7 Elementarni zadaci: Kocka i piramida

Elementarna pitanja:

1. Kako glasi formula za računanje površine kocke? $[6a^2]$
2. Kako glasi formula za računanje zapremine kocke? $[a^3]$
3. Kako glasi formula za računanje površine piramide? $[P_{omotaca} + P_{baze}]$
4. Kako glasi formula za računanje zapremine piramide? $[\frac{1}{3}P_{baze} \cdot H]$
5. Kako glasi formula za računanje površine tetraedra? $[4\frac{a^2\sqrt{3}}{4}]$
6. Kako glasi formula za računanje zapremine tetraedra? $[\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}]$

1. Iz predmeta oblika kocke istesan je pravilan tetraedar tako da su ivice (bridovi) tetraedra ujedno dijagonale strana kocke. Odrediti:
(a) Koliko je puta smanjena površina tijela?
(b) Koliko je puta smanjena zapremina tijela?

2. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tačke M i N su središta ivica AB i BC. Kako se odnose:
(a) zapremine;
(b) površine;
kocke i piramide $MBNB_1$?

3. Neka je $SABCD$ pravilna usparavna četverostran a piramida (S - vrh piramide) čija je zapremina $V = 36\,\mathrm{cm}^3$. Ako je tačka O centar osnove (baze) $ABCD$ date piramide, tačka F središte ivice CD i $\{E\} = AF \cap BD$, izračunati zaprennnu piramide $SOEFC$.

4. Ivica jednakoivične četverostrane piramide $SABCD$ je a. Tačke A_1, B_1, C_1, D_1 su središta bočnih ivica redom a tačka O je podnožje visine piramide. Izračunaj površinu i zapreminu tijela $OA_1B_1C_1D_1S$.

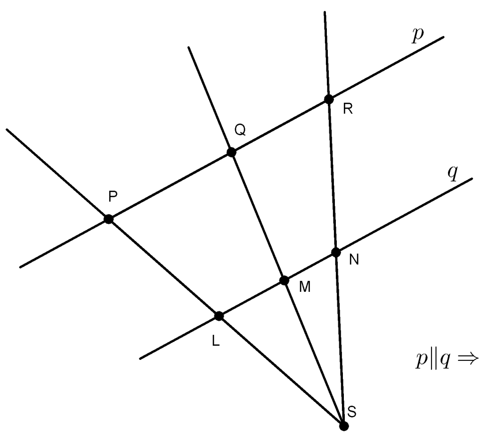
5. Ivice AB, AC i AD trostrane uspravne piramide su međusobno normalne. Izračunati zapreminu piramide ako su površine strana ABC, ACD i ADB redom jednake $12\,\mathrm{cm}^2$, $16\,\mathrm{cm}^2$ i $24\,\mathrm{cm}^2$.

6. Kocka ivice a presječena je jednom ravni koja sadrži dijagonalu jedne strane kocke i središta dviju ivica suprotne strane. Izračunati površinu tog presjeka.

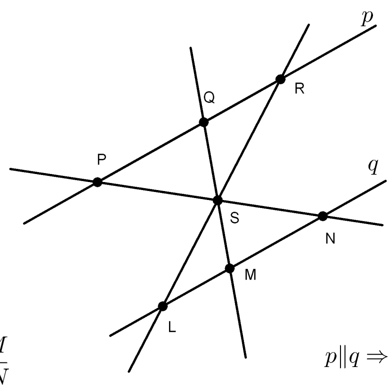
7. Bočna strana pravilne trostrane piramide je nagnuta prema bazi piramide pod uglom od 60°. Težište baze je udaljeno od bočne strane 3 cm. Naći površinu i zapreminu piramide.

Sličnost trouglova i Talesova teorema (nastavak)

Neke posljedice stavova o sličnosti trouglova:



$p \| q \Rightarrow \frac{PQ}{QR} = \frac{LM}{MN}$



$p \| q \Rightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{PR}{LN}$

8. U pravougaoniku $\square ABCD$ tačka M je sredina stranice AD, a N je sredina strane BC. Neka je $\{Q\} = p(P, M) \cap p(A, C)$. Dokazati da je $\measuredangle QNM = \measuredangle MNP$, gdje je P proizvoljna tačka na pravoj $p(C, D)$ takva da je $C - D - P$.

