8 Elementarni zadaci: Crtanje duži datog omjera

Elementarna pitanja:

1. Za dva trougla kažemo da su slična akko... Nabrojati četri stava o sličnosti trouglova! O čemu moramo voditi računa kada se pozivamo na sličnost SSU?
2. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni ($AS \cdot CS = ...$, gdje je S...).
3. Ugao između tangente i tetive jednak je periferiskom... Kako bi to dokazali?

1. Date su duži a i b ($b < 1 < a$). Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$.

2. Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{3a} - a^2}{\sqrt{b}}$, gdje je $a < 1 < b$.

3. Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} - 1$, gdje su a i b date duži ($a < 1 < b$).

4. Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

5. Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}$.

Sličnost trouglova i Talesova teorema (nastavak)

Trigonometrija

6. **(Kosinusna teorema)** Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

7. **(Sinusna teorema)** Dat je raznostrańični trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.

8. Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ i $c = 2R\sin\gamma$.

9. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

10. Neka je AD visina trougla $\triangle ABC$ i R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Neka su tačke E i F podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC. Ako je $AD = R\sqrt{2}$, dokazati da prava EF prolazi kroz centar opisane kružnice.

Razni zadaci

11. A_1, B_1, C_1 i D_1 su tačke koje su redom sredine stranica BC, CD, AD i AB kvadrata $\square ABCD$. Dokazati da se duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 sijeku tako da obrazuju kvadrat sa stranicom jednakom $\dfrac{2}{5}$ dužine svake od tih duži.

12. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ je $CH : HC_1 = 3 : 1$, gdje je H ortocentar a C_1 podnožje visine iz vrha C. Neka je K sredina visine CC_1. Kokazati da je $\measuredangle AKB = 90°$.

13. Date su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u tačkama M i N i imaju zajedničku tangentu $p(A, B)$ ($A \in k_1$, $B \in k_2$). M je tačka na pravoj $p(C, D)$ ($C \in k_1$, $D \in k_2$) takva da je $C - M - D$ i $p(C, D) || p(A, B)$. Tetive NA i CM se sijeku u tački P, tetive NB i MD se sijeku u tački Q, a prave $p(A, C)$ i $p(B, D)$ se sijeku u tački E. Dokazati da je $PE \cong QE$.

14. U trouglu $\triangle ABC$, AP polovi ugao $\measuredangle BAC$, sa P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$ sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP \cong AQ + QB$. Koje su moguće veličine za uglove u trouglu $\triangle ABC$.

15. **(zadatak 9, drugi put)** Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

16. **(Menelaus-ova teorema, drugi put)** Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku. Dokazati da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne ako i samo ako vrijedi $\dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$.

17. Kroz tjemena A i B jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$ konstruisane su normale n_1 i n_2 na AB u istoj poluravni u kojoj je tačka C. Kroz tjeme C konstruisana je prava koja siječe n_1 u M i n_2 u N. Simetrala duži MN siječe pravu AB u tački S.

(a) Dokazati da je $\triangle MSN$jednakostraničan.

(b) Površinu trougla $\triangle MSN$ izraziti kao funkciju dužine stranice $\triangle ABC$ i ugla $\measuredangle ACS$.

18. U kružnicu je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lukova BC, CA i AB. Tačka M se nalazi sa one strane prave BC sa koje nije tačka A, tačka N se nalazi sa one strane prave AC sa koje nije tačka B i tačka P se nalazi sa one strane prave AB sa koje nije tačka C. Tetiva MN siječe stranicu BC i tački K, a NP siječe stranicu AB u tački L. Dokazati da je $KL||AC$.

19. **(Teorema Čevija)** Neka tačke A_1, B_1 i C_1 pripadaju stranicama BC, AC i AB trougla $\triangle ABC$ redom. Dokazati da se duži AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u istoj tački ako i samo ako vrijedi
$\dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$.

20. Dokazati da se

(a) težišnice

(b) visine

(c) simetrale uglova

trougla sijeku u istoj tački.

21. Neka su $p(A, A_1)$, $p(B, B_1)$ i $p(C, C_1)$ tri prave trougla $\triangle ABC$ koje se sijeku u R. Dokazati da vrijedi $\dfrac{RA_1}{AA_1} + \dfrac{RB_1}{BB_1} + \dfrac{RC_1}{CC_1} = 1$.

22. Dokazati da je rastojanje vrha trougla od ortocentra dva puta veće od rastojanja centra opisane kružnice od stranice trougla naspram tog vrha.

23. **(Ojlerova prava)** Dokazati da su ortocentar, težište i centar opisane kružnice trougla kolinearne tačke pri čemu težište T dijeli duž HS u omjeru 2:1.

Napomena: Prava kroz H, T i S se zove Ojlerova prava.

24. Dokazati da sredine stranica, podnožja visina i sredine duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima trougla pripadaju jednoj kružnici.

Napomena: Kružnica koja prolazi kroz navedenih devet tačaka zove se Ojlerova kružnica ili Kružnica devet tačaka.

25. Dokazati da kružnica 9 tačaka ima centar na sredini duži SH (S centar opisane kružnice, H ortocentar trougla) a poluprečnik je dužine $\dfrac{1}{2}R$ (R poluprečnik opisane kružnice).

26. Dat je $\triangle ABC$ u kome vrijedi da je $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Bez upotrebe Pitagorine teoreme pokazati da je $\measuredangle BCA$ prav ugao.

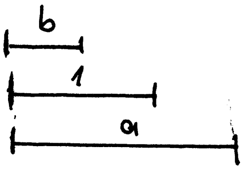
27. Dat je četverougao $\square ABCD$ i neka je p transferzala koja siječe prave $p(A, B)$, $p(A, D)$, $p(C, D)$, $p(B, C)$, $p(A, C)$, $p(B, D)$ redom u tačkama E, F, G, H, I, J. Pokazati da je

$$\frac{EF}{GH} = \frac{FI}{GI} \cdot \frac{EJ}{HJ}.$$

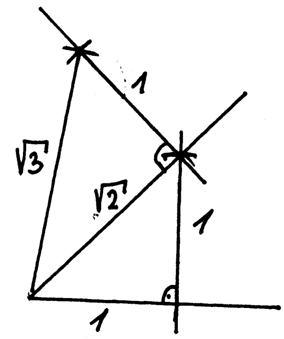
(#) Date su duži a i b $(b<1<a)$. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+a^2 .$$

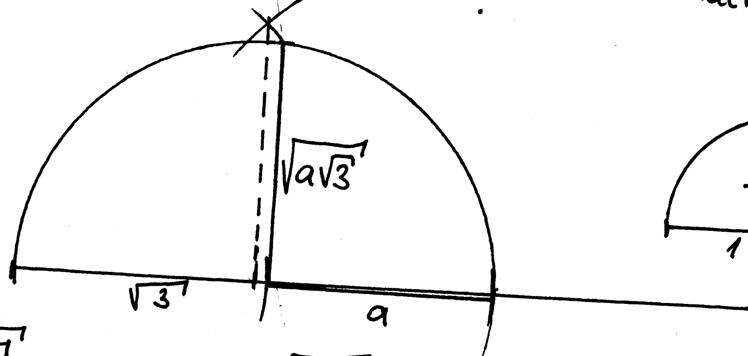
Rj.



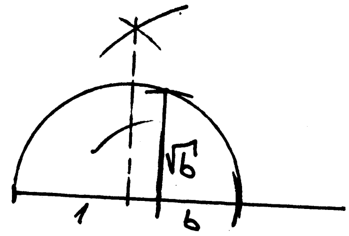
Nacrtajmo duži $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$.



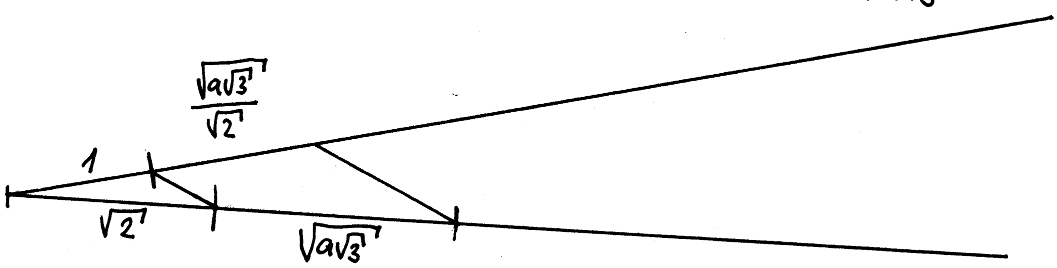
Nacrtajmo duž $\sqrt{a\sqrt{3}}$.



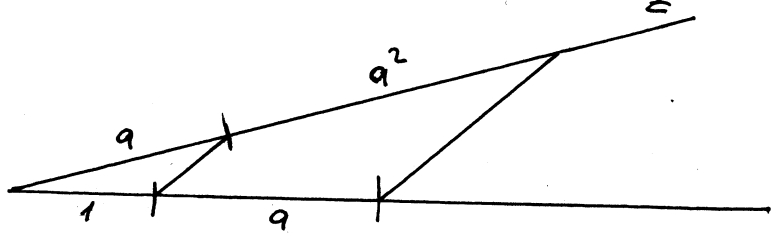
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



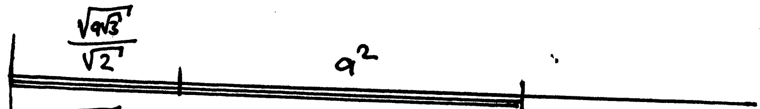
Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. $\quad Y=\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a\sqrt{3}}}=\frac{1}{Y}$



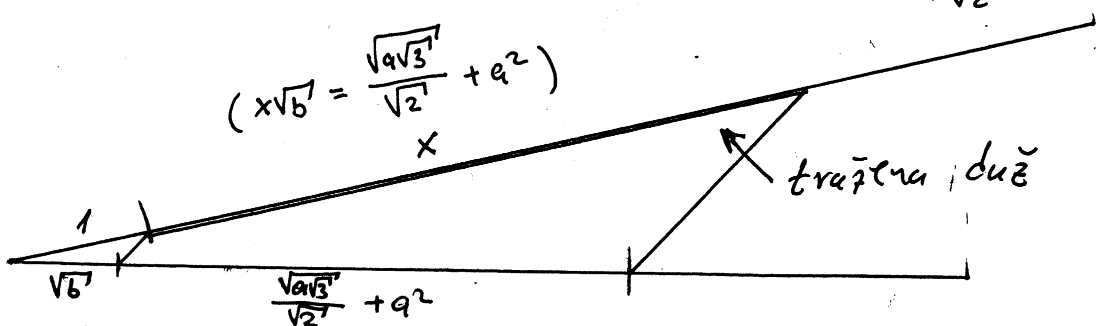
Nacrtajmo duž a^2. $\quad z=a\cdot a \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{a}{z}$



Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+a^2$



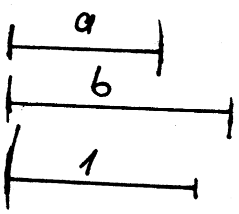
Na kraju, nacrtajmo duž $x=\dfrac{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+a^2}{\sqrt{b}}$. $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+a^2}=\dfrac{1}{x}\right)$

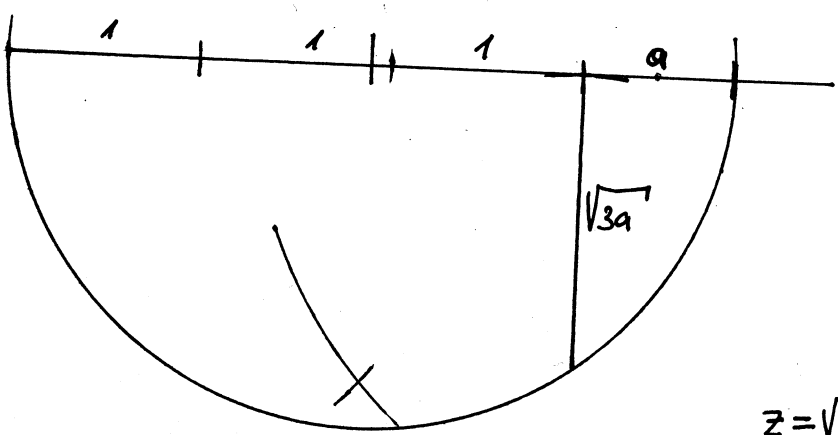


(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2}+1=\frac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}, \quad a<1<b.$$

Rj.



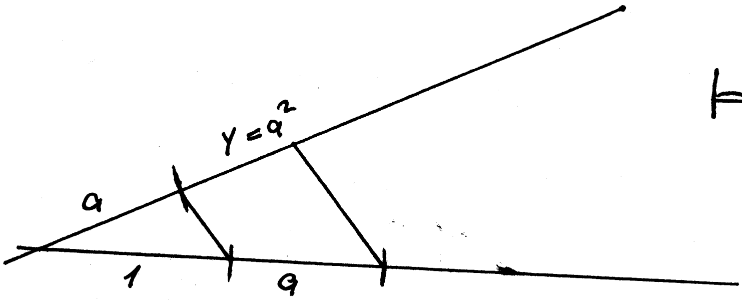


$Y=a^2$

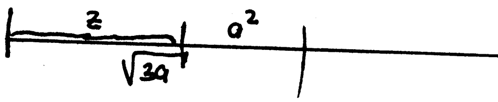
$Y=a\cdot a$

$\frac{Y}{a}=\frac{a}{1}$

$\frac{1}{a}=\frac{a}{Y}$

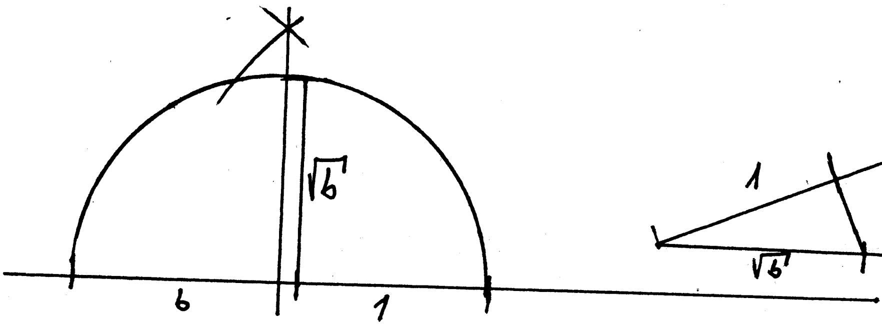


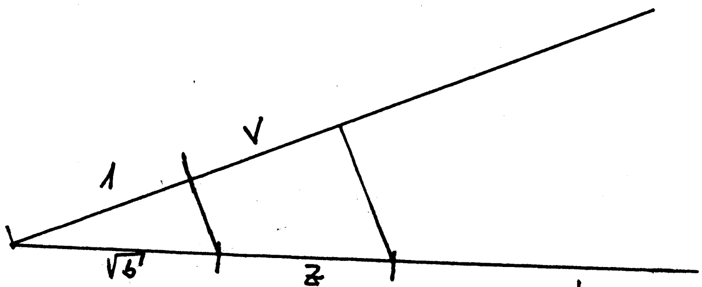
$z=\sqrt{3a}-a^2$



$V=\frac{z}{\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{b}}{z}=\frac{1}{V}$



