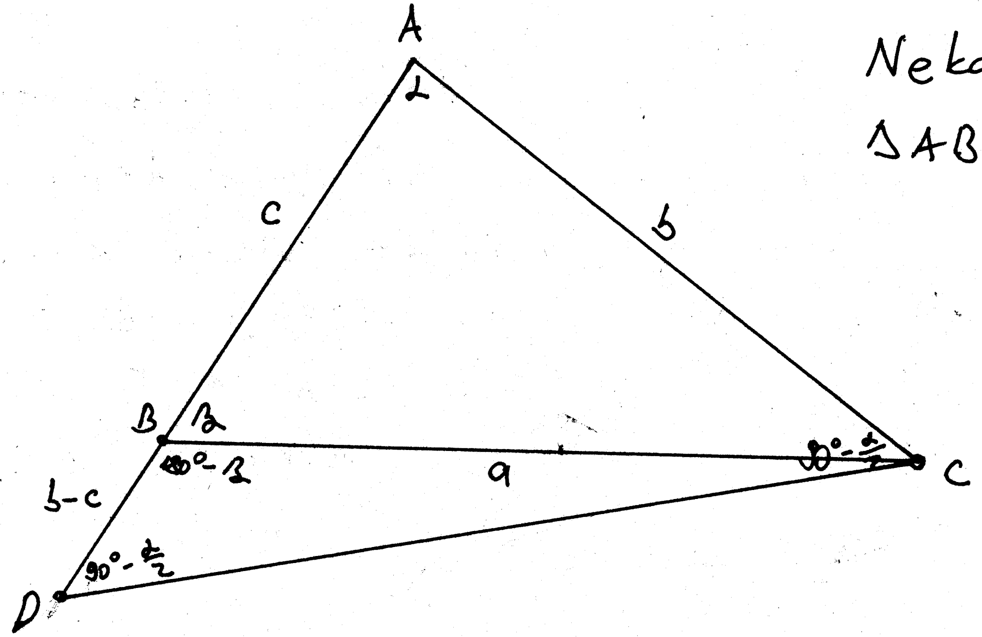
Kako se simetrale uglova u trouglu sijeku u jednoj tački to je i $p[Q,H)$ simetrala $\measuredangle RQP$.

Tačka H je presjek simetrala uglova ΔPQR pa je možemo konstruisati. Kako znamo da je $p(P,H) \perp p(B,C)$ i $\{B\} = p(B,C) \cap p(Q,H)$ i $\{C\} = p(B,C) \cap p(H,R)$ to možemo konstruisati i tačke B i C a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b-c$.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC.

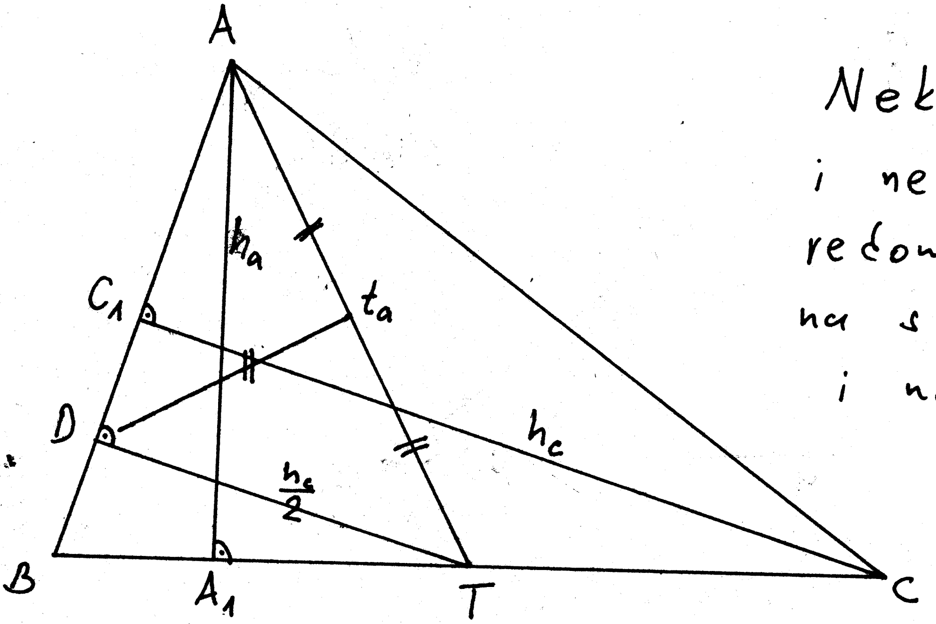
Produžimo stranicu AB do tačke D tako da je $A-B-D$ i $AD \cong AC$. Primijetimo da je $\measuredangle DBC = 180° - \beta$, i da je $BD = b - c$. U ΔDCB su date dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati.

Tačku A možemo dobiti na dva načina (kako?) a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati visine h_a i h_c i težišna linija t_a.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC, i neka su AA_1 i CC_1 redom visine spuštene na stranicu BC i AB, i neka je T sredina stranice BC.

Označimo sa D sredinu duži BC_1. Primjetimo da je TD srednja linija ΔBCC_1 pa je $TD \perp AB$ i $TD = \frac{h_c}{2}$.

U ΔAA_1T znamo dvije stranice i ugao od $90°$ pa ga možemo konstruisati.

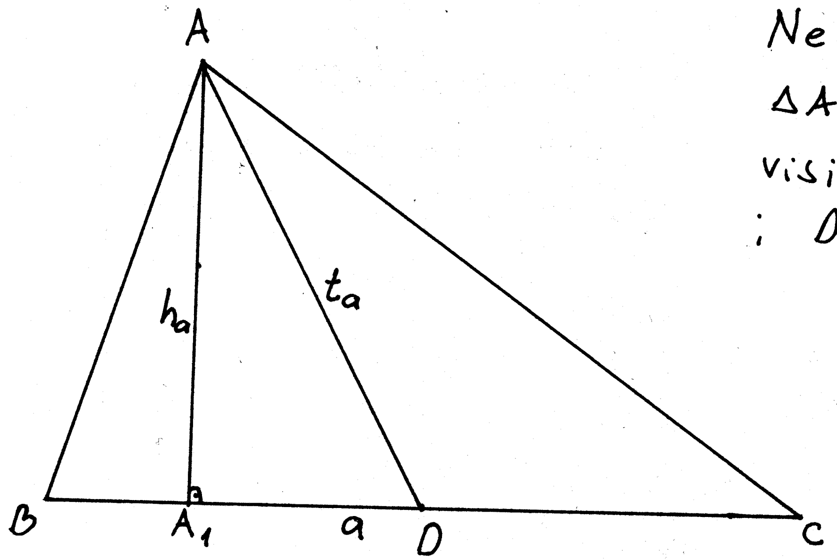
U ΔDTA isto tako znamo dvije stranice i ugao od $90°$ pa ga možemo konstruisati.

Trougao ΔABC možemo konstruisati.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su dati stranica a, težišnica t_a i visina h_a.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



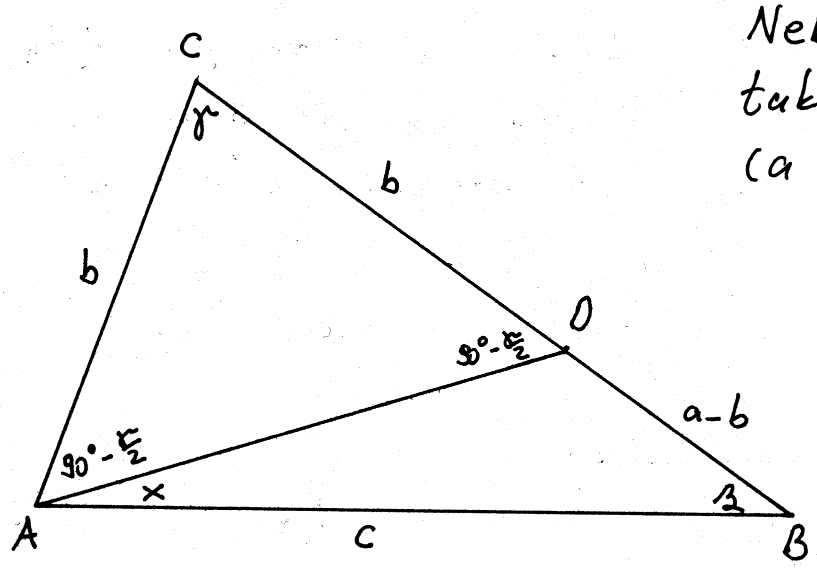
Neka je dat trougao ΔABC u kome su AA_1 visina na stranicu a i D sredina stranice BC.