9. U trougao $\triangle ABC$ upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

10. Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom prave p i q u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave dokazati da je $\frac{SP}{SQ} = \frac{SP'}{SQ'}$, $\frac{SP'}{PP'} = \frac{SQ'}{QQ'}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{SQ}{QQ'}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{SP}{PQ}$.

11. Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Neka je $\{S\} = p(A, D) \cap p(B, C)$. Ako je $SA : SD = SB : SC$ i $\measuredangle BAD = 80°$ izračunati $\measuredangle ADC$.

12. Dat je trapez $\square ABCD$ kod koga se osnovice AB i CD odnose kao 2:1. Neka je $\{S\} = p(A, D) \cap p(B, C)$. Ako je $SD = 3\,\text{cm}$ izračunati AD.

13. **(Menelaus-ova teorema)** Neka je dat trougao $\triangle ABC$ i neka prava p siječe stranice trougla AB, BC i AC (po potrebi produžiti stranice) redom u tačkama D, E i F. Tada je $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$. Dokazati.

14. Neka je AA_1 simetrala ugla kod A trougla $\triangle ABC$, a I centar upisane kružnice. Dokazati da je $AI : IA_1 = (AB + AC) : BC$.

Konstrukcija duži i Homotetija

15. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a \cdot b$.

16. Data je duž a. Konstruisati duž $x = a^2$.

17. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a^2 + b^2$.

18. Date su duži a i b. konstruisati duž x ako se zna da je $x : (b - a) = (2b - a) : (b + a)$.

19. Datu duž a podjeliti u omjeru 2:3.

20. Datu duž b podjeliti u omjeru 1:3.

21. Dati su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ čije su odgovarajuće stranice proporcionalne u omjeru 2:1. Ako je $\measuredangle ABC = 80°$ izračunati uglove $\measuredangle A'B'C'$ i $\measuredangle B'A'C'$.

22. Na stranicama AB i AC trougla $\triangle ABC$ uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 2 : 3$. Ako je $P_{\triangle ADE} = 2\,cm^2$ odrediti $P_{\triangle ABC}$.

23. Na stranicama AB i AC trougla $\triangle ABC$ uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 4 : 3$. Ako je $O_{\triangle ADE} = 8\,cm$ odrediti $O_{\triangle ABC}$

24. Data je tačka A i duž MN. Duž MN preslikati homotetično s centrom u tački A i koeficijentom

(a) $k = 2$

(b) $k = -\frac{2}{3}$

25. Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačka O u unutrašnjosti trougla. Trougao preslikati homotetično sa centrom u tački O i koeficijentom

(a) $k = \frac{2}{5}$

(b) $k = \frac{1}{3}$

Ako je $P_{\triangle ABC} = 56\,cm^2$ i $O_{\triangle ABC} = 30\,cm$ izračunati P i O novodobijenog trougla.

26. Data je kružnica k i tačka A. Preslikati datu kružnicu homotetično sa centrom u A i koeficijentom

(a) $k = -\frac{1}{2}$

(b) $k = \frac{2}{3}$

Odrediti omjer površina i obima kružnica.

27. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

28. U pravoulom trouglu $\triangle ABC$, duž CD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

29. Konstruisati duž $\sqrt{3}$.

30. Data je duž a. Konstruisati duž $\sqrt{a}$.

31. Konstruisati duž $x = \frac{\sqrt{ab}}{a}$, ako su a i b date duži.

\# Iz predmeta oblika kocke istesan je pravilan tetraedar tako da su ivice (bridovi) tetraedra ujedno dijagonale strana kocke. Oodrediti:

a) Koliko je puta smanjena površina tijela?

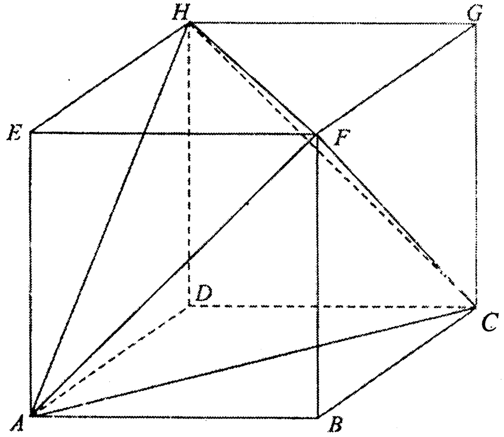
b) Koliko je puta smanjena zapremina tijela?