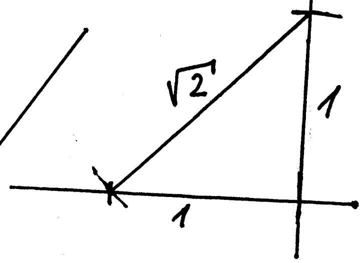


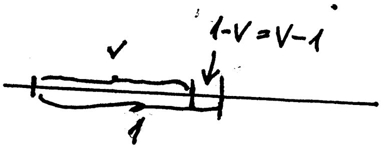
Sad imamo $x\sqrt{2}+1=V$

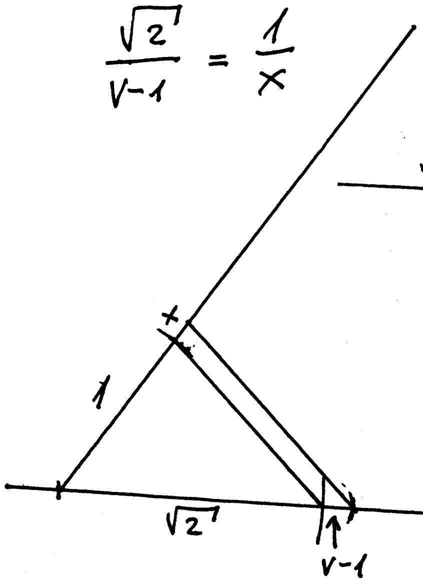
$x\sqrt{2}=V-1$

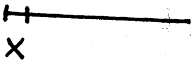
$x=\frac{V-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{V-1}=\frac{1}{x}$



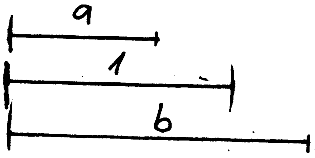




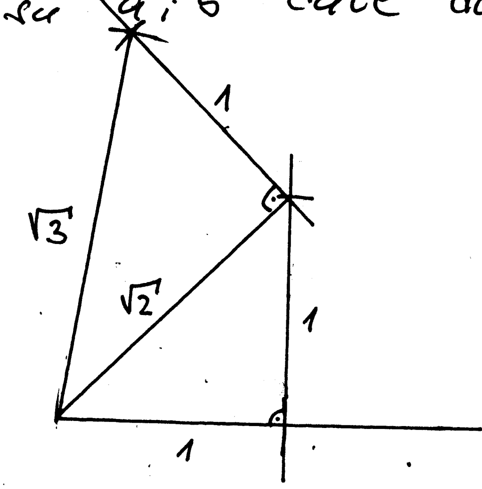


(#) Nacrtati duž $x=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$ gdje su a i b date duži $(a<1<b)$.

Rj.



Nacrtajmo duž $\sqrt{3}$.

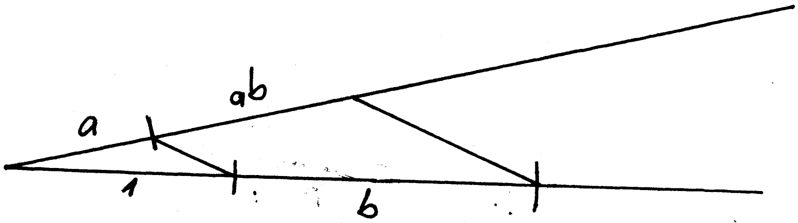


Nacrtajmo duž ab.

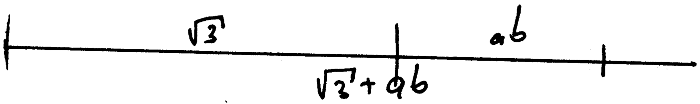
$Y=a\cdot b$

$\dfrac{Y}{a}=\dfrac{b}{1}$

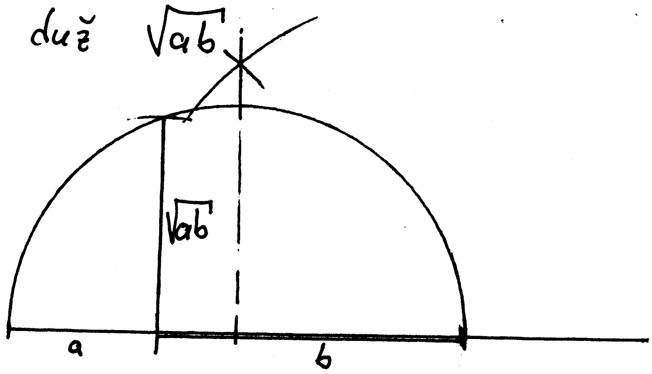
$\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{Y}$



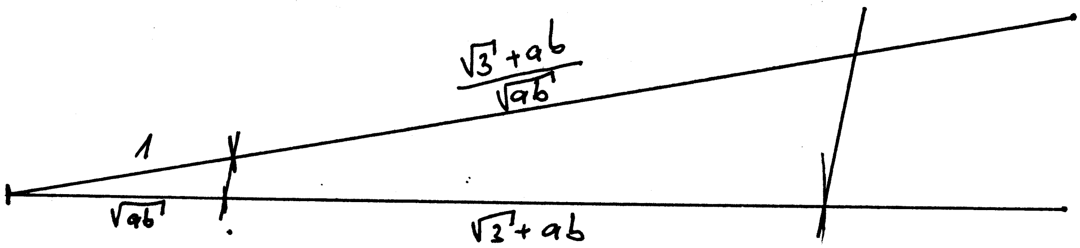
Nacrtajmo duž $\sqrt{3}+ab$



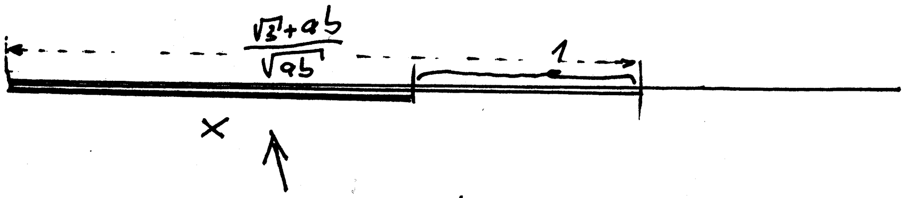
Nacrtajmo duž $\sqrt{ab}$



Nacrtajmo duž $\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}$. $z=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}+ab}=\dfrac{1}{z}$



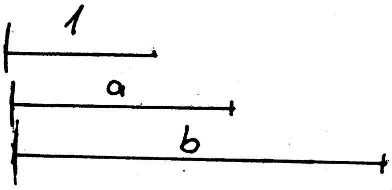
Na kraju nacrtajmo duž $x=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$



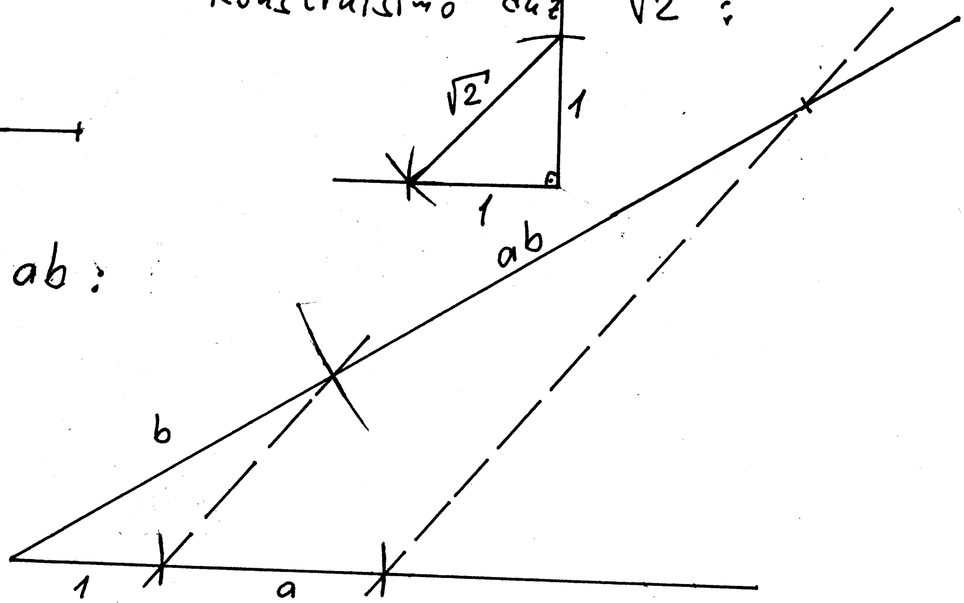
tražena duž

(#) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

Rj. Neka su date duži a, b i neka je data jedinična duž.



Konstruišimo duž $\sqrt{2}$:



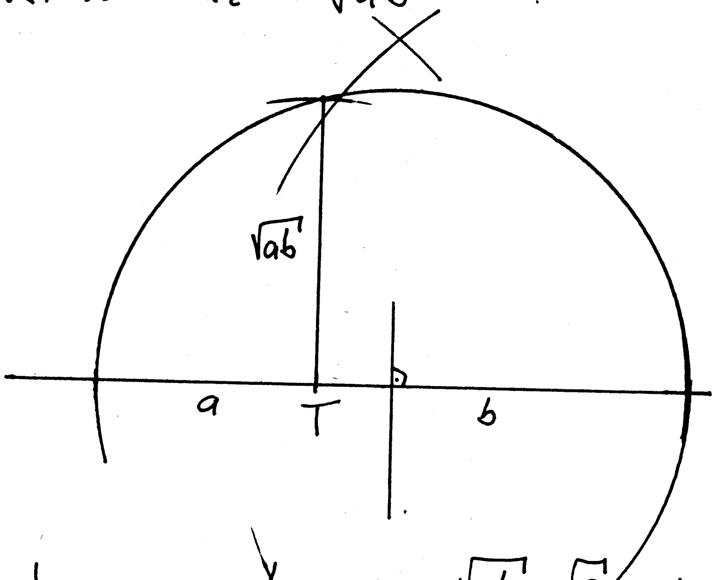
Konstruišimo duž ab:

$x_1 = ab \quad /:b$

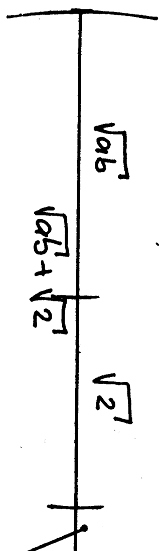
$\dfrac{x_1}{b} = \dfrac{a}{1}$

$\dfrac{1}{a} = \dfrac{b}{x_1}$

Konstruišimo duž $\sqrt{ab}$



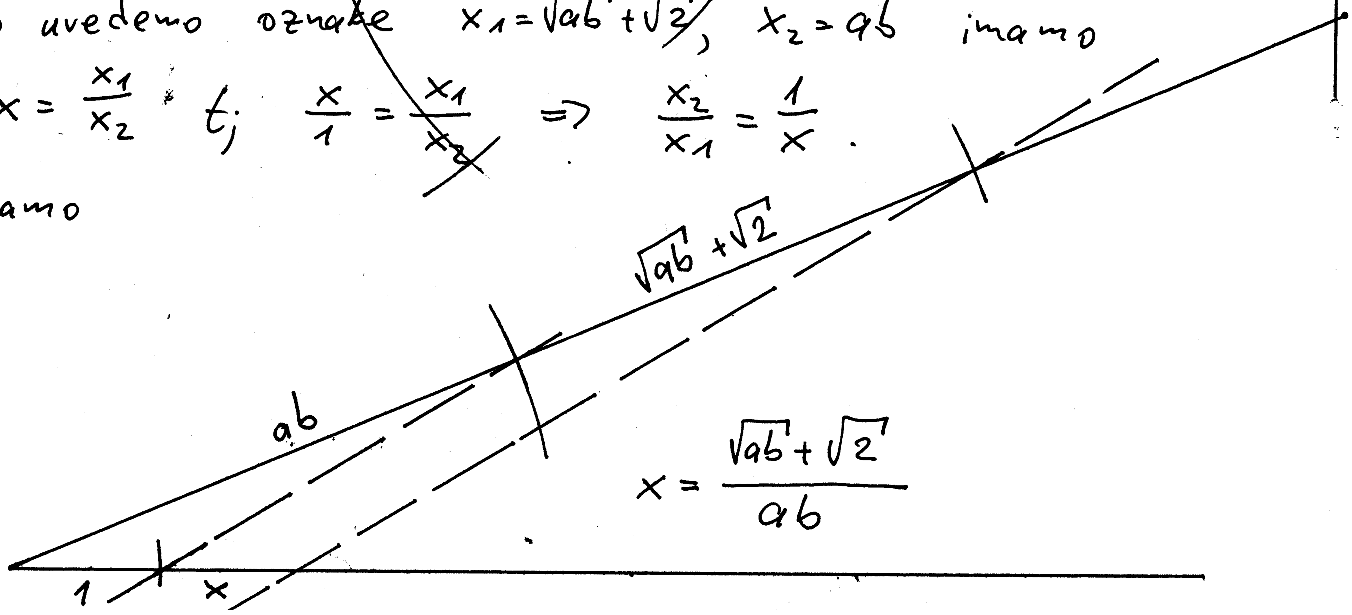
Konstruišimo duž $\sqrt{ab} + \sqrt{2}$:



Ako uvedemo oznake $x_1 = \sqrt{ab} + \sqrt{2}$, $x_2 = ab$ imamo

$x = \dfrac{x_1}{x_2}$ tj. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{x_1}{x_2} \Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{x}$.

Imamo

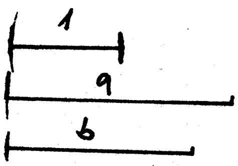


$x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$

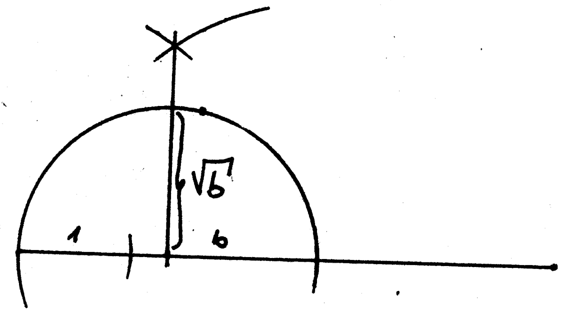
(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}.$$

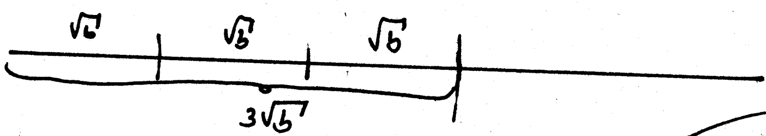
Rj.