U trouglu ΔAA_1D su nam poznate dvije stranice i ugao (od 90° stepeni) pa ga možemo konstruisati. Znamo da je D sredina stranice BC, pa kako imamo konstruisanu $p(BC)$ to možemo konstruisati tačke B i C a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su dati stranica c, duž $a-b$ i ugao $\alpha-\beta$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC takav da je $a>b$ (a time i $\alpha>\beta$).

Na stranici a uzmimo tačku D takvu da je $CD=b$.
Tada je ΔADC jkk i $BD=a-b$.

ΔADC jkk $\Rightarrow$ $\sphericalangle CAD=\sphericalangle ADC=90°-\frac{\gamma}{2}$

Označimo sa $x=\sphericalangle DAB$.

Imamo:

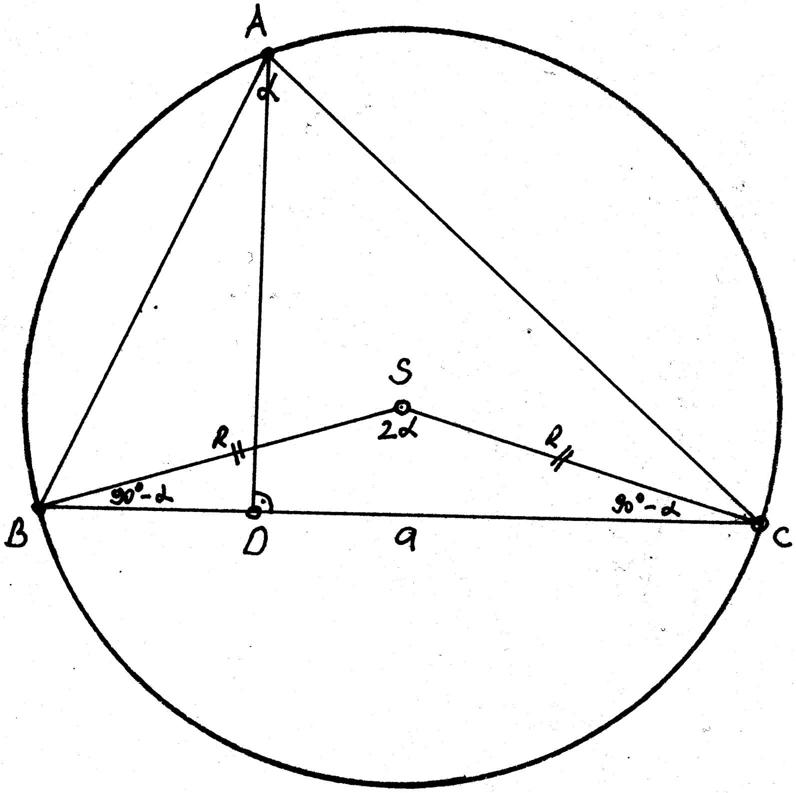
$$90°-\frac{\gamma}{2}=x+\beta$$
$$-\quad 90°-\frac{\gamma}{2}+x=\alpha$$
$$-x=x+\beta-\alpha$$
$$2x=\alpha-\beta$$
$$x=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

U ΔABD su nam poznate dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati.
Tačku C možemo dobiti na dva načina (kao presjek simetrale stranice AD i $p(B,D)$ ili pomoću uglova $\sphericalangle ADC=\sphericalangle DAC$). Prema tome ΔABC možemo konstruisati.

#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, visina h_a i ugao α.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC u kome je $AD = h_a$ visina na stranica a.

$\measuredangle BAC = \alpha$.

Označimo sa S centar opisane kružnice trougla ΔABC.

Kako je $\measuredangle BAC$ oštri periferiski ugao nad tetivom BC to je $\measuredangle BSC = 2\alpha$.

ΔSBC jkk $\Rightarrow$ $\measuredangle CBS = \measuredangle BCS = 90° - \alpha$.

U trouglu ΔBCS znamo jednu stranicu i veličine sva tri ugla pa ga možemo konstruisati.

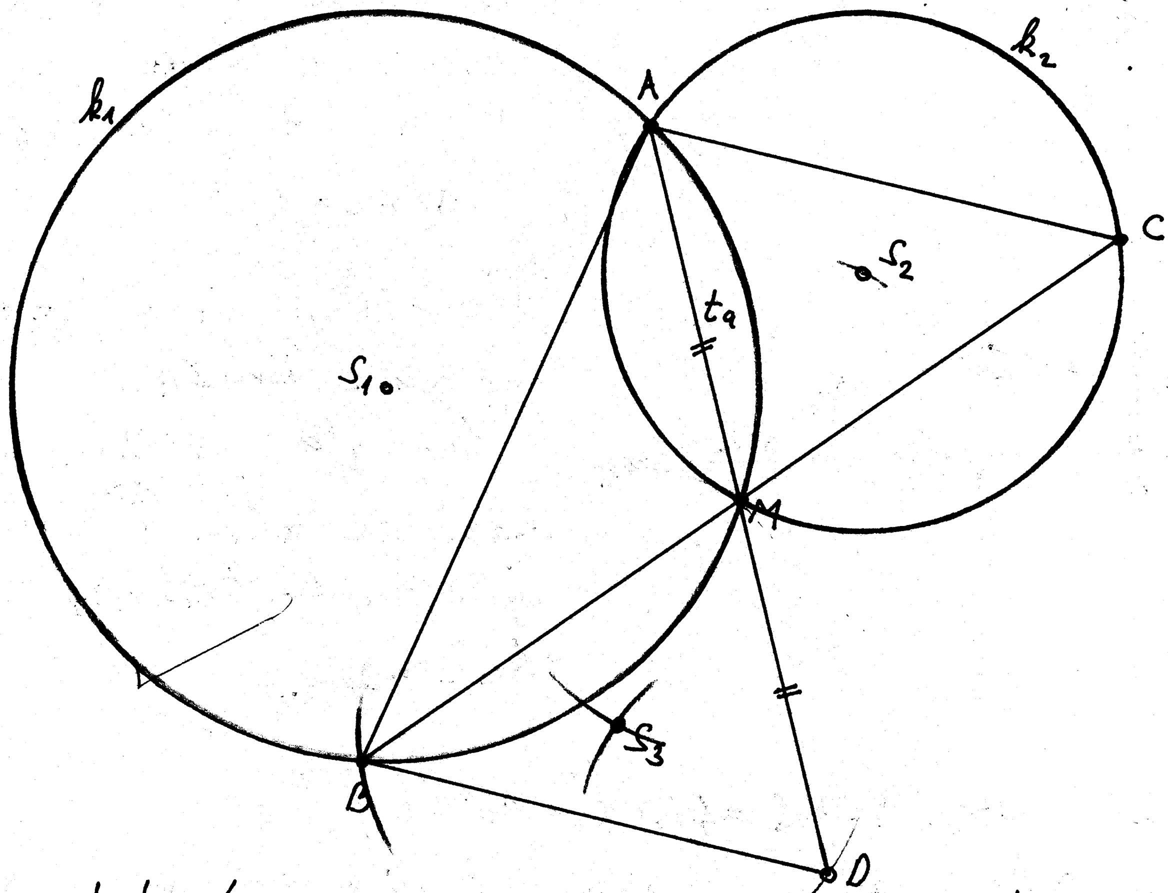
Tjeme A ćemo dobiti kao presjek $k(S, SB)$ i prave koja je paralelna sa $p(B, C)$ i udaljena od nje za dužinu h_a.

Trougao ΔABC možemo konstruisati.