R: Neka je dužina ivice kocke $ABCDEFGH$ jednaka a_k. Površina kocke je $P_k = 6a_k^2$, a njena zapremina je $V_k = a_k^3$. Tetraedar $ACFH$ ima ivicu dužine $a_t = a_k\sqrt{2}$. Površina tetraedra je

$$P_t = 4\frac{a_t^2\sqrt{3}}{4} = a_t^2\sqrt{3},$$

odnosno

$$P_t = \left(a_k\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3} = 2a_k^2\sqrt{3}.$$



Zapremina tetraedra je $V_t = 4\frac{a_t^3\sqrt{2}}{12}$,

odnosno

$$V_t = \frac{\left(a_k\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a_k^3}{3}.$$

a) Površina tijela je smanjena za

$$P_k - P_t = 6a_k^2 - 2_k^2\sqrt{3} = 2a_k^2\left(3-\sqrt{3}\right),$$

ili smanjena je

$$\frac{P_k}{P_t} = \frac{6a_k^2}{2a_k^2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ puta.}$$

b) Zapremina tijela je smanjena za

$$V_k - V_t = a_k^3 - \frac{a_k^3}{3} = \frac{2}{3}a_k^3,$$

ili smanjena je

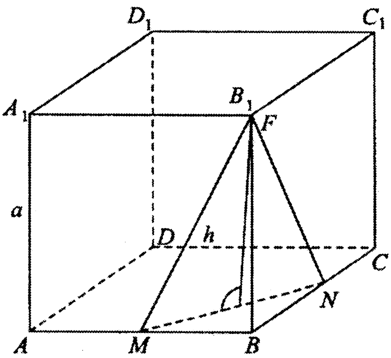
$$\frac{V_k}{V_t} = \frac{a_k^3}{\frac{a_k^3}{3}} = 3 \text{ puta.}$$

Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tačke M i N su središta ivica AB i BC. Kako se odnose:

a) zapremine;

b) površine kocke i piramide $MBNB_1$?

Rj. Označimo dužinu ivica kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sa a. Tada imamo:



$$\overline{MN} = \overline{BN} = \frac{a}{2},\ \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{MB_1} = \overline{NB_1} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

$$h = \sqrt{\overline{MB_1^2} - \left(\frac{1}{2}\overline{MN}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^2} = \sqrt{\frac{9}{8}a^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}.$$

a) $V_{koc.} = a^3$, $V_{pir.} = \frac{1}{3}P_{\Delta BMN} \cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a = \frac{1}{24}a^3$,

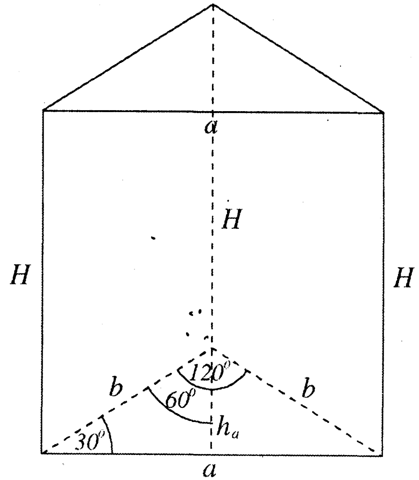
pa je $V_{koc.} : V_{pir.} = a^3 : \frac{1}{24}a^3 = 24 : 1$.

b) $P_{koc.} = 6a^2$,

$$P_{pir} = P_{\Delta BMN} + P_{\Delta BMB_1} + P_{\Delta BNB_1} + P_{\Delta MNB_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a + \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3a}{2\sqrt{2}} = a^2,$$

pa je $P_{koc.} : P_{pir.} = 6a^2 : a^2 = 6 : 1$.