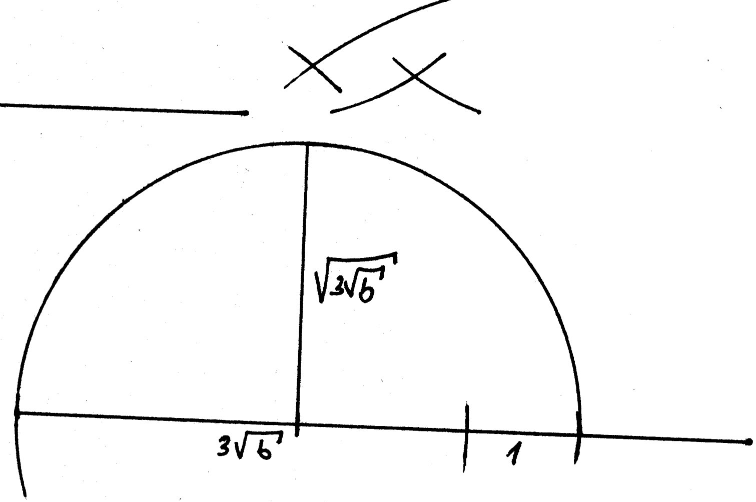
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



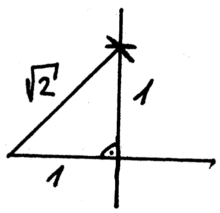
Nacrtajmo duž $3\sqrt{b}$ tj. $\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{b}$



Nacrtajmo duž $\sqrt{3\sqrt{b}}$



Nacrtajmo $\sqrt{2}$



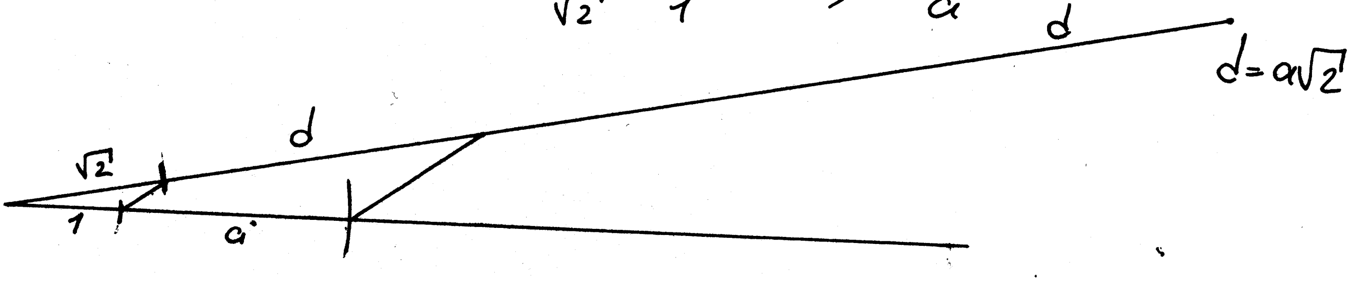
$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a} \quad /\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

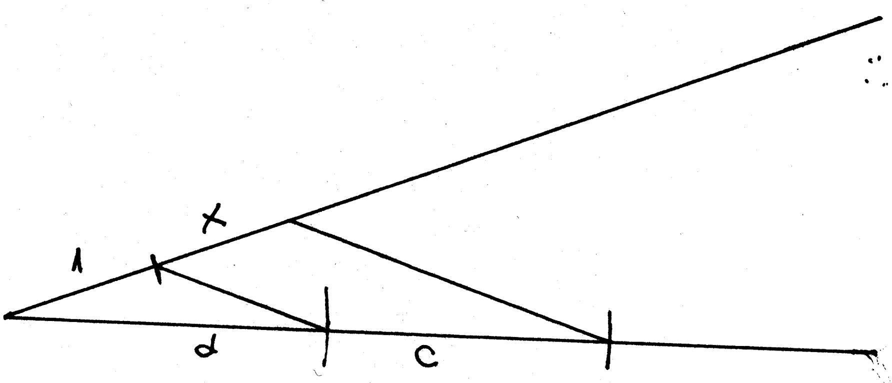
$$x = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{\sqrt{2}\,a} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{1}{x}$$

gdje je $c = \sqrt{3\sqrt{b}}$

Nacrtajmo duž $d = a\sqrt{2}$

$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{d}$$





21. Konstruisati duž $x=\frac{\sqrt{ab}}{a}$, ako su a i b date duži.

Rj.

$$x=\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

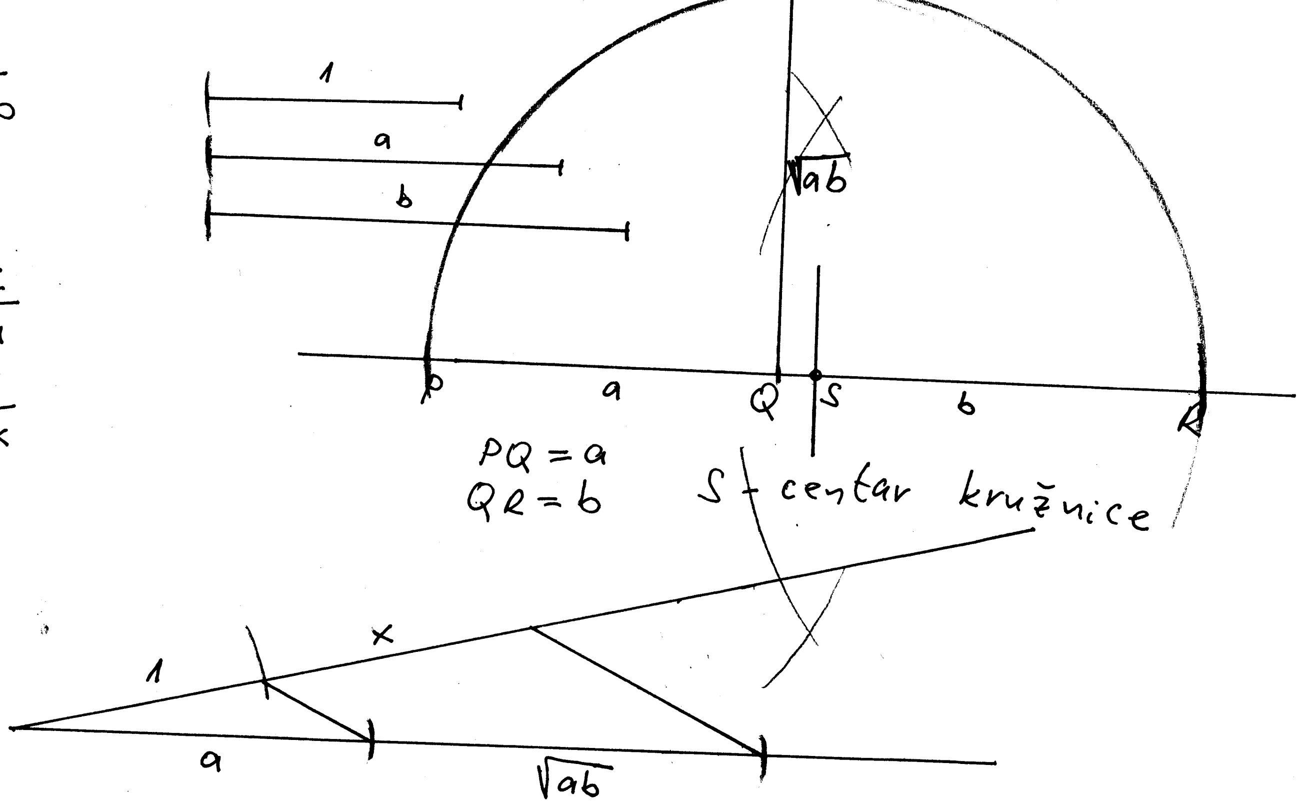
Prvo ćemo konstruisati duž $c=\sqrt{ab}$.

$$c=\sqrt{ab}$$

$$x=\frac{c}{a}$$

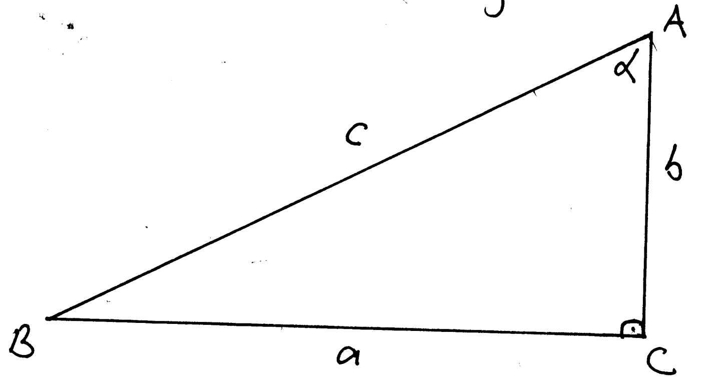
$$\frac{x}{1}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{1}{x}$$



Trigonometrija

U pravouglom trouglu ΔABC sa kracima a, b, hipotenuzom c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$ definišemo



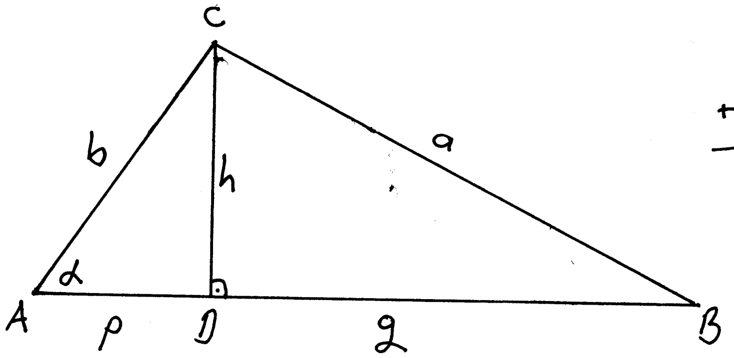
$$\sin\alpha=\frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$$

22. (Kosinusna teorema)
Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha=\measuredangle BAC$. Dokazati da je
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

Rj. Sa $CD=h$ označimo visinu spuštenu na stranicu $AB=c$.
Označimo sa p duž AD a sa q duž DB.



$$a^2 = h^2 + q^2$$
$$+\ h^2 = b^2 - p^2$$
$$a^2 = b^2 + q^2 - p^2$$
$$q^2 - p^2 = (c-p)^2 - p^2 = c^2 - 2pc$$

Imamo $a^2 = b^2 + c^2 - 2pc$, kako je $\cos\alpha = \frac{p}{b}$

tj. $p = b\cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

q.e.d.

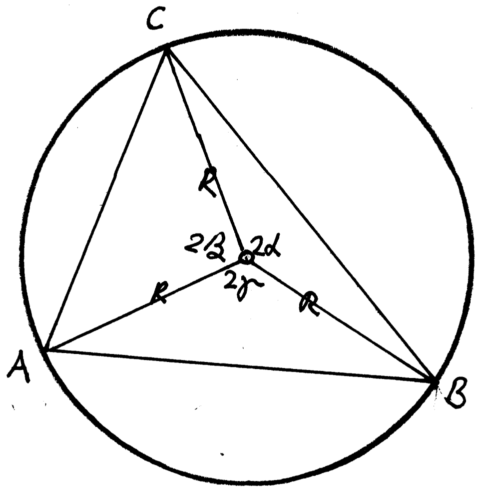
23. (Sinusna teorema)
Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

Uputa:
Ako uvedemo oznake kao u prethodnom zadatku imamo: $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, $\sin\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{h}{b}}{\frac{h}{a}}$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \ \ldots$$

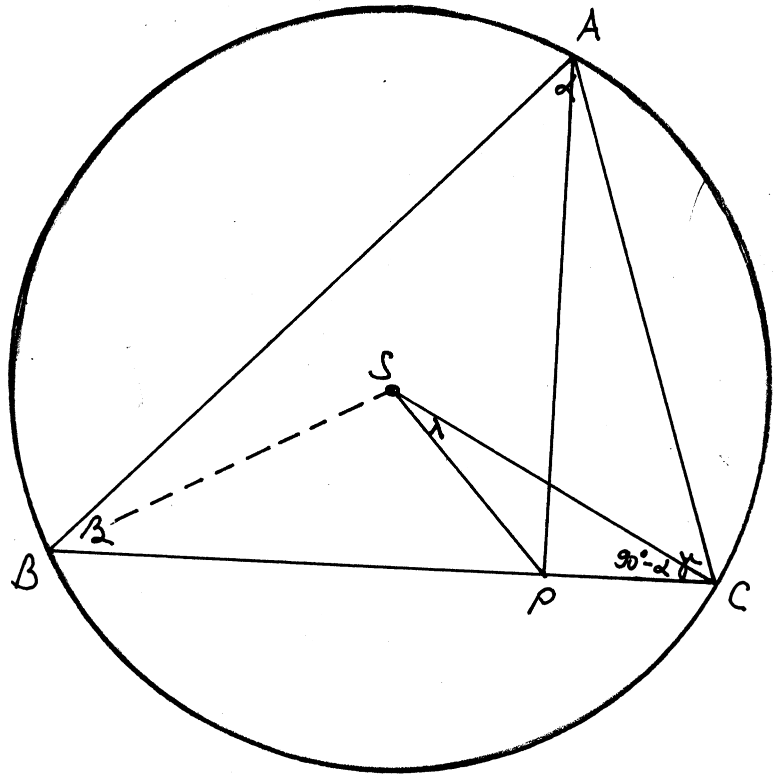
24. Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ i $\measuredangle BCA = \gamma$. Dokazati da je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ i $c = 2R\sin\gamma$.

Uputa:



(#) Neka je ΔABC oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je

$\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$



Rj. Označimo sa $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$ i $\lambda = \measuredangle CSP$.

Treba dokazati da je

$\alpha + \lambda < 90°$.

Primetimo da je $\measuredangle BSC = 2\alpha$ i kako je ΔABC jkk ($BS = CS = R$)

$\Rightarrow \measuredangle BCS = 90° - \alpha$.