Konstruisati trougao ΔABC ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova ΔABM i ΔACM.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC, tačka M sredina stranice BC i tačke S_1 i S_2 centri opisanih kružnica oko trouglova ΔABM i ΔACM.
Kako je data duž $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2, a znamo da je $S_1A = S_1M = R_1$ i $S_2A = S_2M = R_2$ to kružnice $k_1(S_1, R_1)$ i $k_2(S_2, R_2)$ možemo konstruisati.
Ako na pravoj $p(A, M)$ uzmemo tačku D takvu da je $A\text{-}M\text{-}D$ i $AM \cong MD$ imamo:

$$\left.\begin{array}{l} BM \cong MC \\ \measuredangle BMD \cong \measuredangle CMA \text{ (unakrsni)} \\ MD \cong AM \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta BMD \cong \Delta CMD$$

$\Downarrow$ ova dva trougla imaju podudarne poluprečnike opisane kružnice

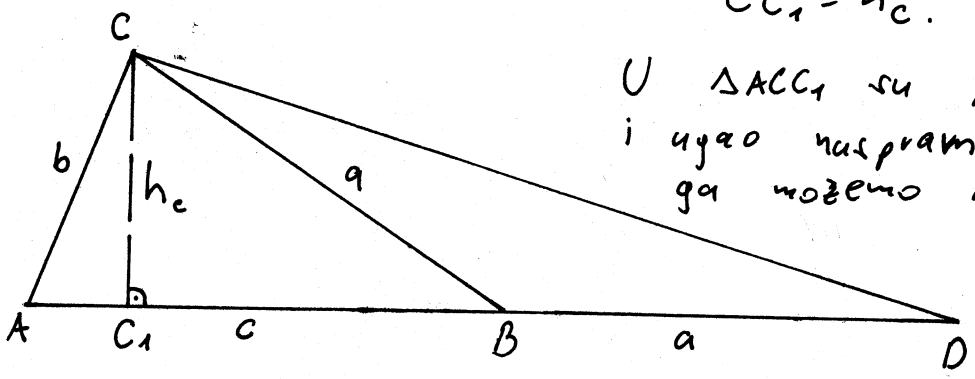
Prema tome centar S_3 opisane kružnice trougla ΔBMD mogu konstruisati, time i tačku B pa i ΔABC.

(#) Konstruisati raznostraničan trougao ΔABC ako su poznati stranica b, visina h_c (koja odgovara stranici c) i zbir $a+c$.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC traženi trougao koji ima datu stranicu b, visinu h_c i duž $a+c$. Označimo sa

$CC_1 = h_c$.

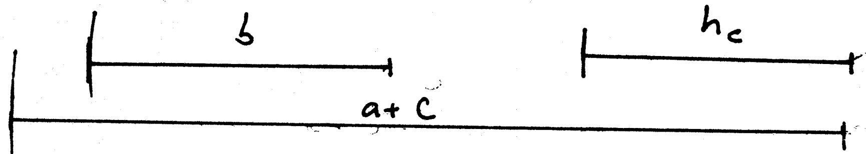


U ΔACC_1 su poznate dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati.

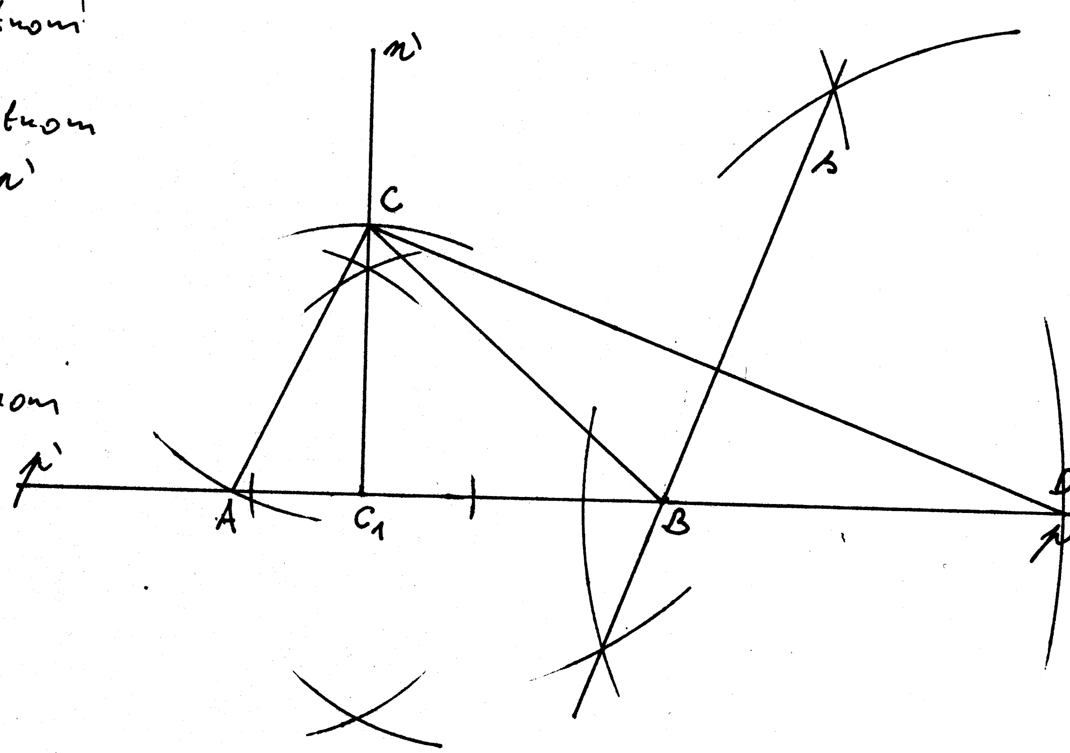
Neka je D taka tačka da je $A-B-D$ i $AD = a+c$.

Primjetimo da je ΔBDC jkk (pa tačka B leži na simetrali stranice CD). Sad nije teško konstruisati trougao ΔABC.

<u>Konstrukcija</u>



1. b, h_c, $a+c$
2. poluprava p' sa početnom tačkom C_1
3. poluprava n' sa početnom tačkom C_1 taka $n' \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n' = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. poluprava p'' sa početnom tačkom C_1 koja nadopunjuje polupravu p' do prave p
7. $k(A, a+c) \cap p'' = \{D\}$
8. s simetrala CD
9. $s \cap p = \{B\}$



<u>Dokaz</u>

Da konstruisani trougao ima stranicu b jednaku datoj duži b, visinu h_c jednaku datoj duži h_c i zbir stranica $a+c$ jednaku datoj duži $a+c$ slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Ako je $b < h_c$ ili $b \geq a+c$ zadatak nema rješenje.

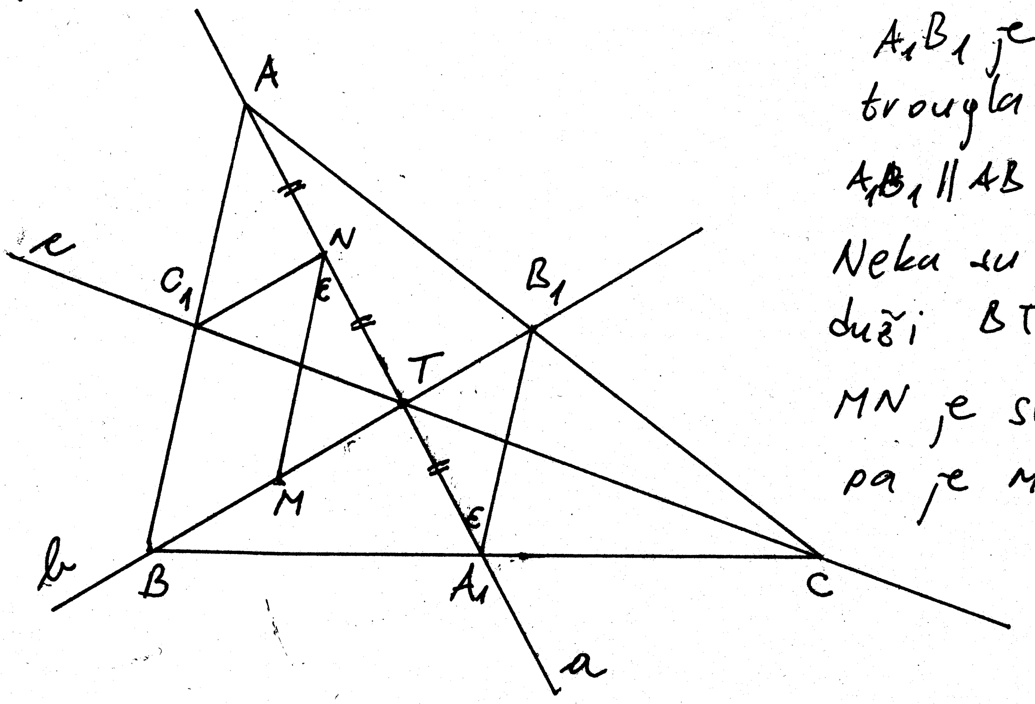
Ako je $b \geq h_c$ i $b < a+c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

(#) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

Napomena: Konkurentne prave su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

Rj: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka su a, b i c tri konkurentne prave koje prolaze kroz tačku T, neka su date tačke $A, A_1 \in a$, $B, B_1 \in b$ i $C, C_1 \in c$ takve da $\triangle ABC$ ima težišne duži AA_1, BB_1 i CC_1.