Baza uspravne prizme je jednakokraki trougao osnovice a i ugla pri vrhu 120^0. Kolika je zapremina prizme (u funkciji od a) ako je površina omotača dva puta veća od površine baze?



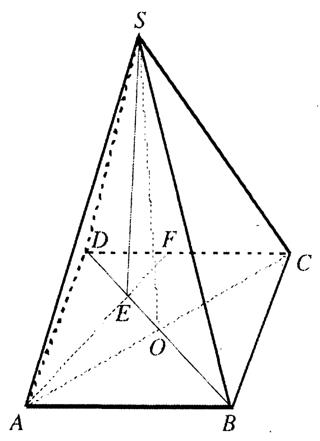
Rj. Neka je b krak jednakokrakog trougla osnovice a i visine h_a koja odgovara osnovici. Tada visina baze iz vrha ugla od 120^0 razlaže trougao na dva podudarna trougla sa uglovima od 60^0 i 30^0, pa je $h_a = \frac{b}{2}, \frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, tj. $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$, a odavde $h_a = \frac{b}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Sada je $$B = \frac{ah_a}{2} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}},\ M = 2B = \frac{a^2}{2\sqrt{3}},$$

$$M = aH + 2bH = (a + 2b)H = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)H \Rightarrow \frac{a^2}{2\sqrt{3}} = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{\frac{a^2}{2\sqrt{3}}}{a\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2(2+\sqrt{3})},\quad V = B \cdot H = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{a^3}{8\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}.$$

Neka je $SABCD$ pravilna usparavna četverostrana piramida (S - vrh piramide) čija je zapremina $V = 36 cm^3$. Ako je tačka O centar osnove (baze) $ABCD$ date piramide, tačka F središte ivice CD i $\{E\} = AF \cap BD$, izračunati zapreminu piramide $SOEFC$.



Rj. Data piramida $SABCD$ i piramida $SOEFC$ imaju jednake visine pa je

$$\frac{V(SOEFC)}{V(SABCD)} = \frac{P(OEFC)}{P(ABCD)}$$ (P - površina baze).

Tačka E je očigledno težište ΔACD (jer su AF i DO njegove težišnice), pa je

$$P(OEFC) = \frac{1}{3} P_{\Delta ACD} = \frac{1}{6} P(ABCD).$$

Dakle, $$V(SOEFC) = \frac{1}{6} V(SABCD) = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 cm^3.$$

#. Ivica jednakoivične četverostrane piramide $SABCD$ je a. Tačke A_1, B_1, C_1, D_1 su središta bočnih ivica redom a tačka O je podnožje visine piramide. Izračunaj površinu i zapreminu tijela $OA_1B_1C_1D_1S$.

R.: Tijelo $OA_1B_1C_1D_1S$ je oktaedar. Visina bočne strane, tj. visina jednakostraničnog trougla je

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Visina piramide je

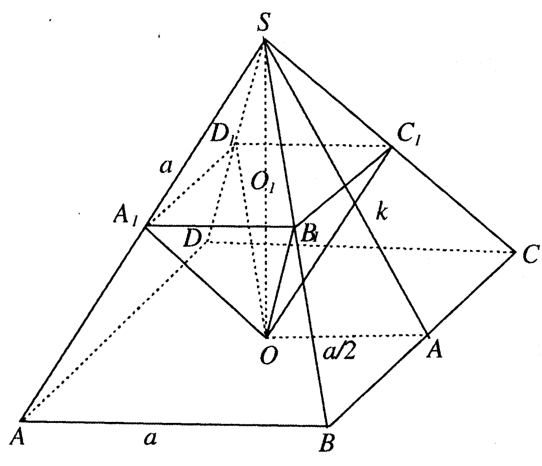
$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Površina oktaedra je

$$P_{okt.} = 8\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2},$$

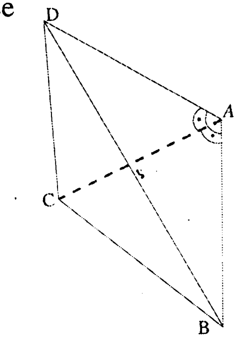
a zapremina

$$V_{okt.} = 2 \cdot V_{A_1B_1C_1D_1S} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$



\# Ivice AB, AC i AD trostrane uspravne piramide su međusobno normalne. Izračunati zapreminu piramide ako su površine strana ABC, ACD i ADB redom jednake $12cm^2, 16cm^2$ i $24cm^2$.