$AB = 2R\sin\gamma$, $AC = 2R\sin\beta$, $\cos\beta = \dfrac{BP}{AB}$, $\cos\gamma = \dfrac{PC}{AC}$

$BP - PC = AB\cos\beta - AC\cos\gamma = 2R\sin\gamma\cos\beta - 2R\sin\beta\cos\gamma =$

$= 2R(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta) = 2R\sin(\gamma - \beta)$

Iz pretpostavke zadatka je $\gamma \geq \beta + 30°$ tj. $\gamma - \beta \geq 30°$

$30° \leq \gamma - \beta < \gamma < 90° \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin(\gamma - \beta) < 1 \Rightarrow BP - PC \geq R$

tj. $BP \geq PC + R$. Na osnovu nejednakosti trougla

$PS + R = PS + BS > BP \geq PC + R \Rightarrow PS > PC$,

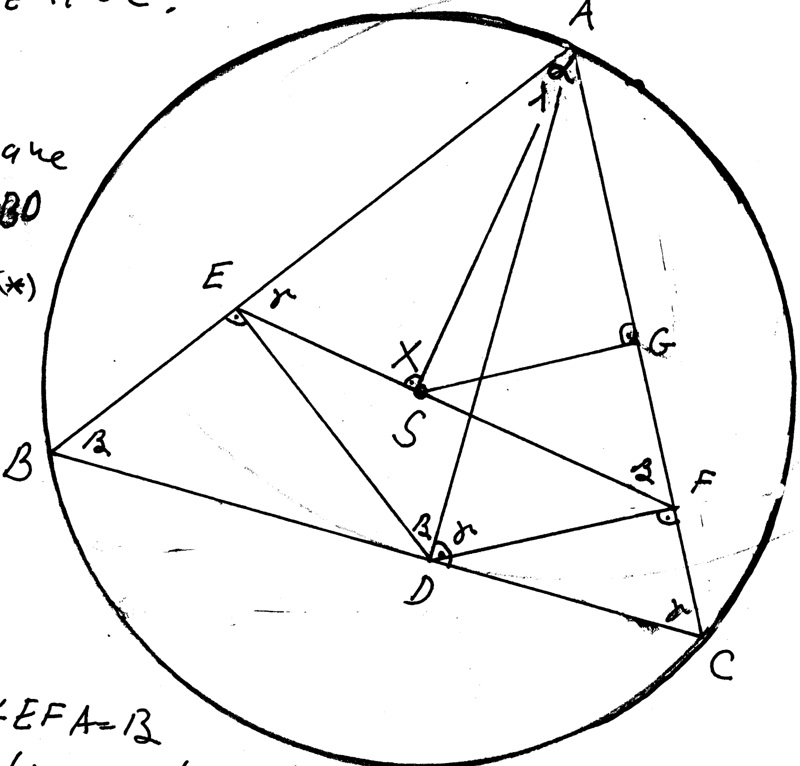
pa u ΔPCS imamo $\measuredangle PCS > \measuredangle PSC$ tj.

$90° - \alpha > \lambda \Rightarrow \alpha + \lambda < 90°$

$\Rightarrow \measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$

q.e.d.

(#) Neka je AD visina trougla ΔABC i R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Neka su tačke E i F podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC. Ako je $AD = R\sqrt{2}$, dokazati da prava EF prolazi kroz centar opisane kružnice.



Rj. Neka je S centar opisane kružnice Δ. Posmatrajmo ΔABD

$\sphericalangle ABD = \beta$, $\sphericalangle BDA = 90^\circ$, $\sphericalangle BAD = \lambda$ ...(*)

Posmatrajmo ΔAED.

$\sphericalangle AED = 90^\circ$, $\sphericalangle DAE = \lambda \overset{(*)}{\Longrightarrow} \sphericalangle ADE = \beta$

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AED = 90^\circ \\ \sphericalangle AFD = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \square AEDF$ tetivni

pa je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle EFA = \beta$.

U ΔAEF imamo $\sphericalangle FAE = \alpha$, $\sphericalangle EFA = \beta$

$\Rightarrow \sphericalangle AEF = \gamma$. Primjetimo da je i $\sphericalangle ADE = \gamma$ ($\square AEDF$ tetivni)

$\sin\beta = \frac{AD}{AB}$, $\sin\gamma = \frac{AF}{AD}$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$

$\Delta ABC \sim \Delta AEF$ (imaju sva tri podudarna ugla), pa je

$$\frac{AB}{AF} = \frac{\frac{AD}{\sin\beta}}{AD\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = \frac{2R\cdot 2R}{b\cdot c} = \frac{\frac{abc}{2P}\cdot 2R}{bc} = \frac{a\cdot 2R}{2P} = \frac{a\,2R}{a\cdot AD} = \frac{2R}{R\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ako iz S spustimo visinu SG na AC primjetimo da je $\sphericalangle ASG = \beta$ ($\sphericalangle ASC = 2\beta$) pa je $\sphericalangle GAS = 90^\circ - \beta$.

Neka je AX visina ΔAEF. Zbog uočene sličnosti

$\frac{AD}{AX} = \sqrt{2} \Rightarrow AX = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = R$.

Primjetimo da je $\sphericalangle FAX = 90^\circ - \beta$.

$$\left.\begin{array}{l} AF \cong AF \\ \sphericalangle FAX \cong \sphericalangle FAS \\ AX \cong AS = R \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta FAX \cong \Delta FAS$$

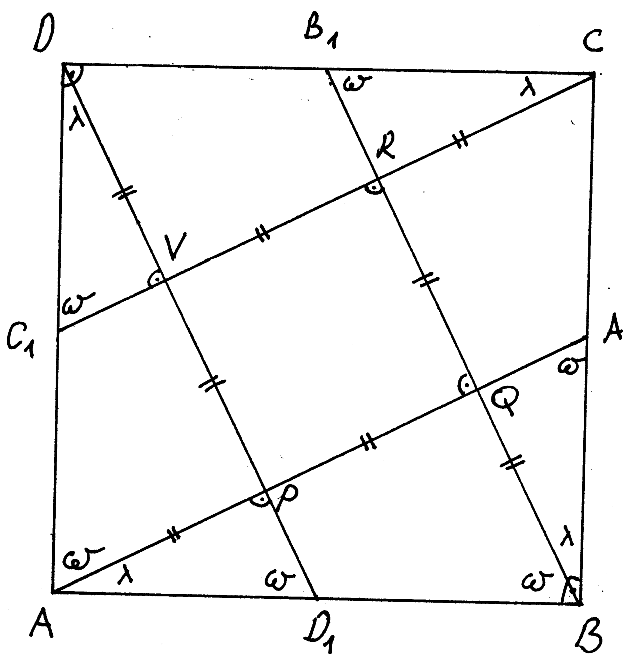
$$\Downarrow$$

$$S \equiv X \Rightarrow S \in EF$$

q.e.d.

(#) A_1, B_1, C_1, D_1 su tačke koje su redom sredine stranica BC, CD, AD i AB kvadrata $\square ABCD$. Dokazati da se duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 sijeku tako da obrazuju kvadrat sa stranicom jednakom $\frac{2}{5}$ dužine svake od tih duži.

Rj.



Označimo sa

$\{P\} = DD_1 \cap AA_1$,

$\{Q\} = AA_1 \cap BB_1$

$\{R\} = BB_1 \cap CC_1$

$\{V\} = CC_1 \cap DD_1$

Dokažimo da je $\square PQRV$ kvadrat i da je $PQ = \frac{2}{5} A$.

$$\left.\begin{array}{l} DC \cong AB \\ \sphericalangle ABA_1 \cong \sphericalangle CDC_1 = 90^\circ \\ DC_1 \cong A_1B \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta CDC_1 \cong \Delta ABA_1$$
$$\Downarrow$$
$\sphericalangle C_1CD \cong \sphericalangle A_1AB = \lambda$ i $\sphericalangle DC_1C \cong \sphericalangle BA_1A = \omega$

Primjetimo da je $\lambda + \omega = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle DAA_1 = \omega \Rightarrow p(C, C_1) \parallel p(A, A_1)$.

$$\left.\begin{array}{l} AD = DC \\ \sphericalangle DAD_1 = \sphericalangle CDC_1 = 90^\circ \\ AD_1 = DC_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta DAD_1 \cong \Delta CDC_1$$
$$\Downarrow$$
$\sphericalangle ADD_1 = \sphericalangle C_1CD = \lambda$ i $\sphericalangle AD_1D = \sphericalangle DC_1C = \omega$

$\Rightarrow \sphericalangle C_1VD \cong \sphericalangle D_1PA = 90^\circ$,

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong BC \\ \sphericalangle DAD_1 \cong \sphericalangle BCB_1 = 90^\circ \\ AD_1 \cong CB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta DAD_1 \cong \Delta BCB_1$$
$$\Downarrow$$
$\sphericalangle ADD_1 \cong \sphericalangle B_1BC = \lambda$ i $\sphericalangle AD_1D \cong \sphericalangle CB_1B = \omega$

pa je $\sphericalangle ABB_1 = \omega \Rightarrow p(D, D_1) \parallel p(B, B_1)$.

Kako je $\sphericalangle BQA_1 = \sphericalangle CRB_1 = 90^\circ \Rightarrow \square PQRV$ pravougaonik

$p(B, B_1) \parallel p(D, D_1) \xrightarrow{T_0T_0} \frac{CB_1}{DB_1} = \frac{CR}{RV} \Rightarrow CR = RV \Rightarrow R$ sredina duži VC

$p(A, A_1) \parallel p(C, C_1) \xrightarrow{T_0T_0} \frac{DC_1}{AC_1} = \frac{DV}{VP} \Rightarrow DV = VP \Rightarrow V$ sredina duži DP.

Kako su ΔAPD i ΔCDV podudarni $\Rightarrow PD \cong CV \Rightarrow PV = RV$

$\Rightarrow \square PQRV$ kvadrat q.e.d.

$p(D, D_1) \parallel p(B, B_1) \xrightarrow{T_0T_0} \frac{BQ}{PD_1} = \frac{AB}{AD_1} = 2 \Rightarrow BQ = 2PD_1$ a kako $BQ = VP$

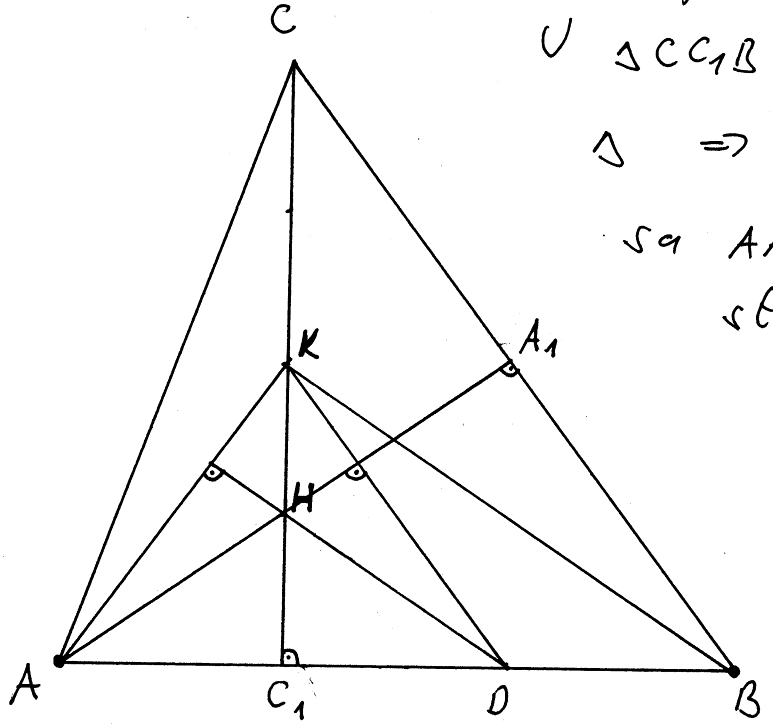
$\rightarrow (AA_1 \cong BB_1 \cong CC_1 \cong DD_1)$

$\Rightarrow DD_1 = 5PD_1 \Rightarrow VP = PQ = QR = RV = \frac{2}{5} DD_1$ q.e.d.

(#) U oštrouglom trouglu ΔABC je $CH : HC_1 = 3:1$, gdje je H ortocentar a C_1 podnožje visine iz vrha C. Neka je K sredina visine CC_1. Dokazati da je $\sphericalangle AKB = 90°$.

Rj.

$\frac{CH}{HC_1} = \frac{3}{1}$. Dokažimo da je $\sphericalangle AKB = 90°$.



Neka je tačka D sredina duži BC_1.

U ΔCC_1B, KD je srednja linija

$\Delta \Rightarrow KD \parallel BC$, pa ako sa AA_1 označimo visinu na stranicu BC imamo

$AA_1 \perp KD$.

U ΔADK, H je ortocentar trougla pa je

$p(D,H) \perp AK$. ...(*)

Iz $\frac{CH}{HC_1} = \frac{3}{1}$ i $\frac{CK}{KC_1} = \frac{1}{1}$ $\Rightarrow$ H sredina duži KC_1

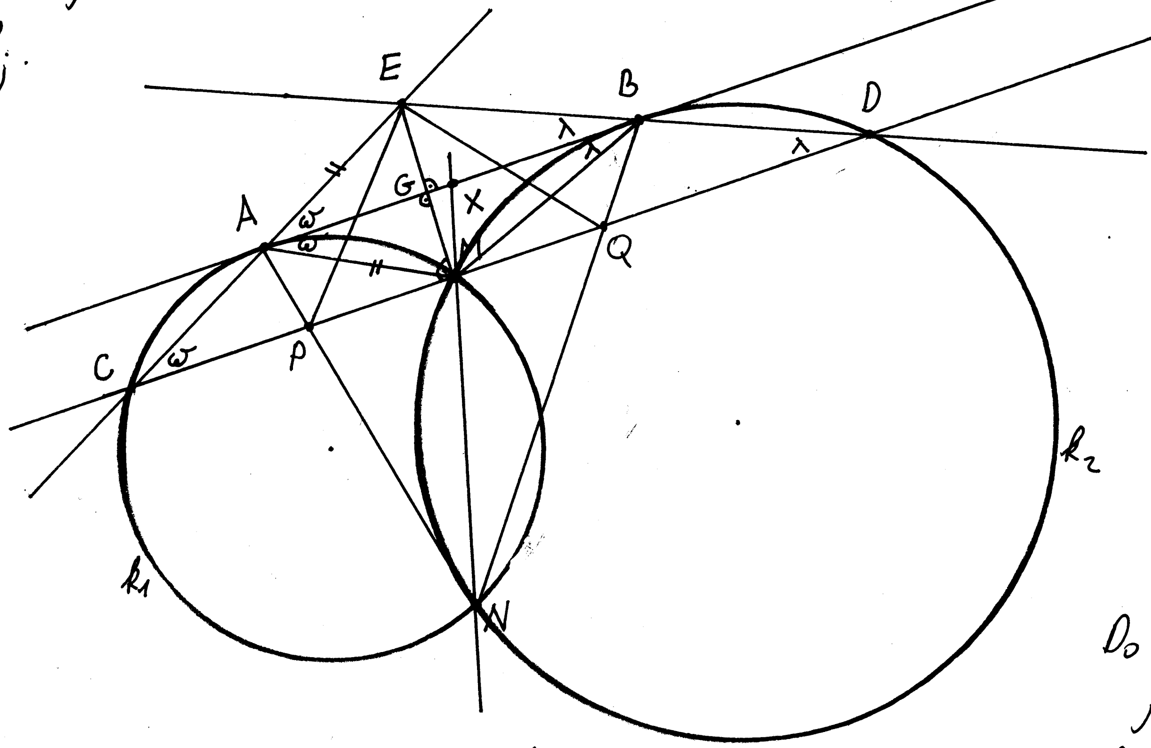
$\frac{C_1H}{HK} = \frac{C_1D}{DB} = \frac{1}{1}$ $\Rightarrow$ $p(D,H) \parallel p(B,K)$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\sphericalangle AKB = 90°$

q.e.d.