A_1B_1 je srednja linija trougla $\triangle ABC$ pa je

$A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$ ...(*)

Neka su M i N redom središta duži BT i AT.

MN je srednja linija $\triangle BTA$ pa je $MN \parallel AB$ i $MN = \frac{1}{2} AB$ ...(**)

Iz (*) i (**) $MN \parallel A_1B_1$ i $MN \cong A_1B_1$.

$MN \parallel A_1B_1$ i $p(A, A_1)$ transferzala $\Rightarrow \angle TA_1B_1 \cong \angle TNM = \varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l} \angle MTN \cong \angle A_1TB_1 \ \text{(unakrsni)} \\ \angle TNM \cong \angle TA_1B_1 = \varepsilon \\ MN \cong A_1B_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle MTN \cong \triangle TA_1B_1 \Rightarrow TN \cong TA_1$$

Primjetimo da je C_1N srednja linija $\triangle ABT \Rightarrow C_1N \parallel b$.

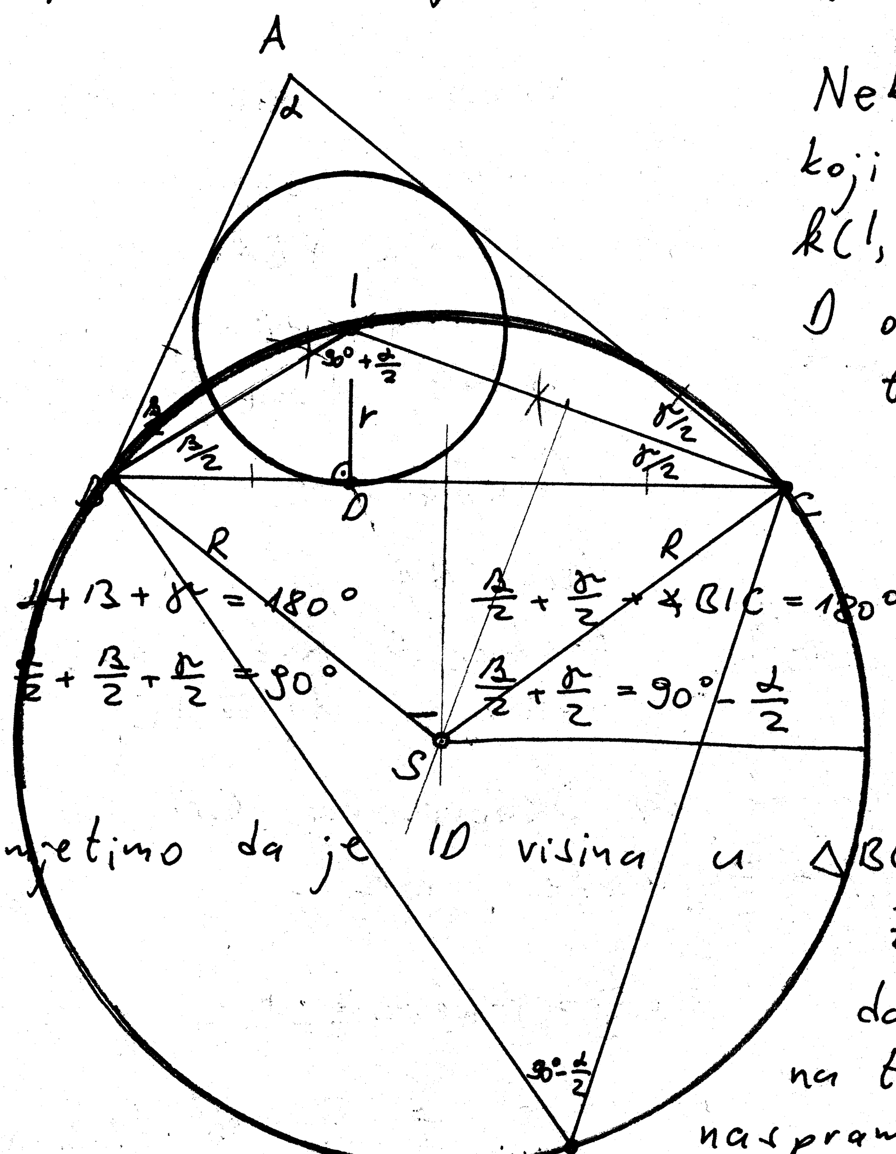
Tačke A i T su date pa možemo konstruisati sredinu N duži AT a time i tačku A_1. Kako su date prave a, b, c i znamo da je $C_1N \parallel b$ to možemo konstruisati i tačku C_1. Poslije ovoga nije teško dobiti tačku B a time i $\triangle ABC$.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, ugao α i poluprečnik kružnice r upisane u taj trougao.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je dat ΔABC u koji je upisana kružnica $k(I, r)$, i neka je tačka D ortogonalna projekcija tačke I na stranicu BC.



$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ$$

$$\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\measuredangle BIC=180^\circ$$

$$\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$$

$$\measuredangle BIC = 90^\circ+\frac{\alpha}{2}$$

Primijetimo da je ID visina u ΔBCI na stranicu BC.

Zadatak u kome je data stranica, visina na tu stranicu i ugao naspram te stranice smo već imali ranije.

Označimo sa S centar opisane kružnice ΔBCI.

U našem slučaju primjetimo da je $\measuredangle BSC = 180^\circ-\alpha$, pa su $\measuredangle SBC \cong \measuredangle BCS = \frac{\alpha}{2}$.

U ΔBSC znamo USU pa ga možemo konstruisati.

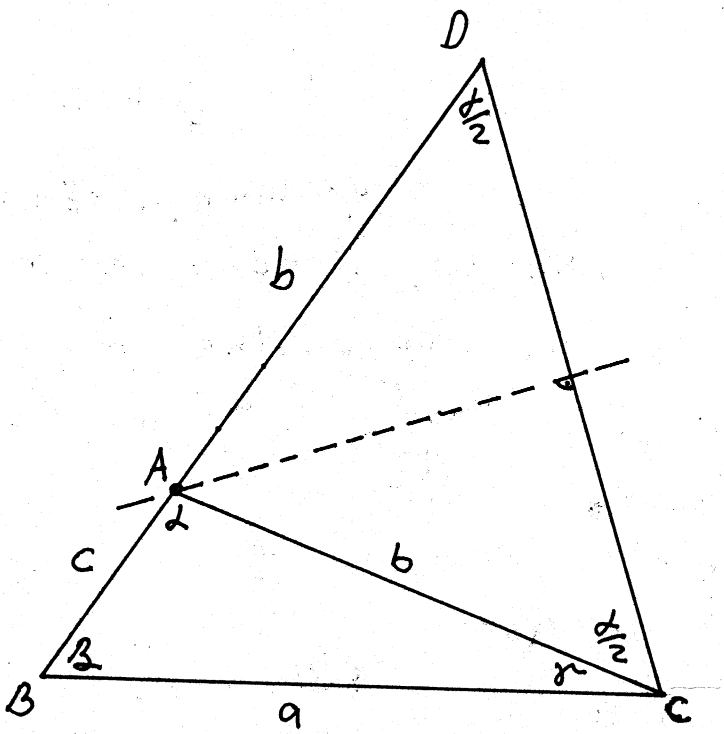
Tačka I se nalazi na udaljenosti r od BC pa kako znamo konstruisati $k(S, SB)$ to možemo konstruisati tačku I.

Sad nije teško dobiti tačku A a time i ΔABC.

\# Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, duž $b+c$ i ugao $\beta-\gamma$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC. Uvedimo oznake $\measuredangle ABC=\beta$, $\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle BCA=\gamma$, $AB=c$, $BC=c$, $AC=b$.

Duž BA produžimo do tačke D tako da je $B-A-D$ i $AD\cong AC$.

Primjetimo da je ΔDAC jkk sa osnovicom CD i da je $\measuredangle ADC \cong \measuredangle ACD = \frac{\alpha}{2}$. Dalje imamo:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ \qquad \gamma+\frac{\alpha}{2}=\gamma+90^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=$$

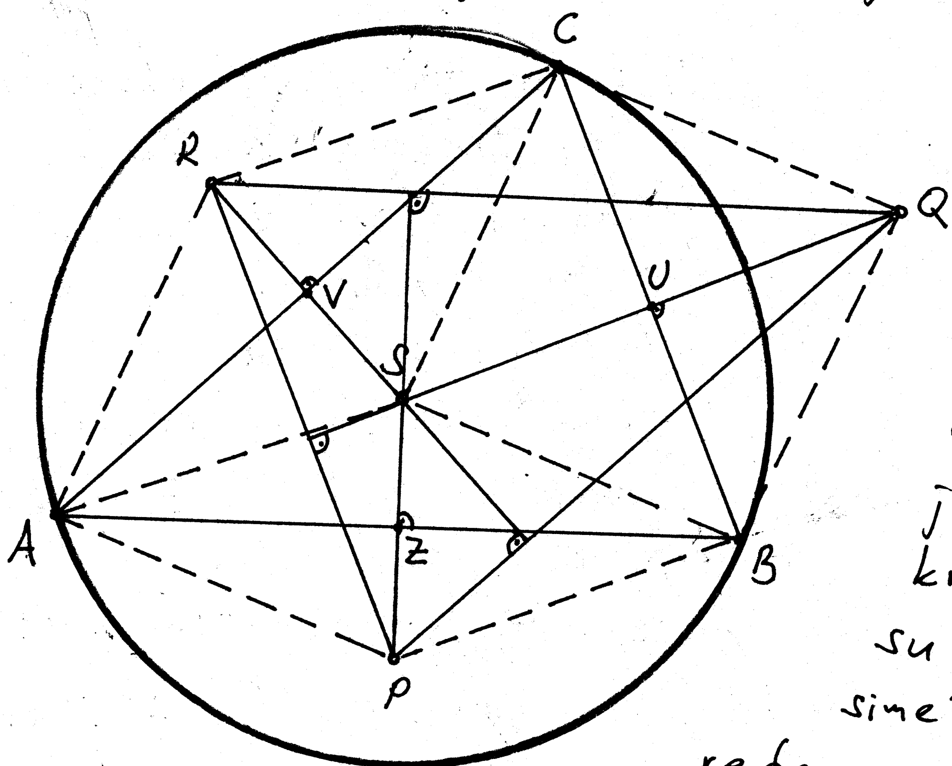
$$\frac{\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2} \qquad =90^\circ-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

U ΔBCD znamo dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati. Tačka A pripada simetrali stranice DC pa ΔABC možemo konstruisati.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične centru opisane kružnice trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je ΔABC dati trougao čiji je centar opisane kružnice S i neka su P, Q i R tačke simetrične tački S redom u odnosu na stranice trougla AB, BC i AC.

Tačka S pripada simetrali stranica AB, BC i AC. Označimo sa U, V i Z ortogonalne projekcije tačke S na stranice BC, AC i AB. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} SU \cong QU \\ \sphericalangle SUB \cong \sphericalangle QUB \\ BU \cong BU \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta SUB \cong \Delta QUB \Rightarrow SB \cong QB.$$

Slično bi pokazali sljedeće (isprekidane duži na slici):

$BQ \cong CQ \cong SC \cong RC \cong AR \cong AS \cong AP \cong BP \cong BS$ (za vježbu).

$BQ \parallel CS \parallel AR$ i $AR \cong BQ \Rightarrow \square ABQR$ paralelogram,

pa kako je $p(P,S) \perp p(A,B)$ to je i $p(P,S) \perp p(R,Q)$.

Slično bi pokazali da je $p(R,S) \perp p(P,Q)$ i $p(Q,S) \perp p(P,R)$ (za vježbu).

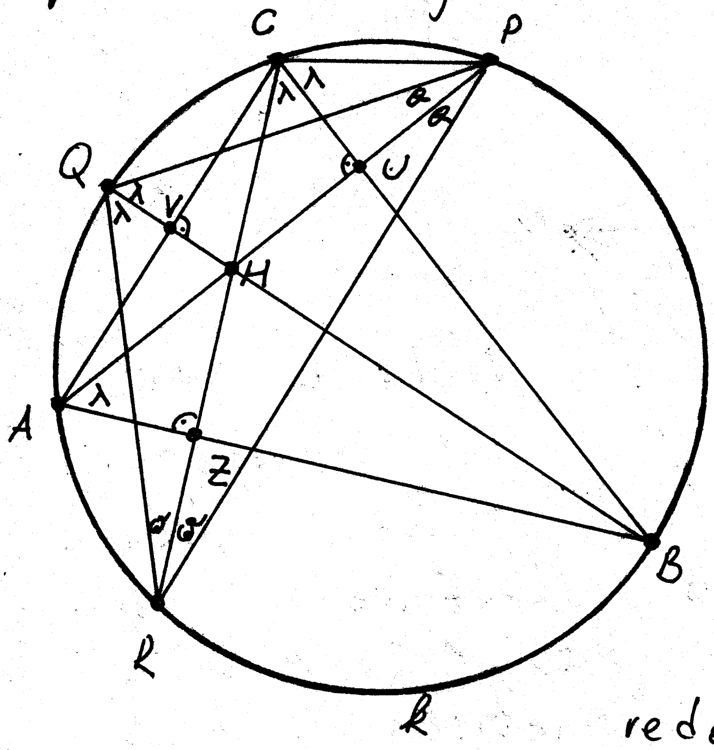
Tačka S je presjek visina ΔPQR pa je možemo konstruisati.

Sad možemo konstruisati i ΔABC presjek (simetrala duži PS, QS i RS).

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je tačka H ortocentar datog trougla ΔABC. Neka su P, Q i R tačke koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru. Označimo sa U, V i Z tačke koje su ortogonalne projekcije ortocentra H redom na stranice BC, AC i AB.

Označimo sa k kružnicu opisanu oko ΔABC.
Dokažimo da tačke P, Q i R leže na kružnici k.
Posmatrajmo $\square ABPC$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} HU \cong PU \\ \measuredangle HUC \cong \measuredangle PUC = 90^\circ \\ CU \cong CU \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta HUC \cong \Delta PUC$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle HCU \cong \measuredangle PCU = \lambda$$

U trouglu ΔAZH imamo $\measuredangle AZH = 90^\circ$, $\measuredangle AHZ = \measuredangle CHU \Rightarrow \measuredangle ZAH = \lambda$.
Uglovi $\measuredangle BAP$ i $\measuredangle BCP$ su podudarni i pledaju na istu stranicu BP $\Rightarrow$ $\square ABPC$ tetivni.
Slično dokazujemo za tačke R i Q (za vježbu).

$\square QRBC$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle RQB = \measuredangle RCB = \lambda$

$\square QABP$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle PAB = \measuredangle BQP = \lambda$

Slično bi pokazali da je $\measuredangle QRC = \measuredangle PRC = \omega$ i $\measuredangle QPA = \measuredangle RPA = \theta$.
(za vježbu).

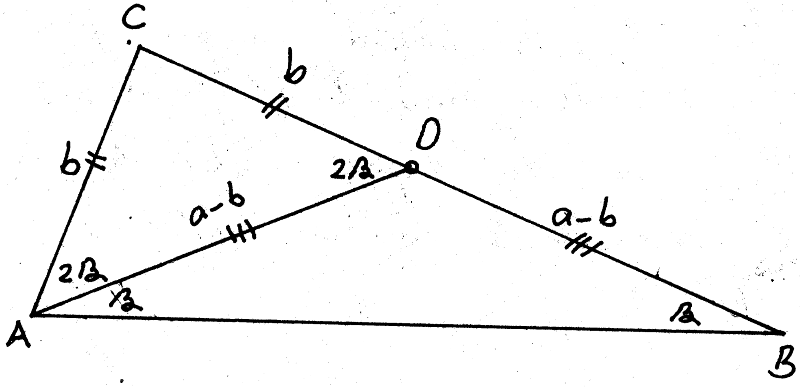
Kako kružnicu k možemo konstruisati, sad možemo konstruisati i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date stranice a i b i zna se da je $\alpha = 3\beta$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je dat ΔABC kod koga je $\alpha = 3\beta$. ($\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$).



