8 Elementarni zadaci: Crtanje duži datog omjera

Elementarna pitanja:

1. Za dva trougla kažemo da su slična akko... Nabrojati četri stava o sličnosti trouglova! O čemu moramo voditi računa kada se pozivamo na sličnost SSU?
2. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni ($AS \cdot CS = ...$, gdje je S...).
3. Ugao između tangente i tetive jednak je periferiskom... Kako bi to dokazali?

1. Date su duži a i b ($b < 1 < a$). Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$.

2. Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{3a} - a^2}{\sqrt{b}}$, gdje je $a < 1 < b$.

3. Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} - 1$, gdje su a i b date duži ($a < 1 < b$).

4. Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

5. Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}$.

Sličnost trouglova i Talesova teorema (nastavak)

Trigonometrija

6. **(Kosinusna teorema)** Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

7. **(Sinusna teorema)** Dat je raznostrañični trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.

8. Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ i $c = 2R\sin\gamma$.

9. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

10. Neka je AD visina trougla $\triangle ABC$ i R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Neka su tačke E i F podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC. Ako je $AD = R\sqrt{2}$, dokazati da prava EF prolazi kroz centar opisane kružnice.

Razni zadaci

11. A_1, B_1, C_1 i D_1 su tačke koje su redom sredine stranica BC, CD, AD i AB kvadrata $\square ABCD$. Dokazati da se duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 sijeku tako da obrazuju kvadrat sa stranicom jednakom $\dfrac{2}{5}$ dužine svake od tih duži.

12. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ je $CH : HC_1 = 3 : 1$, gdje je H ortocentar a C_1 podnožje visine iz vrha C. Neka je K sredina visine CC_1. Kokazati da je $\measuredangle AKB = 90°$.

13. Date su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u tačkama M i N i imaju zajedničku tangentu $p(A, B)$ ($A \in k_1$, $B \in k_2$). M je tačka na pravoj $p(C, D)$ ($C \in k_1$, $D \in k_2$) takva da je $C - M - D$ i $p(C, D) || p(A, B)$. Tetive NA i CM se sijeku u tački P, tetive NB i MD se sijeku u tački Q, a prave $p(A, C)$ i $p(B, D)$ se sijeku u tački E. Dokazati da je $PE \cong QE$.

14. U trouglu $\triangle ABC$, AP polovi ugao $\measuredangle BAC$, sa P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$ sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP \cong AQ + QB$. Koje su moguće veličine za uglove u trouglu $\triangle ABC$.

15. **(zadatak 9, drugi put)** Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

16. **(Menelaus-ova teorema, drugi put)** Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku. Dokazati da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne ako i samo ako vrijedi $\dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$.

17. Kroz tjemena A i B jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$ konstruisane su normale n_1 i n_2 na AB u istoj poluravni u kojoj je tačka C. Kroz tjeme C konstruisana je prava koja siječe n_1 u M i n_2 u N. Simetrala duži MN siječe pravu AB u tački S.

(a) Dokazati da je $\triangle MSN$jednakostraničan.

(b) Površinu trougla $\triangle MSN$ izraziti kao funkciju dužine stranice $\triangle ABC$ i ugla $\measuredangle ACS$.

18. U kružnicu je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lukova BC, CA i AB. Tačka M se nalazi sa one strane prave BC sa koje nije tačka A, tačka N se nalazi sa one strane prave AC sa koje nije tačka B i tačka P se nalazi sa one strane prave AB sa koje nije tačka C. Tetiva MN siječe stranicu BC i tački K, a NP siječe stranicu AB u tački L. Dokazati da je $KL||AC$.

19. **(Teorema Čevija)** Neka tačke A_1, B_1 i C_1 pripadaju stranicama BC, AC i AB trougla $\triangle ABC$ redom. Dokazati da se duži AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u istoj tački ako i samo ako vrijedi
$\dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$.

20. Dokazati da se

(a) težišnice

(b) visine

(c) simetrale uglova

trougla sijeku u istoj tački.

21. Neka su $p(A, A_1)$, $p(B, B_1)$ i $p(C, C_1)$ tri prave trougla $\triangle ABC$ koje se sijeku u R. Dokazati da vrijedi $\dfrac{RA_1}{AA_1} + \dfrac{RB_1}{BB_1} + \dfrac{RC_1}{CC_1} = 1$.

22. Dokazati da je rastojanje vrha trougla od ortocentra dva puta veće od rastojanja centra opisane kružnice od stranice trougla naspram tog vrha.

23. **(Ojlerova prava)** Dokazati da su ortocentar, težište i centar opisane kružnice trougla kolinearne tačke pri čemu težište T dijeli duž HS u omjeru 2:1.

Napomena: Prava kroz H, T i S se zove Ojlerova prava.

24. Dokazati da sredine stranica, podnožja visina i sredine duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima trougla pripadaju jednoj kružnici.

Napomena: Kružnica koja prolazi kroz navedenih devet tačaka zove se Ojlerova kružnica ili Kružnica devet tačaka.

25. Dokazati da kružnica 9 tačaka ima centar na sredini duži SH (S centar opisane kružnice, H ortocentar trougla) a poluprečnik je dužine $\dfrac{1}{2}R$ (R poluprečnik opisane kružnice).

26. Dat je $\triangle ABC$ u kome vrijedi da je $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Bez upotrebe Pitagorine teoreme pokazati da je $\measuredangle BCA$ prav ugao.

27. Dat je četverougao $\square ABCD$ i neka je p transferzala koja siječe prave $p(A, B)$, $p(A, D)$, $p(C, D)$, $p(B, C)$, $p(A, C)$, $p(B, D)$ redom u tačkama E, F, G, H, I, J. Pokazati da je

$$\frac{EF}{GH} = \frac{FI}{GI} \cdot \frac{EJ}{HJ}.$$