(#) Date su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u tačkama M i N i imaju zajedničku tangentu $p(A,B)$ $(A \in k_1,\ B \in k_2)$. M je tačka na pravoj $p(C,D)$ $(C \in k_1,\ D \in k_2)$ takva da je $C-M-D$ i $p(C,D) \parallel p(A,B)$. Tetive NA i CM se sijeku u tački P, tetive NB i MD se sijeku u tački Q, a prave $p(A,C)$ i $p(B,D)$ se sijeku u tački E. Dokazati da je $PE \cong QE$.

Rj.:



Dokažimo da je $PE = QE$.

Ugao između tangente i tetive jednak je periferijskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow \measuredangle MDB = \measuredangle MBA = \lambda$ i $\measuredangle ACM = \measuredangle BAM = \omega$.

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAM = \measuredangle EAB = \omega$.

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(B,D)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BDM = \measuredangle EBA = \lambda$.

Trouglovi $\triangle AEB$ i $\triangle AMB$ imaju jednaka dva ugla λ i ω i zajedničku stranicu AB $\xRightarrow{USU}$ $\triangle ABE \cong \triangle ABM$, Neka je $\{G\} = AM \cap AB$

$$\Downarrow$$

$$AE \cong AM$$

Trouglovi $\triangle AGE$ i $\triangle AGM$ imaju zajedničke dvije stranice i ugao između njih pa $\xRightarrow{SUS}$ $\triangle AGE \cong \triangle AGM$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle AGE \cong \measuredangle AGM = 90^\circ$$

Kako je $EM \perp AB$ i $AB \parallel CD$ $\Rightarrow$ $EM \perp CD$. Dokažimo još da je $PM = QM$.

Neka je $\{X\} = p(M,N) \cap AB$.

$XA^2 = XM \cdot XN = XB^2 \Rightarrow AX^2 = BX^2 \Rightarrow AX = BX$

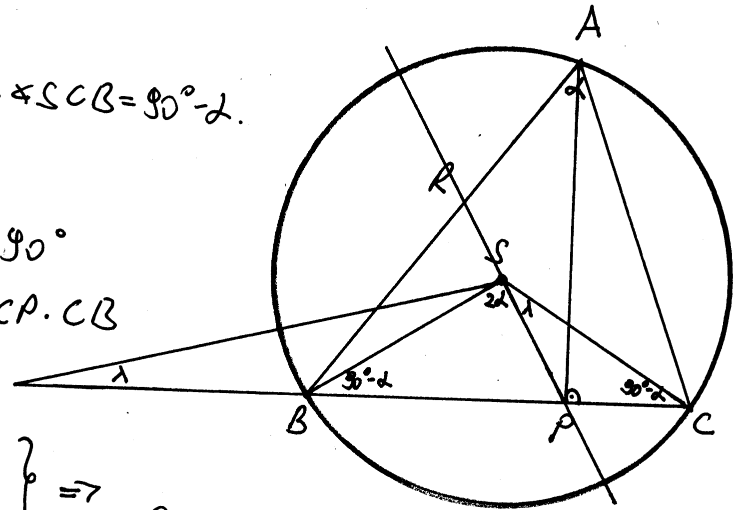
$p(A,B) \parallel p(C,D) \xRightarrow{T_0 T_0} \dfrac{AX}{XB} = \dfrac{PM}{MQ} \Rightarrow PM = QM$

U $\triangle PME$ i $\triangle QME$ iz $SUS \Rightarrow \triangle PME \cong \triangle QME \Rightarrow PE \cong QE$

q.e.d.

(#) Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\sphericalangle BCA \geq ABC + 30^\circ$. Dokazati da je $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90^\circ$.

Rj.



Primetimo da je $\sphericalangle SBC = \sphericalangle SCB = 90^\circ - \alpha$.

Označimo sa $\lambda = \sphericalangle CSP$.

Dokažimo da je $\alpha + \lambda < 90^\circ$

Prvo pokažimo da je $R^2 > CP \cdot CB$

$$\left.\begin{array}{l} CB = 2R\sin\alpha \\ CP = AC\cos\gamma = 2R\sin\beta\cos\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \quad CB \cdot CP = 4R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$$

Dovoljno je pokazati da je $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma < \frac{1}{4}$.

$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta < 1 \quad \ldots(1)$

$\frac{1}{2} \leq \sin(\gamma - \beta) = \sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma \quad / \cdot (-1)$

$\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta \leq -\frac{1}{2} \quad \ldots(2)$

$(1)+(2) \quad \sin\beta \cdot \cos\gamma < \frac{1}{4}$

$\overset{\sin\alpha \leq 1}{\Longrightarrow} \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma < \frac{1}{4}$

pa je $R^2 > CP \cdot CB \quad \ldots(*)$

I način

Izaberimo tačku J na $p(B,C)$ takvu da je $CJ \cdot CP = R^2$. Kako je

$R^2 > CP \cdot CB \Rightarrow CJ > CB \Rightarrow \sphericalangle SBC > \sphericalangle SJC$.

$R^2 = SC^2 \Rightarrow \frac{SC}{CJ} = \frac{PC}{SC}$ pa iz sličnosti SUS $\Rightarrow \triangle JCS \sim \triangle SCP$

$\Downarrow$

$\sphericalangle SJC \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle CSP = \lambda$

$\Rightarrow \lambda < \sphericalangle SBC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha + \lambda < 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90^\circ$

q.e.d.

II način

$BP \cdot PC = (R + SP)(R - SP) \Rightarrow BP \cdot PC = R^2 - SP^2$

$SP^2 = R^2 - BP \cdot PC \overset{(*)}{>} PC \cdot CB - BP \cdot PC = PC^2 \Rightarrow SP > PC$

Pa u $\triangle SPC \quad 90^\circ - \alpha > \lambda \Rightarrow \alpha + \lambda < 90^\circ$

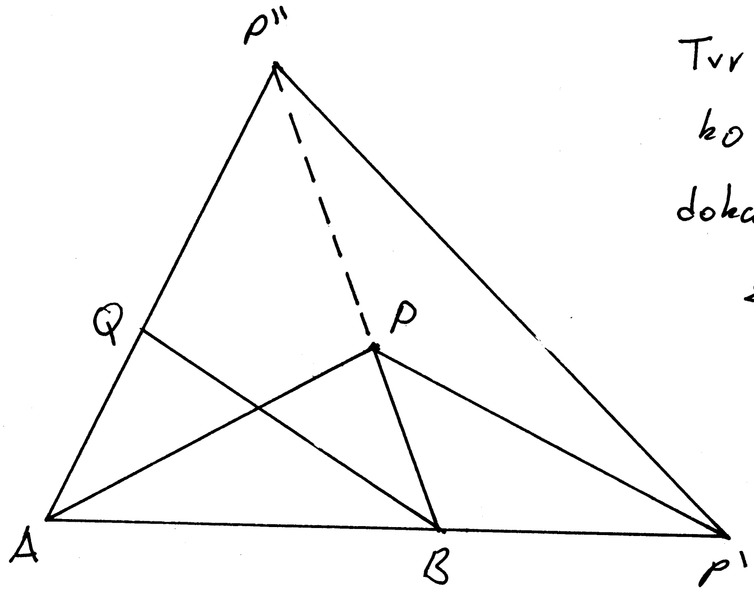
$\Downarrow$

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90^\circ$

q.e.d.

(#) U trouglu ΔABC, AP polovi $\measuredangle BAC$, sa tačkom P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$, sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP = AQ + QB$. Naći uglove u Δ.

Rj. Označimo uglove u ΔABC sa α, β i γ. $\alpha = 60°$. Produžimo AB do P' tako da je $BP' = BP$, i konstruišimo P'' na AQ tako da je $AP'' = AP'$. Tad je $\Delta BP'P$ jednakokraki sa uglom na bazi $\frac{\beta}{2}$. Kako je $AQ + QP'' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB$, slijedi da je $QP'' = QB$. Kako je $\Delta APP''$ jkS i AP polovi ugao kod A, imamo $PP' = PP''$



Tvrdnja: Tačke B, P, P'' su kolinearne, pa se $P'' \equiv C$.

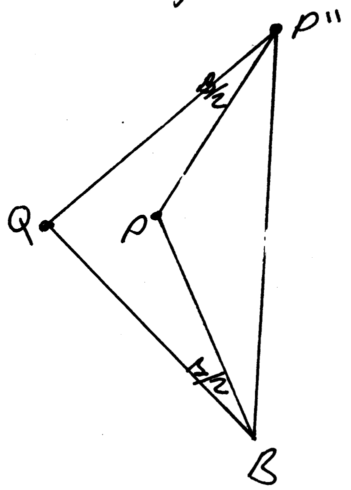
dokaz: Pretpostavimo suprotno tvrdnji.

$\measuredangle PBQ = \measuredangle PP'B = \measuredangle PP''Q = \frac{\beta}{2}$.

Tako da imamo slučaj kao na slici, ili je P na drugoj strani BP''.

U bilo kojem slučaju, pretpostavka da je $\Delta BPP''$ razmatranog vodi nas na $BP = PP'' = PP'$ pa zaključujemo da je $\Delta BPP''$ jks, i na kraju do apsurda da $\frac{\beta}{2} = 60°$ pa $\alpha + \beta = 60° + 120° = 180°$.

#



Prema tome, tačke B, P, P'' su kolinearne i $P'' \equiv C$ q.e.d.

Kako je ΔBCQ jkk, imamo $120° - \beta = \gamma = \frac{\beta}{2}$ pa $\beta = 80°$ i $\gamma = 40°$.

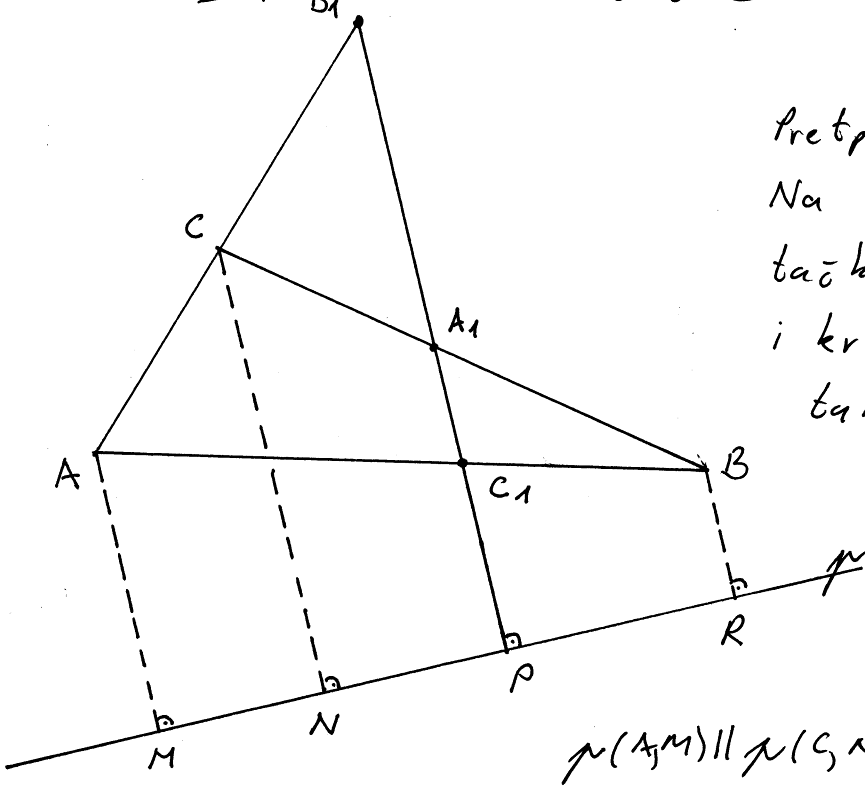
$\alpha = 60°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 40°$ tražene vrijednosti

(#) (Menelausova teorema, drugi put)

Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla ΔABC ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku. Dokazati da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne ako i samo ako vrijedi $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.

Rj. potreban uslov

"$\Leftarrow$": A_1, B_1, C_1 kolinearne tačke $\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.



Pretpostavimo $C_1 \in AB$, $A_1 \in BC$. Na polupravoj $pp[A_1, C_1)$ uzmimo tačku P tako da je $A_1 - C_1 - P$ i kroz P postavimo pravu p takvu da je $p \perp p(A_1, C_1)$. Neka su M, N i R ortogonalne projekcije tačaka A, C i B redom.

$$p(A, M) \parallel p(C, N) \parallel p(B_1, P) \parallel p(B, R) \xRightarrow{\text{To } T_0}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{MP}{PR}, \quad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{PR}{PN}, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{PN}{MP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{MP}{PR} \cdot \frac{PR}{PN} \cdot \frac{PN}{MP} = 1 \Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$

q.e.d.

dovoljan uslov

"$\Rightarrow$": $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \quad \ldots(*) \Rightarrow$ tačke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne

Ponovo, neumanjujući opštost pretpostavimo $C_1 \in AB$ i $A_1 \in BC$.

$p(A_1, B_1) \cap AB = \{C_2\} \Rightarrow$ tačke A_1, B_1 i C_2 kolin. $\xRightarrow{\text{potrebnom uslovu}} \frac{AC_2}{BC_2} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$

$\xRightarrow{(*)} \frac{AC_2}{BC_2} = \frac{AC_1}{BC_1}$, $C_1, C_2 \in AB$ pa zbog jedinstvenosti podjele duži u datom omjeru $\Rightarrow C_1 \equiv C_2 \Rightarrow A_1, B_1, C_1$ kolinea.