Kako je $\alpha > \beta$ možemo uzeti tačku D na stranici BC tako da $\measuredangle BAD = \beta$.

ΔABD jkk

Kako je $\measuredangle ADC$ vanjski ugao ΔABD to je $\measuredangle ACD = 2\beta$.

ΔADC jkk $\Rightarrow$ $AC = DC = b$ $\Rightarrow$ $BD = a - b$

ΔABD jkk $\Rightarrow$ $AD = BD = a - b$

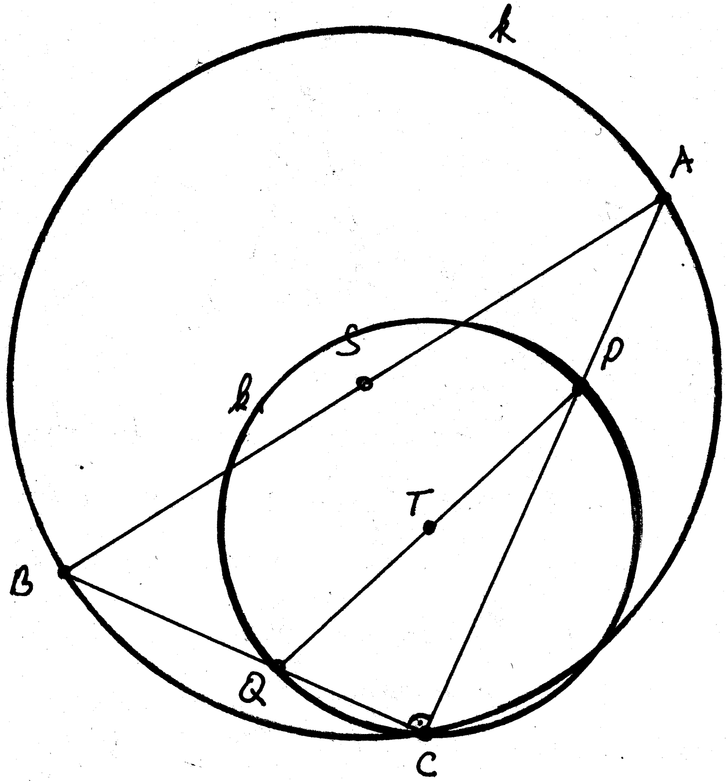
U ΔADC su nam poznate tri stranice pa ga možemo konstruisati.

Kako nam je poznata stranica a poslije konstrukcije ΔADC nije teško konstruisati ΔABC.

(#) Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica $k(S, SA)$ u čiju je unutrašnjost upisan pravougli $\triangle ABC$ sa hipotenuzom AB. Neka su tačke P i Q takve da $P \in AC$ i $Q \in BC$.

Primjetimo da je $\measuredangle BCA$ ugao nad prečnikom.

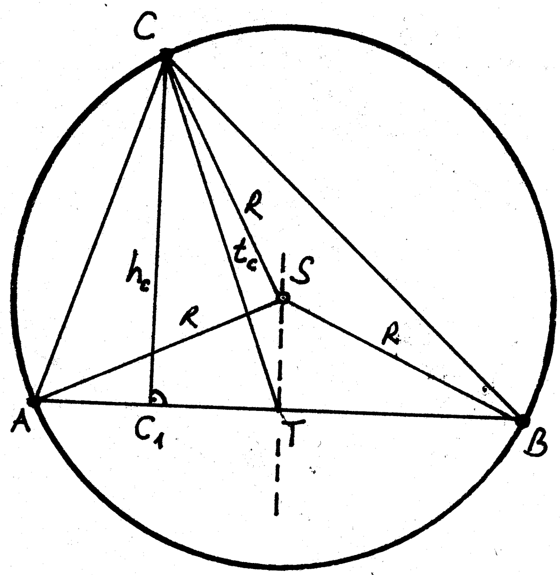
Ako oko $\triangle PQC$ opišemo kružnicu, kako je $\measuredangle QCP = 90°$ to je centar opisane kružnice k_1 oko $\triangle PQR$ u tački T (sredini duži PQ).

Kako je kružnica k data, a možemo naći sredinu T duži PQ to možemo konstruisati tačku C a time i $\triangle ABC$.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su dati visina h_c težišnica t_c i poluprečnik opisane kružnice R.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC takav da je $CC_1 = h_c$ visina spuštena na stranicu AB, $CT = t_c$ težišnica spuštena iz vrha C i R poluprečnik opisane kružnice oko Δ.

Kako su dati h_c, t_c to ΔCC_1T možemo konstruisati (imamo dvije stranice i pravi ugao).

Centar S kružnice opisane oko trougla leži na simetrali stranice AB (koju možemo konstruisati zato što imamo tačku T).

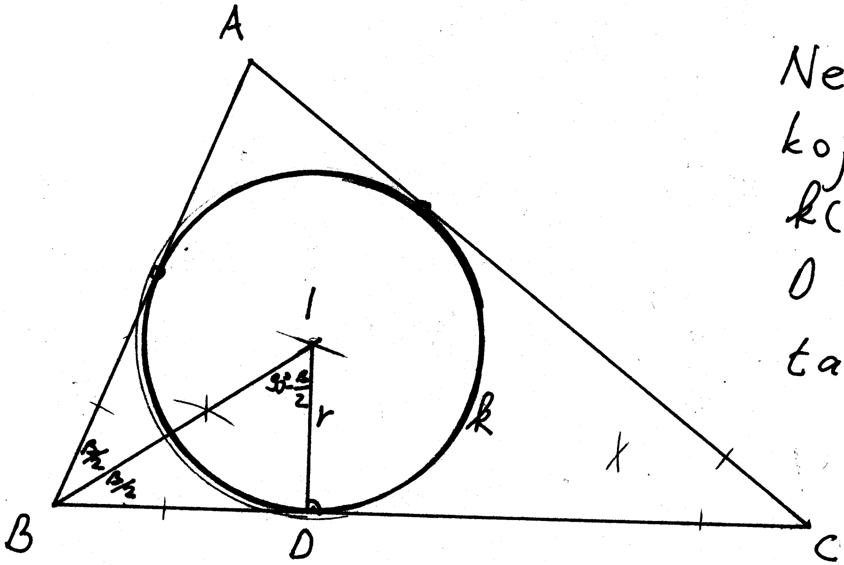
S je udaljen od tjemena C za dužinu R pa ga možemo konstruisati.

Sad bez problema možemo konstruisati tačke A i B, a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su dati stranica a, ugao β i poluprečnik upisane kružnice r.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