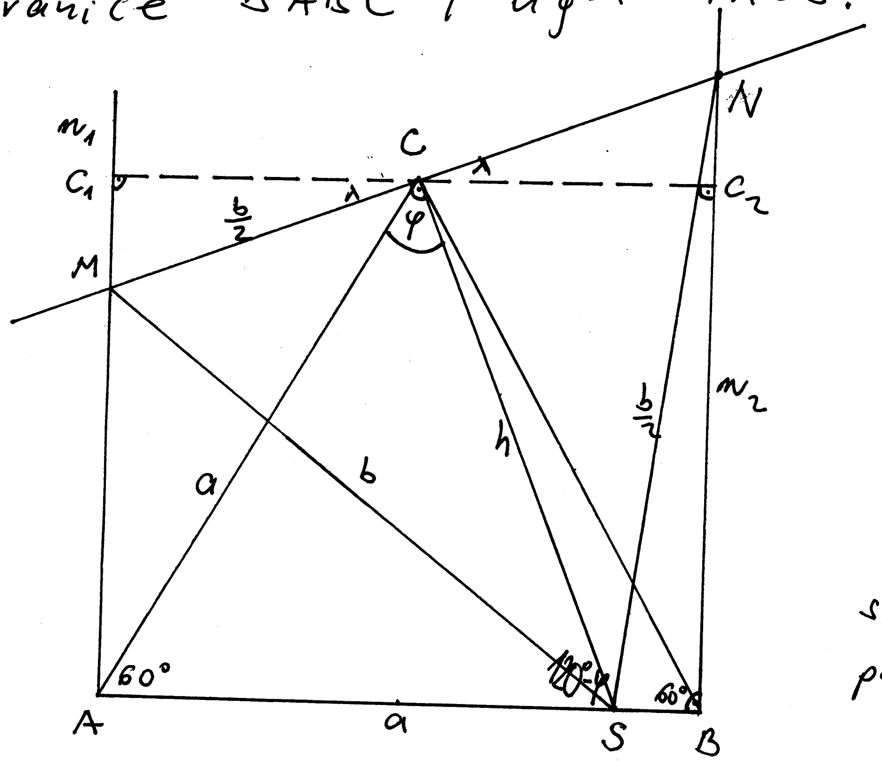
q.e.d.

(#) Kroz tjemena A i B jednakostraničnog trougla ΔABC konstruisane su normale n_1 i n_2 na AB u istoj poluravni u kojoj je tačka C. Kroz tjeme C konstruisana je proizvoljna prava koja siječe n_1 u M i n_2 u N. Simetrala duži MN siječe pravu AB u tački S.

a) dokazati da je ΔMSN jednakostraničan

b) površinu trougla ΔMSN izraziti kao f-ju dužine stranice ΔABC i ugla $\angle ACS$.

Rj.



a) Dokažimo da je ΔMSN j.k.s.

Primjetimo da je tačka C jednako udaljena od normala n_1 i n_2 (C leži na simetrali stranice AB) pa iz pravila USU

$\Delta MCC_1 \cong \Delta NCC_2$

$\Downarrow$

$MC \cong CN$

$$\left.\begin{array}{l} MC \cong CN \\ \angle MCS \cong \angle NCS = 90° \\ CS \cong CS \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta MCS \cong \Delta NCS$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong NS \Rightarrow \Delta MSN \text{ jkk}$$

$\square CSBN$ je tetivni četverougao ($\angle NCS + \angle SBN = 180°$), pa ako posmatramo uglove koji gledaju na stranicu CS

$\Rightarrow \angle SBC \cong \angle SNC = 60° \Rightarrow \Delta MSN$ jks q.e.d.

b) $AB = AC = BC = a$, $\angle ACS = \varphi \Rightarrow \angle ASC = 120° - \varphi$, $CS = h$, $MS = NS = MN = b$

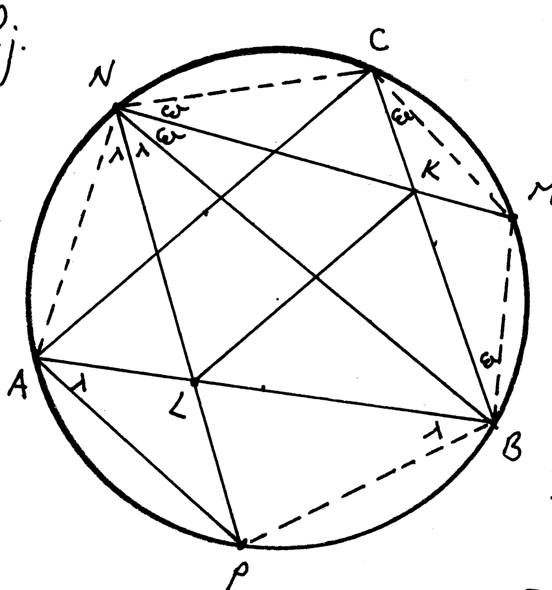
Površinu ΔMSN izrazimo preko AB i $\angle ACS$.

$$P_{\Delta MSN} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}, \quad h = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{a}{\sin(120° - \varphi)} = \frac{h}{\sin 60°} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin(120° - \varphi)}$$

$$\Rightarrow \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin(120° - \varphi)} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin(120° - \varphi)} \Rightarrow P_{\Delta MSN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sin^2(120° - \varphi)}$$

(#) U kružnicu je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lukova BC, CA i AB. Tačka M se nalazi sa one strane prave BC sa koje nije tačka A, tačka N se nalazi sa one strane prave AC sa koje nije tačka B i tačka P se nalazi sa one strane prave AB sa koje nije tačka C. Tetiva MN siječe stranicu BC u tački K, a NP siječe stranicu AB u tački L. Dokazati da je $KL \parallel AC$.

Rj.



Spojimo tačke B i N.
Dokazaćemo da je $p(N,P)$ simetrala ugla $\measuredangle BNA$;
da je $p(N,M)$ simetrala ugla $\measuredangle CNB$.
Poslije toga ćemo pokazati da je $KL \parallel AC$.

Tačka P je središte luka $AB \Rightarrow$
$\Rightarrow AP \cong BP \Rightarrow \triangle APB$ j.k. $(\measuredangle BAP = \measuredangle PBA = \lambda)$

$\square APBN$ je tetivni $\Rightarrow \measuredangle BAP \cong \measuredangle BNP = \lambda$ (nad tetivom BP)
i $\measuredangle PBA = \measuredangle PNA = \lambda$ (nad tetivom AP)

$\Rightarrow p(N,P)$ je simetrala ugla $\measuredangle ANB$.

Slično, M sredina luka $BC \Rightarrow \triangle BMC$ j.k. $(\measuredangle MCB \cong \measuredangle CBM = \omega)$
$\square NBMC$ je tetivni $\Rightarrow p(N,M)$ je simetrala $\measuredangle CNB$.

Posmatrajmo $\triangle ABN$.
NL simetrala $\measuredangle BNA \Rightarrow \dfrac{AL}{LB} = \dfrac{AN}{NB}$.
Posmatrajmo $\triangle NBC$
NK simetrala $\measuredangle CNB \Rightarrow \dfrac{CK}{KB} = \dfrac{NC}{NB}$

$\Bigg\}$ $\xRightarrow[\text{(C sredina luka AC)}]{\text{kako je } AN=NC}$ $\dfrac{AL}{LB} = \dfrac{CK}{KB}$

tj. $\dfrac{BL}{LA} = \dfrac{BK}{KC} \xRightarrow{\text{O.T.T.}} KL \parallel AC$

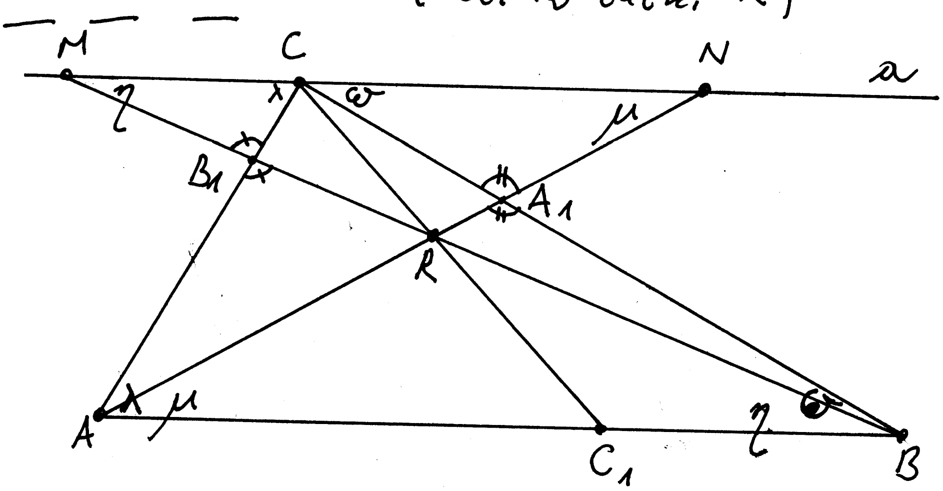
q.e.d.

(#) (Teorema Čevija) Neka tačke A_1, B_1 i C_1 pripadaju stranicama BC, AC i AB trougla ΔABC redom. Dokazati da se duži AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u istoj tački ako i samo ako vrijedi $\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$.

Rj.

potreban uslov

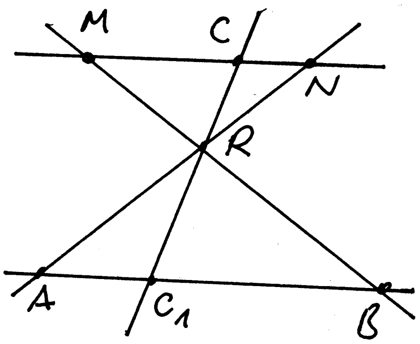
„$\Leftarrow$": AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački (recimo tački R) $\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$.



Neka je $a \parallel p(A,B)$, $C\in a$ i
$p(A,A_1)\cap a=\{N\}$
$p(B,B_1)\cap a=\{M\}$

Primjetimo da je $\Delta ABB_1 \sim \Delta CMB_1$ i $\Delta ABA_1 \sim \Delta NCA_1$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$



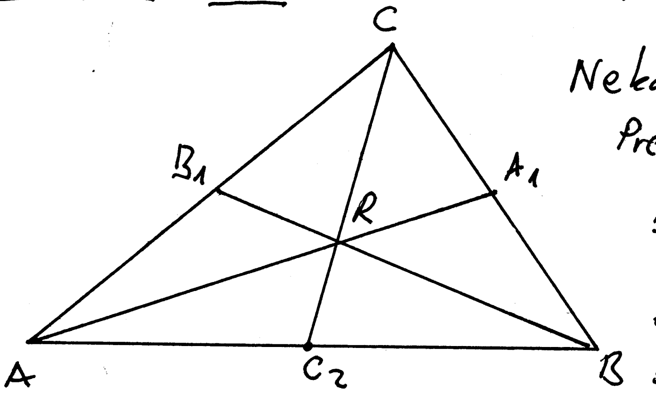
$\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{MC}{AB}$ ...(*) $\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{AB}{NC}$ ...(**)

$\overset{T_0T_0}{\Longrightarrow} \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{NC}{MC}$ ...(***) $\left.\begin{matrix}(*)\\(**)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{MC}{AB}\cdot\frac{AB}{NC}$

$\overset{(***)}{\Longrightarrow} \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$ q.e.d.

dovoljan uslov

„$\Rightarrow$": $\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \Rightarrow$ duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački.



Neka je $AA_1\cap BB_1=\{R\}$ i $p(C,R)\cap AB=\{C_2\}$

Prema potrebnom uslovu $\frac{AC_2}{BC_2}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$ i

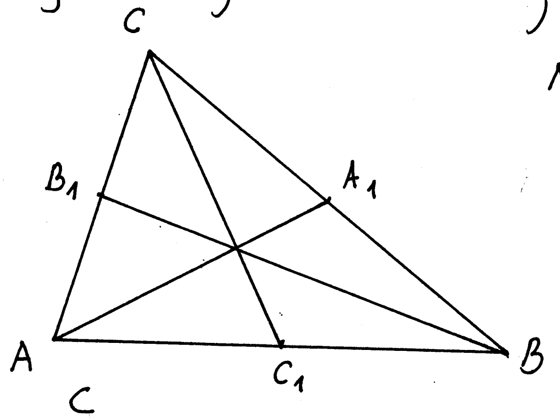
$\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{AC_2}{BC_2}$

zbog jedinstvenosti unutrašnje podjele duži $\Rightarrow C_1\equiv C_2 \Rightarrow AA_1, BB_1$ i CC_1 se sijeku u istoj tački q.e.d.

Napomena: Prave AA_1, BB_1 i CC_1 zovu se Cevijne prave.

Dokazati da se a) težišnice b) visine c) simetrale uglova trougla sijeku u istoj tački.

Rj: a)



Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 težišnice ΔABC.

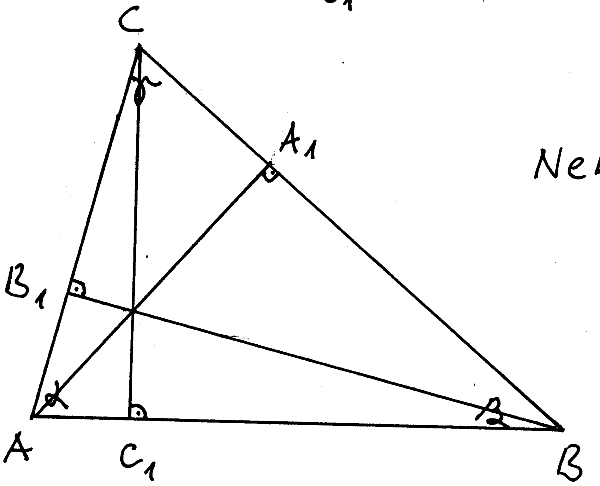
$$\frac{AC_1}{BC_1}=1,\ \frac{BA_1}{CA_1}=1,\ \frac{CB_1}{AB_1}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \xRightarrow{\text{teoremi Čevija}}$$

AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački

q.e.d.

b)



Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla ΔABC sa uglovima $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$.

Primjetimo da je (sličnost UUU):

$\Delta AC_1C \sim \Delta ABB_1$, $\Delta BA_1A \sim \Delta BCC_1$, $\Delta CAA_1 \sim CB_1B$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

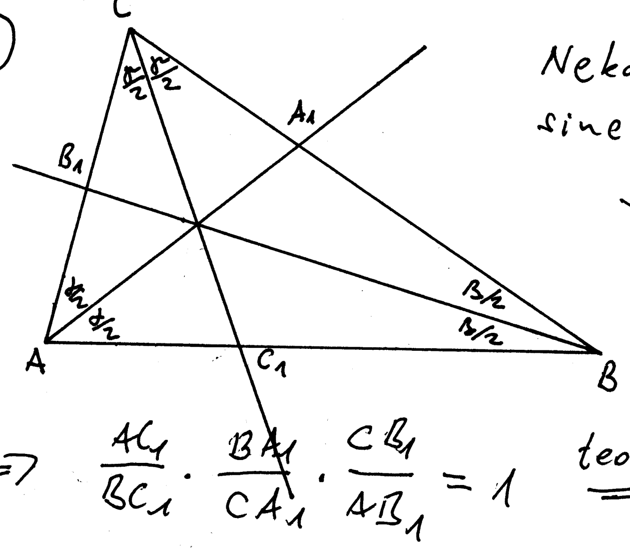
$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC}{AB} \quad (1) \qquad \frac{BA_1}{BC_1}=\frac{AB}{BC} \quad (2) \qquad \frac{CB_1}{CA_1}=\frac{BC}{AC} \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{CB_1}{CA_1}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$$

$\xRightarrow{\text{teoremi Čevije}}$ duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački

q.e.d.

c)



Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 duži koje leže na simetrali uglova trougla ΔABC.

Simetrala ugla dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije.

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{AB}{AC},\ \frac{CB_1}{AB_1}=\frac{BC}{AB},\ \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \xRightarrow{\text{teoremi Čevije}}$$ duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački

q.e.d.

(#) Neka su $p(A,A_1)$, $p(B,B_1)$ i $p(C,C_1)$ tri prave trougla ΔABC koje se sijeku u R. Dokazati da vrijedi:

$$\frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=1.$$

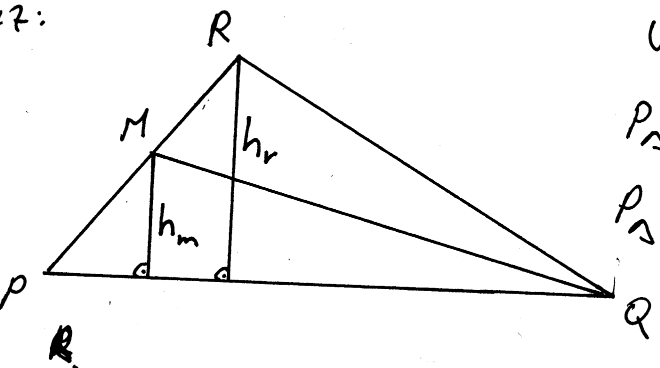
Rj. Prije nego uradimo zadatak primjetimo dvije osobine trouglova:

a) za svaki ΔPQR, u kome je $M\in PR$ proizvoljna tačka, vrijedi $\dfrac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{PM}{PR}$

b) za svaki ΔPQR, kome je data proizvoljna tačka N u unutrašnjosti trougla, i $\{G\}=p(R,N)\cap PQ$, vrijedi $\dfrac{P_{\Delta PQN}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{NG}{RG}$.

dokaz:

a)

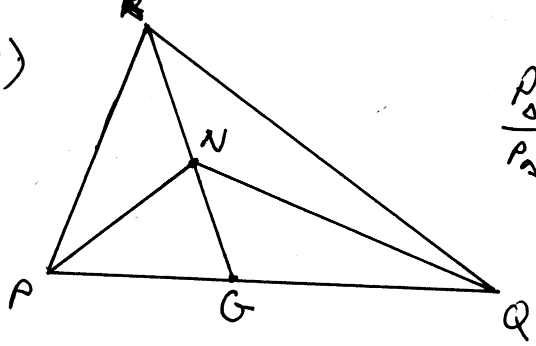


Uvedimo oznake kao na slici.

$$\left.\begin{array}{l} P_{\Delta PQM}=\frac{1}{2}h_m\cdot PQ \\ P_{\Delta PQR}=\frac{1}{2}h_r\cdot PQ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\frac{h_m}{h_r}\overset{ToTo}{=}\frac{PM}{PR}$$

tj. $\dfrac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{PM}{PR}$ q.e.d.

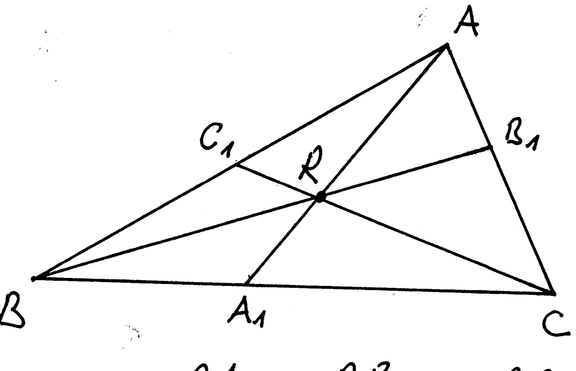
b)



$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_{\Delta PGN}}{P_{\Delta PGR}}=\frac{GN}{RN} \Rightarrow P_{\Delta PGN}=P_{\Delta PGR}\cdot\frac{GN}{RN} \\ \frac{P_{\Delta GQN}}{P_{\Delta GQR}}=\frac{GN}{RN} \Rightarrow P_{\Delta GQN}=P_{\Delta GQR}\cdot\frac{GN}{RN} \end{array}\right\}+ \Rightarrow \frac{P_{\Delta PQN}}{P_{\Delta PQR}}=\frac{GN}{RN}$$

q.e.d.

Vratimo se na zadatak. Dokažimo da vrijedi $\dfrac{RA_1}{AA_1}+\dfrac{RB_1}{BB_1}+\dfrac{RC_1}{CC_1}=1$.



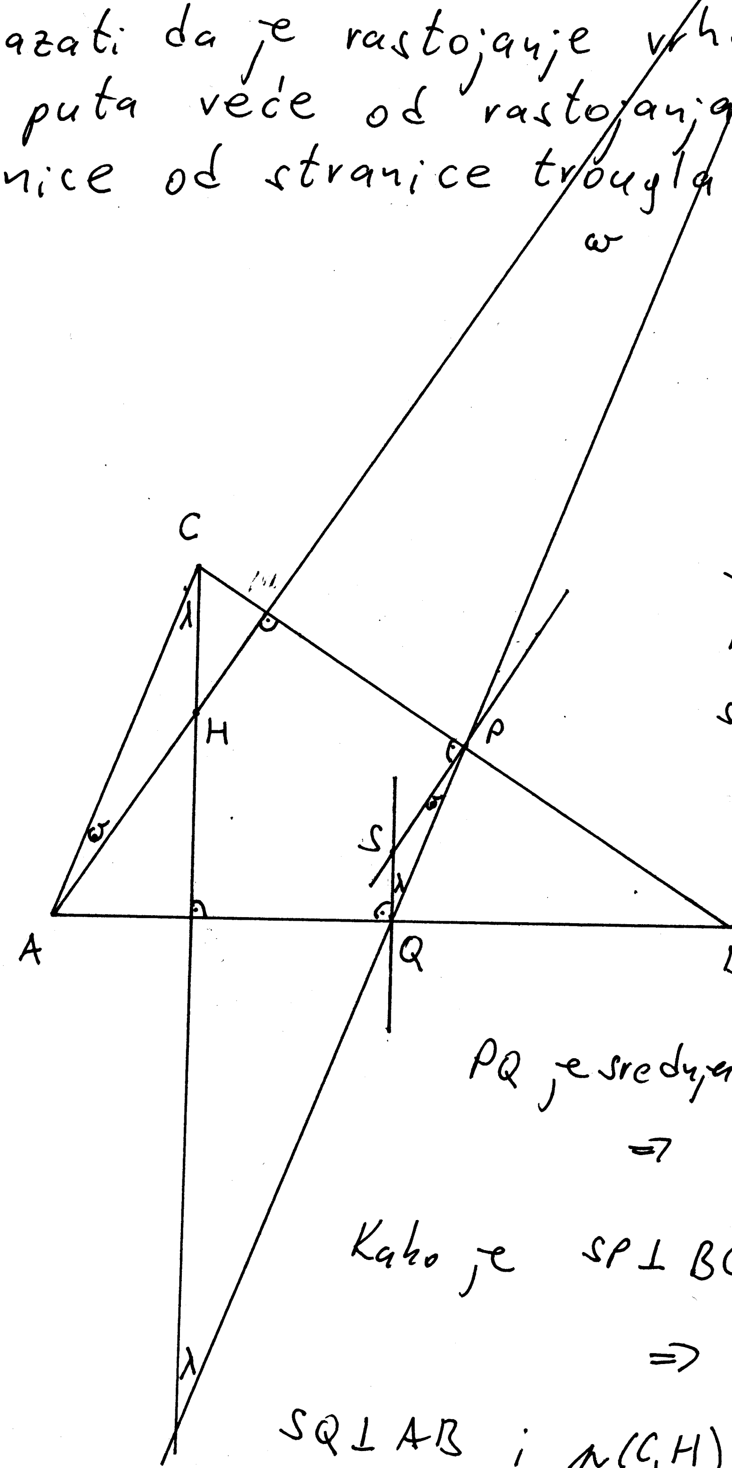
$$\frac{P_{\Delta BCR}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RA_1}{AA_1} \quad ...(1), \qquad \frac{P_{\Delta ARC}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RB_1}{BB_1} \quad ...(2), \qquad \frac{P_{\Delta ABR}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RC_1}{CC_1} \quad ...(3)$$

$$(1)+(2)+(3) \quad \frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=\frac{P_{\Delta BCR}+P_{\Delta ARC}+P_{\Delta ABR}}{P_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=1 \text{ q.e.d.}$$

(#) Dokazati da je rastojanje vrha trougla od ortocentra dva puta veće od rastojanja centra opisane kružnice od stranice trougla naspram tog vrha.

Rj.



Neka je dat trougao ΔABC u kome je H ortocentar, S centar opisane kružnice, P i Q sredine stranica BC i AB redom.

Dokažimo da je $CH = 2 \cdot SQ$.

PQ je srednja linija trougla $\Rightarrow AC \parallel PQ$ i $PQ = \frac{1}{2} AC$.

Kako je $SP \perp BC$ i $p(A,H) \perp BC$ $\Rightarrow AH \parallel SP$.

$SQ \perp AB$ i $p(C,H) \perp AB \Rightarrow CH \parallel SQ$.

Trougao ΔAHC i ΔSQP imaju tri para paralelnih stranica

$\Rightarrow$ imaju podudarne uglove $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle C = \sphericalangle Q \\ \sphericalangle A = \sphericalangle P \\ \sphericalangle H = \sphericalangle S \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič UUU}} \Delta AHC \sim \Delta PSQ$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{PQ} = \frac{CH}{SQ}$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{SQ} = \frac{2PQ}{PQ} \Rightarrow CH = 2 \cdot SQ$$

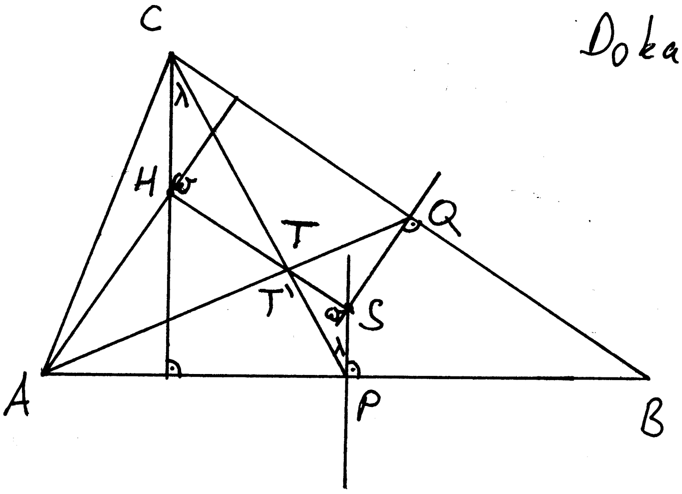
q.e.d.

(#) (Ojlerova prava)

Dokazati da su ortocentar, težište i centar opisane kružnice trougla kolinearne tačke pri čemu težište T dijeli duž HS u omjeru $2:1$.

<u>Napomena</u>: Prava kroz H, T i S se zove Ojlerova prava.

Rj. Neka je H ortocentar, a S centar opisane kružnice trougla ΔABC, P i Q sredine stranica AB i BC redom. Označimo sa $\{T'\} = CP \cap HS$.



Dokažimo da je $T' \equiv T$ i $HT : TS = 2:1$.

$p(C,H) \perp AB$ i $p(S,P) \perp AB$

$\Longrightarrow p(C,H) \parallel p(P,S)$

$p(C,H) \parallel p(P,S)$ i $p(C,P)$ transferzala $\Longrightarrow \measuredangle HCT' \cong \measuredangle SPT' = \lambda$

$p(C,H) \parallel p(P,S)$ i $p(H,S)$ transferzala $\Longrightarrow \measuredangle CHT' \cong \measuredangle PST' = \omega$

Prema prethodnom zadatku je $CH : PS = 2:1$ $\Big\} \Longrightarrow$

(primjetimo da smo se mogli pozvati i na sličnost UUU. Zašto?)

$\xrightarrow{\text{slič. USU}} \Delta CHT' \sim \Delta PST'$

$\Downarrow$

$$\frac{CH}{PS} = \frac{CT'}{T'P} \Longrightarrow \frac{CT'}{T'P} = \frac{2}{1}$$ pa zbog jedinstvenosti podjele duži u datom omjeru $\Longrightarrow T \equiv T'$

$\Downarrow$

ortocentar, težište i centar opisane kružnice Δ su kolinearne tačke q.e.d.

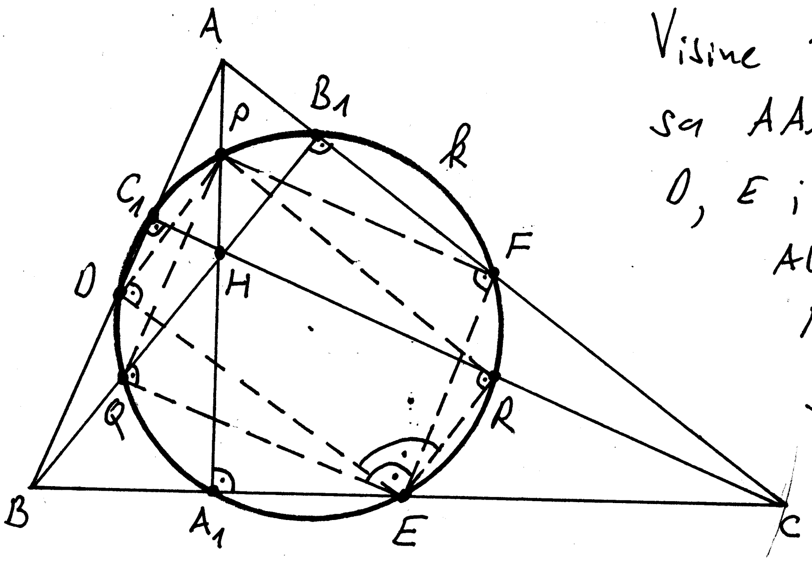
Iz sličnosti slijedi i da je $$\frac{HT}{TS} = \frac{CT}{TP} = \frac{2}{1}$$

$\Longrightarrow HT : TS = 2:1$ q.e.d.