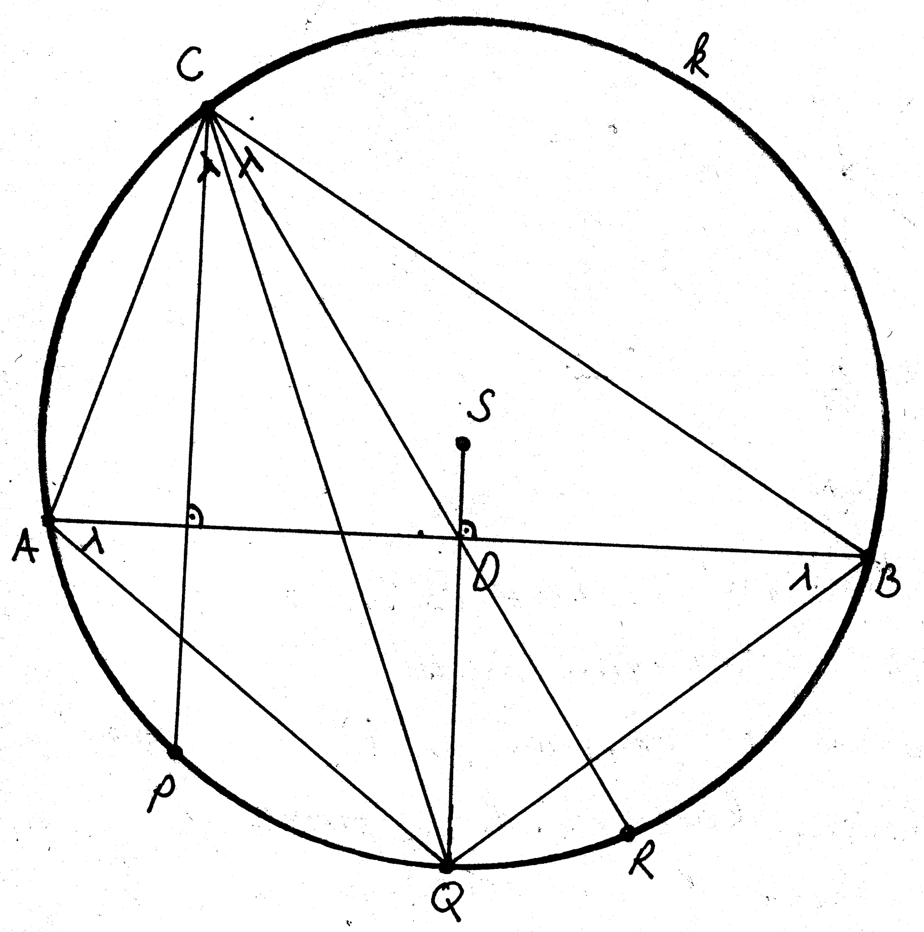
Neka je dat ΔABC u kojem je upisana kružnica $k(I, r)$. Označimo sa D ortogonalnu projekciju tačke I na stranicu $BC = a$. (prema tome $ID = r$).

U ΔBDI znamo stranicu DI i dva ugla pa ga možemo konstruisati. Kako znamo dužinu stranice a to nije problem konstruisati i tačku C.
Tjeme A ćemo dobiti kao presjek tangenti iz B i C na kružnicu k, a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date tačke P, Q i R u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz tjemena C sijeku kružnicu opisanu oko trougla ΔABC.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je k kružnica opisana oko ΔABC i neka su P, Q i R tačke u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz vrha C sijeku kružnicu.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kako je } \square AQBC \text{ tetivni} \\ \text{i } \measuredangle ACQ \cong \measuredangle BCQ\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\measuredangle ABQ \cong \measuredangle QAB \\ \Downarrow \\ \Delta AQB \text{ jkk}\end{array}$$

pa tačka Q pripada simetrali stranice AB.

Označimo sa D $\{D\} = QS \cap AB$.

Primjetimo da je $p(Q,S) \parallel p(P,C)$. ...(*)

Kako kružnicu $k(S, SQ)$ mogu konstruisati to iz (*) mogu konstruisati i tačku C.

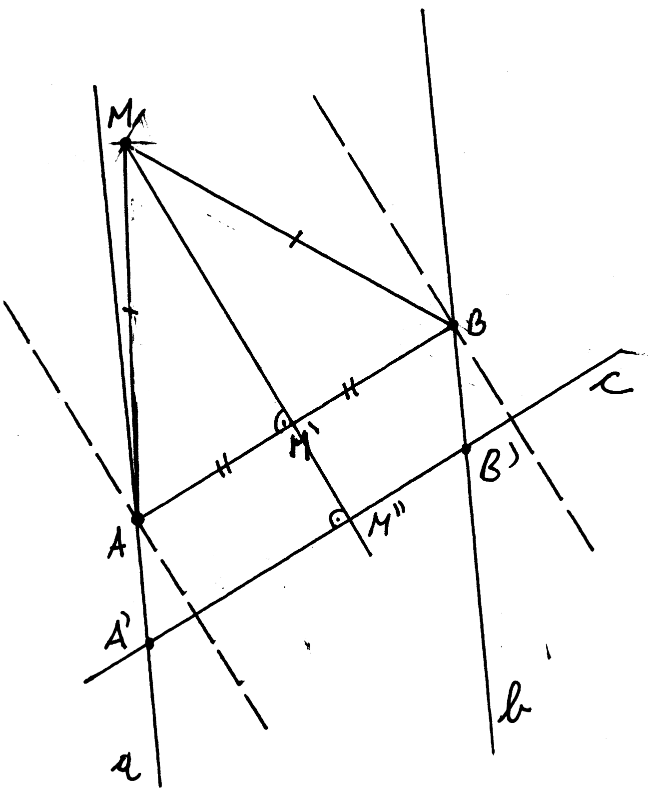
Sad bez problema mogu dobiti tačku D a time i ΔABC.

#) Date su paralelne prave a i b, tačka M između njih i prava c koja nije paralelna ni sa a, ni sa b. Konstruisati jednakokraki trougao ΔMAB, sa osnovicom AB, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $p(A,B) \parallel c$.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABM traženi jednakokraki trougao takav da $A \in a$, $B \in b$, $a \parallel b$, $p(A,B) \parallel c$, $c \nparallel a$, $c \nparallel b$, M tačka između pravih a i b.



Ako iz vrha M spustimo visinu MM' na osnovicu AB nije teško pokazati da je $AM' \cong BM'$ tj. da je M' sredina AB (ovo možemo zaključiti iz $\Delta AM'M \cong \Delta BM'M$ gdje podudarnost trouglova slijedi iz SSU).

Dalje uvedimo oznake $c \cap a = \{A'\}$; $c \cap b = \{B'\}$, $p(M,M') \cap c = \{M''\}$.

Primjetimo da je $\square A'B'BA$ paralelogram (ZAŠTO?), pa je

$$AB \cong A'B'$$

$\Rightarrow$ poznata nam je dužina od $\frac{1}{2}AB$.

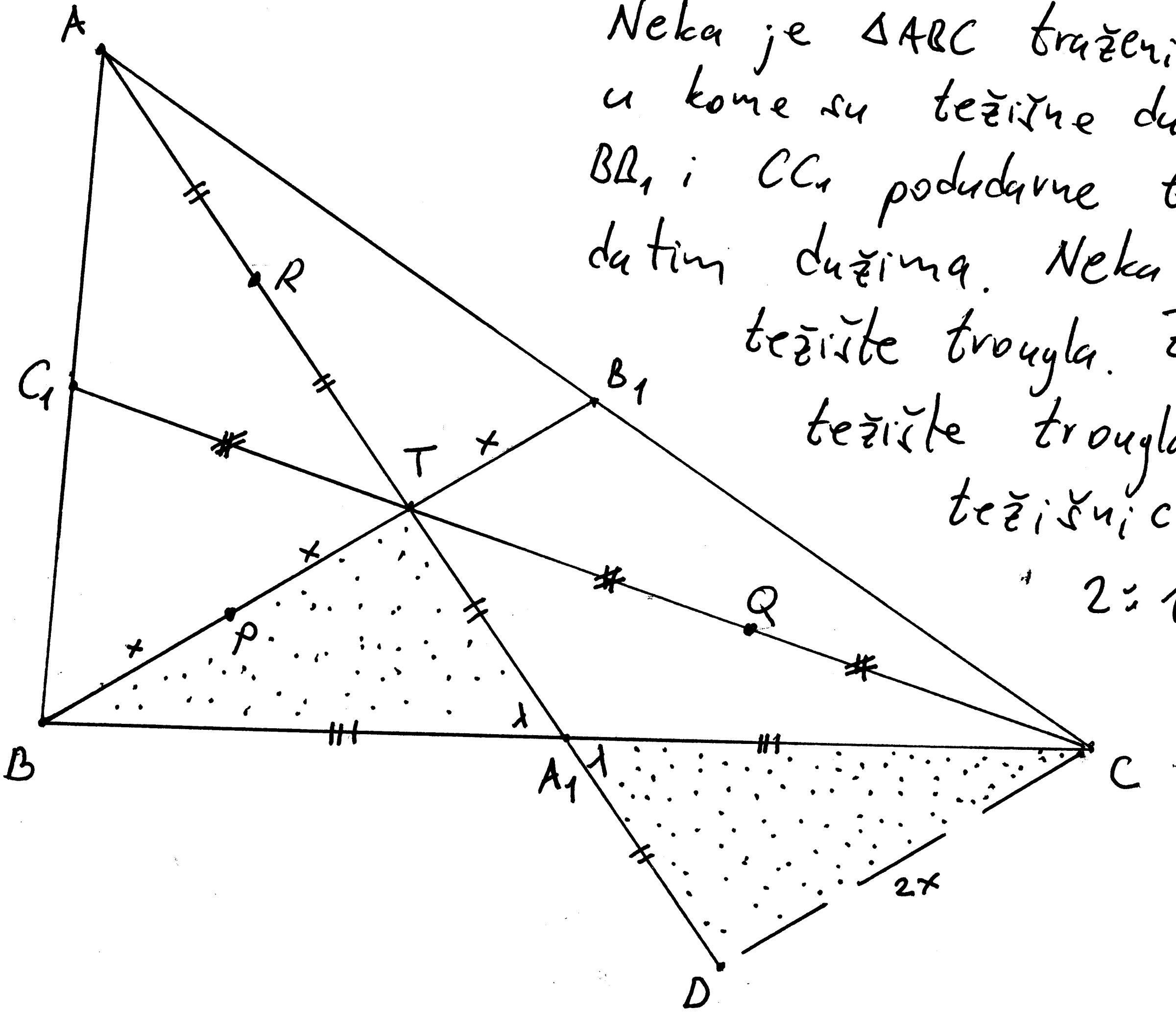
Kako nam je data tačka M i prava c to tačku M'' možemo konstruisati ($\measuredangle MM''c = 90^\circ$). Kako se tačke A i B nalaze na udaljenosti $\frac{1}{2}AB$ od prave $p(M,M'')$, a poznate su nam prave a i b, to tačke A i B nije teško konstruisati, a poslije njih i ΔABM.