\# Dokazati da sredine stranica, podnožja visina i sredine duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima trougla pripadaju jednoj kružnici

Napomena: Kružnica koja prolazi kroz navedenih devet tačaka zove se Ojlerova kružnica ili Kružnica devet tačaka

Rj.



Visine trougla ΔABC označimo sa AA_1, BB_1 i CC_1. Neka su D, E i F redom sredine stranica AB, BC i AC, ΔABC. Neka su P, Q i R redom sredine duži AH, BH i CH gdje je H ortocentar trougla.

Treba dokazati da tačke $A_1, B_1, C_1, D, E, F, P, Q$ i R pripadaju istoj kružnici.

Neka je k kružnica opisana oko ΔPA_1E. Dokažimo da ostale tačke pripadaju ovoj kružnici.

PF srednja linija $\Delta C_1CA \Rightarrow p(P,F) \parallel p(C,C_1)$
EF srednja linija $\Delta ABC \Rightarrow p(E,F) \parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \measuredangle EFP = 90^\circ \Rightarrow \square PA_1EF$ tetivni $\Rightarrow F \in k$

DP srednja linija $\Delta ABH \Rightarrow p(D,P) \parallel p(B,B_1)$
DE srednja linija $\Delta ABC \Rightarrow p(D,E) \parallel p(A,C)$
$\Rightarrow \measuredangle PDE = 90^\circ \Rightarrow \square DA_1EP$ tetivni $\Rightarrow D \in k$

PR sred. lin. $\Delta AHC \Rightarrow p(P,R) \parallel p(A,C)$
ER sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(E,R) \parallel p(B,B_1)$
$\Rightarrow \measuredangle ERP = 90^\circ \Rightarrow \square A_1ERP$ tetivno $\Rightarrow R \in k$

QE sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(Q,E) \parallel p(C,C_1)$
PQ sred. lin. $\Delta BHA \Rightarrow p(P,Q) \parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \measuredangle PQE = 90^\circ \Rightarrow \square QA_1EP$ tetivni $\Rightarrow Q \in k$

QE sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(Q,E) \parallel p(C,C_1)$
EF sred. lin. $\Delta ABC \Rightarrow p(E,F) \parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \measuredangle QEF = 90^\circ \Rightarrow \square B_1QEF$ tetivni $\Rightarrow B_1 \in k$

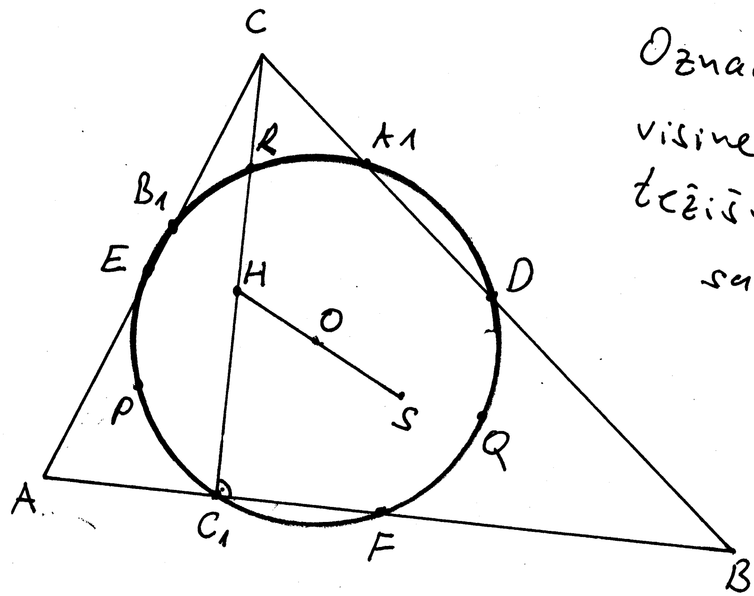
DE sred. lin. $\Delta ABC \Rightarrow p(D,E) \parallel p(A,C)$
ER sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(E,R) \parallel p(B,B_1)$
$\Rightarrow \measuredangle DER = 90^\circ \Rightarrow \square DERC_1$ tetivno $\Rightarrow C_1 \in k$

Prema tome

$A_1, B_1, C_1, P, Q, R, D, E, F \in k$ q.e.d.

(#) Dokazati da kružnica 9 tačaka ima centar na sredini duži SH (S centar opisane kružnice, H ortocentar trougla) a poluprečnik je dužine $\frac{1}{2}R$ (R poluprečnik opisane kružnice).

Rj:



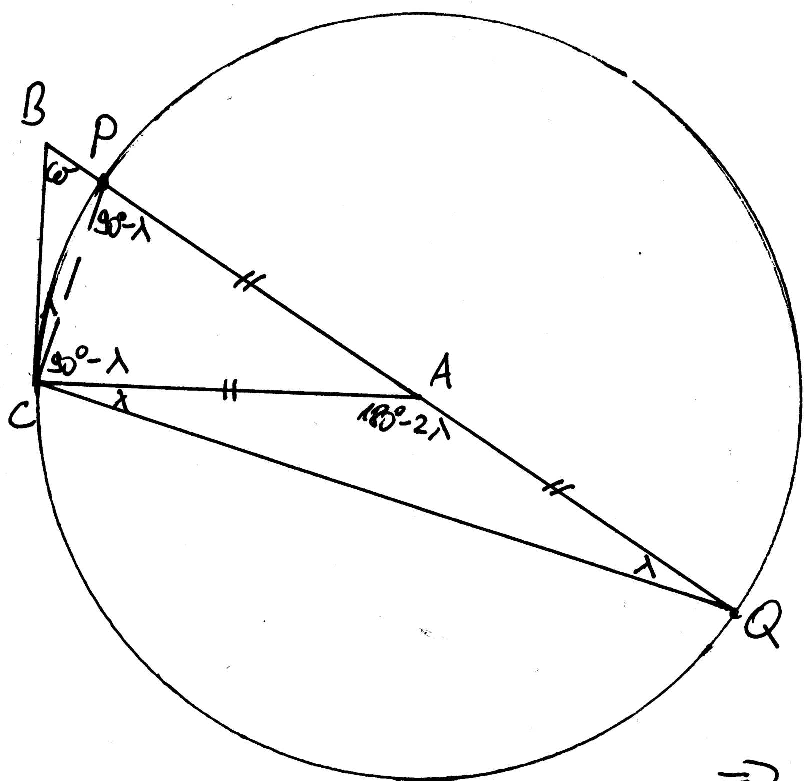
Označimo sa AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla, AD, BE i CF težišnice trougla; sa P, Q i R sredine duži AH, BH i CH.

Posmatrajmo homotetiju sa centrom u H i koeficijentom $\frac{1}{2}$. Pri toj homotetiji vrh A se preslikava u P, vrh B u Q, a vrh C u tačku R. Pri ovoj homotetiji se opisana kružnica slika u kružnicu oko P, Q i R, dakle u kružnicu devet tačaka. Prema tome poluprečnik kružnice 9 tačaka je $\frac{1}{2}R$, a centar joj je na polovini duži SH.

q.e.d.

\# Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome vrijedi da je $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Bez upotrebe Pitagorine teoreme pokazati da je $\measuredangle BCA$ prav ugao.

Rj.



Opišimo krug k sa centrom u A poluprečnika AC i neka je $k \cap AB = \{P\}$ i $p[B, A) \cap k = \{Q\}$. Sad prema postavci zadatka je

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = (AB - AC)(AB + AC) = BP \cdot BQ \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{BC}{BQ}$$

Za trouglove $\triangle BPC$ i $\triangle BCQ$ vrijedi

$$\left.\begin{aligned} \measuredangle CBP &\cong \measuredangle QBC = \omega \\ \frac{BP}{BC} &= \frac{BC}{BQ} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{slič SUS}} \triangle BCP \sim \triangle BQC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle BCP \cong \measuredangle CQB = \lambda$$

$\triangle ACQ$ jkk $\Rightarrow \measuredangle ACQ = \lambda \Rightarrow \measuredangle CAQ = 180° - 2\lambda$

$\xRightarrow{\text{perif.ug.}} \measuredangle APC = 90° - \lambda \xRightarrow{\triangle APC \text{ jkk}} \measuredangle PCA = 90° - \lambda \Rightarrow$

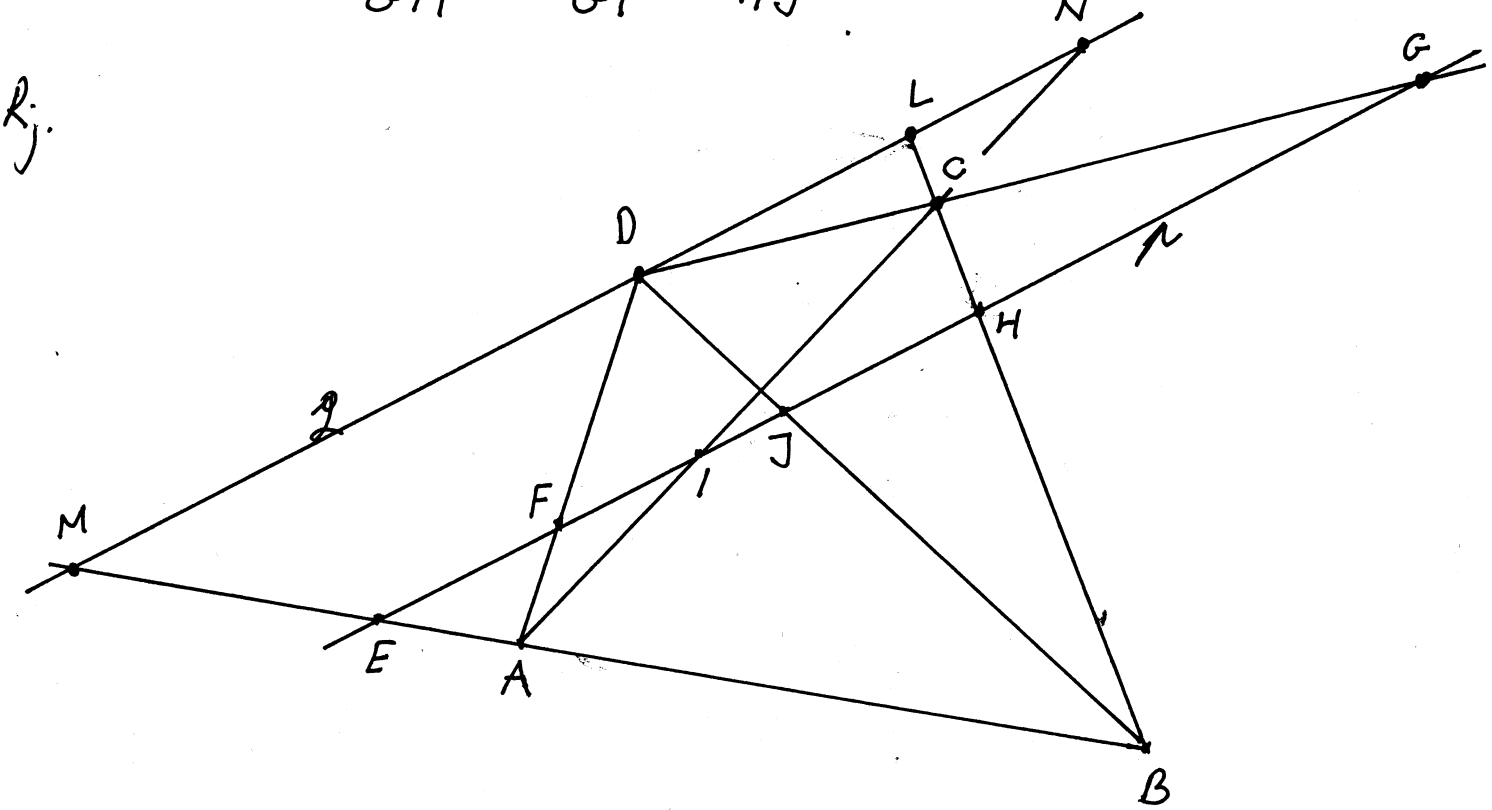
$$\Rightarrow \measuredangle BCA = \measuredangle BCP + \measuredangle PCA = \lambda + 90° - \lambda = 90°$$

q.e.d.

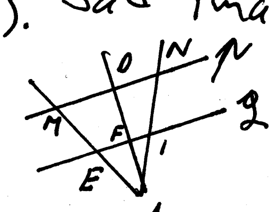
(#) Dat je četverougao $\square ABCD$ i neka je p transferzala koja siječe prave $p(A,B)$, $p(A,D)$, $p(C,D)$, $p(B,C)$, $p(A,C)$, $p(B,D)$ redom u tačkama E, F, G, H, I, J. Pokazati da

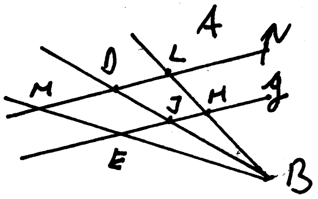
$$\frac{EF}{GH} = \frac{FI}{GI}\cdot\frac{EJ}{HJ}.$$

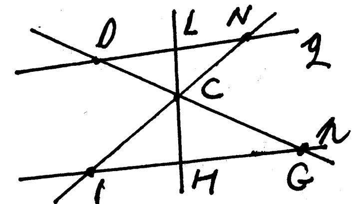
Rj.



Neka je dat četverougao $\square ABCD$ i neka tačke E, F, G, H, I, J ispunjavaju uslove iz postavke zadatka. Neka je g prava koja prolazi kroz tačku D t.d. $p \parallel g$. Sa M, L i N označimo presjeke: $\{M\} = pp[B,A) \cap g$, $\{L\} = pp[B,C) \cap g$ i $\{N\} = pp[A,C) \cap g$ (vidi sliku). Sad imamo

$p \parallel g \wedge$  $\xrightarrow{\text{posl. T.T.}}$ $\dfrac{EF}{DM} = \dfrac{FI}{DN}$ ...(1)

$p \parallel g \wedge$  $\xrightarrow{\text{posl. T.T.}}$ $\dfrac{DM}{DL} = \dfrac{EJ}{HJ}$ ...(2)

$p \parallel g \wedge$  $\xrightarrow{\text{posl. T.T.}}$ $\dfrac{DL}{GH} = \dfrac{DN}{GI}$ ...(3)

(1), (2) i (3) kad se pomnože

$$\frac{EF}{GH} = \frac{FI}{GI}\cdot\frac{EJ}{HJ} \quad \text{q.e.d.}$$