(#) Konstruisati trougao ΔABC takav da su mu težišne duži podudarne trima datim dužima.

R:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je ΔABC traženi trougao u kome su težišne duži AA_1, BB_1 i CC_1 podudarne trima datim dužima. Neka je T težište trougla. Znamo da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru $2:1$.

Označimo sa P, Q i R redom sredine duži BT, CT, AT. Tada

$BP \cong PT \cong TB_1$, $CQ \cong QT \cong TC_1$ i $AR \cong RT \cong TA_1$.

Neka je D tačka na $p[A, A_1)$ t.d. $A - A_1 - D$ i $TA_1 \cong A_1D$

$$\left.\begin{array}{l} BA_1 \cong A_1C \\ \sphericalangle BA_1T \cong \sphericalangle CA_1D = \lambda \\ TA_1 \cong A_1D \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta BA_1T \cong \Delta CA_1D$$

$$\Downarrow$$

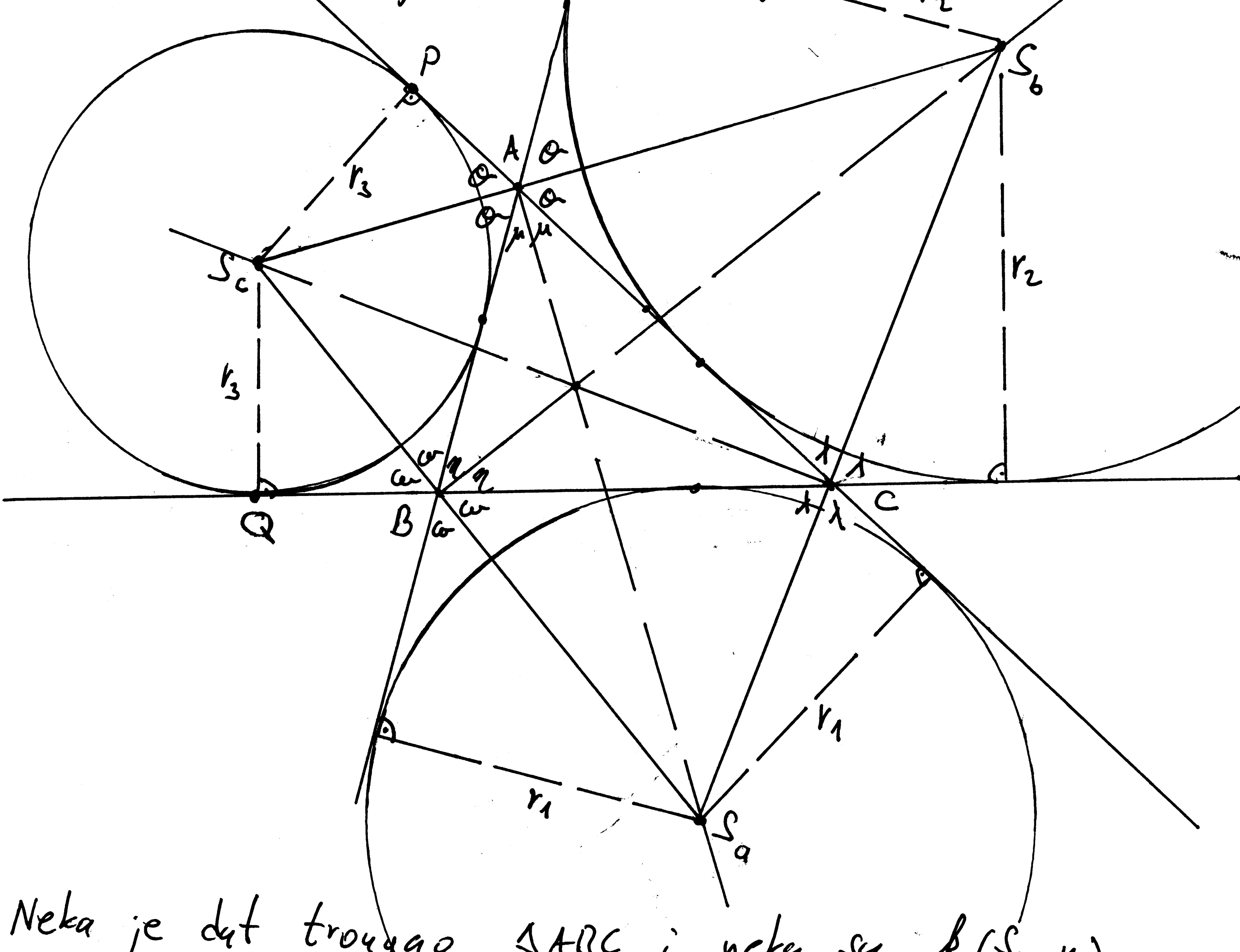
$$BT \cong CD$$

Kako su nam poznate dužine težnih linija time su nam poznate i dužine za CT, TD i CD pa ΔDCT možemo konstruisati, a time i ΔABC.

\# Konstruisati trougao ΔABC takav da su mu tri date nekolinearne tačke S_a, S_b i S_c centri spolja upisanih krugova.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC i neka su $k_1(S_a, r_1)$, $k_2(S_b, r_2)$ i $k_3(S_c, r_2)$ spolja upisani krugovi. Prvo primjetimo da tačke S_a, S_b i S_c pripadaju presjecima simetrala spoljašnjih uglova. Dalje primjetimo da S_a pripada simetrali ugla $\measuredangle BAC$ (ZAŠTO?), da tačka S_b pripada simetrali ugla $\measuredangle CBA$ (ZAŠTO?) i da tačka S_c pripada simetrali ugla $\measuredangle BCA$ (ZAŠTO? $\Leftarrow$ $\Delta CS_cQ \cong \Delta CS_cP$ zbog pod. SSU).

Sad posmatrajmo uglove oko vrha A (vidi sliku)

$$4\theta + 4\mu = 360^\circ \quad /:4$$

$$\theta + \mu = 90^\circ \implies S_a A \perp S_c S_b$$

$$\Downarrow$$

$S_a A$ je visina $\Delta S_a S_b S_c$.

Posmatrajmo uglove oko vrha B

$$4\omega + 4\eta = 360^\circ \quad /:4$$

$$\omega + \eta = 90^\circ \implies S_b B \perp S_a S_c$$

$$\Downarrow$$

$S_b B$ je visina $\Delta S_a S_b S_c$.

Slično bi pokazali da je $S_c C$ visina $\Delta S_a S_b S_c$.

Kako su date tačke S_a, S_b, S_c to nije teško konstruisati visine $\Delta S_a S_b S_c$ a time dobiti A, B, C i ΔABC.