R. Neka je $ABCD$ uspravna trostrana piramida kod koje su ivice AB, AC i AD uzajamno normalne i površine strana su



$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 12cm^2; \qquad P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD} = 16cm^2,$$

$$P_{\Delta ADB} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD} = 24cm^2.$$

Zapremina piramide je

$$V = \frac{1}{3}B\cdot H = \frac{1}{3}\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{6}\sqrt{\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2\cdot\overline{AD}^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{8\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}{2}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{8\cdot 12\cdot 16\cdot 24}cm^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\sqrt{2^3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2^4\cdot 3\cdot 2^3}cm^2 = \frac{1}{6}\sqrt{2^{12}\cdot 3^2}cm^2 = \frac{1}{6}\cdot 2^6\cdot 3cm^2 = 2^5cm^2 = 32cm^2.$$

\# Kocka ivice a presječena je jednom ravni koja sadrži dijagonalu jedne strane kocke i središta dviju ivica suprotne strane. Izračunati površinu tog presjeka.

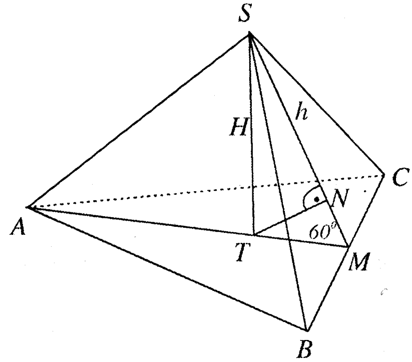
R. Neka je presjek kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sa datom ravni jednakokraki trapez BC_1NM, gdje su M i N redom središta ivica A_1D_1 i A_1A. Osnovice trapeza su $\overline{BC_1} = a\sqrt{2}$ i $\overline{MN} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, a kraci $\overline{BM} = \overline{C_1N}$.

Imamo $\overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AN}^2 = \frac{5a^2}{4}$ i visina trapeza je $h = \sqrt{\overline{BM}^2 - \overline{BP}^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$, jer je $\overline{BP} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC_1} - \overline{MN}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Površina trapeza je $P = \frac{9a^2}{8}$.

#

Bočna strana pravilne trostrane piramide je nagnuta prema bazi piramide pod uglom od 60%. Težište baze je udaljeno od bočne strane $3cm$. Naći površinu i zapreminu piramide.

R:



Baza date piramide je jednakostranični trougao ΔABC, dok omotač sačinjavaju tri podudarna jednakokraka trougla. Dato rastojanje baze od bočne strane je duž TN, gdje N leži na visini bočne strane. Uočimo da je pravougli trougao ΔMNT polovina jednakostraničnog trougla, pa je $\overline{MT} = 2\overline{MN}$.

Prema Pitagorinoj teoremi imamo

$$\overline{MT}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NT}^2 \Rightarrow \overline{MT}^2 = \frac{1}{4}\overline{MT}^2 + 3^2 \Rightarrow \frac{3}{4}\overline{MT}^2 = 9 \qquad \Rightarrow \overline{MT}^2 = 12 \Rightarrow \overline{MT} = 2\sqrt{3}.$$

Zbog toga je $\overline{AM} = 3\overline{MT} = 6\sqrt{3}$. AM je visina trougla ΔABC, dakle, vrijedi

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 6\sqrt{3} = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = a = 12cm.$$

Dakle,

$$B = P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}cm^2.$$

Uočimo da je i pravougli trougao ΔSMT polovina jednakostraničnog trougla i da je $\overline{SM} = 2\overline{MT}$. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ΔSMT imamo:

$$\left(2\overline{MT}\right)^2 - \overline{MT}^2 = \overline{ST}^2 = H^2 \Rightarrow H^2 = 3\overline{MT}^2 = 36 \Rightarrow H = 6cm$$

pa možemo izračunati zapreminu date piramide $V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 6 = 72\sqrt{3}cm^3$.

Dalje, površina omotača piramide je

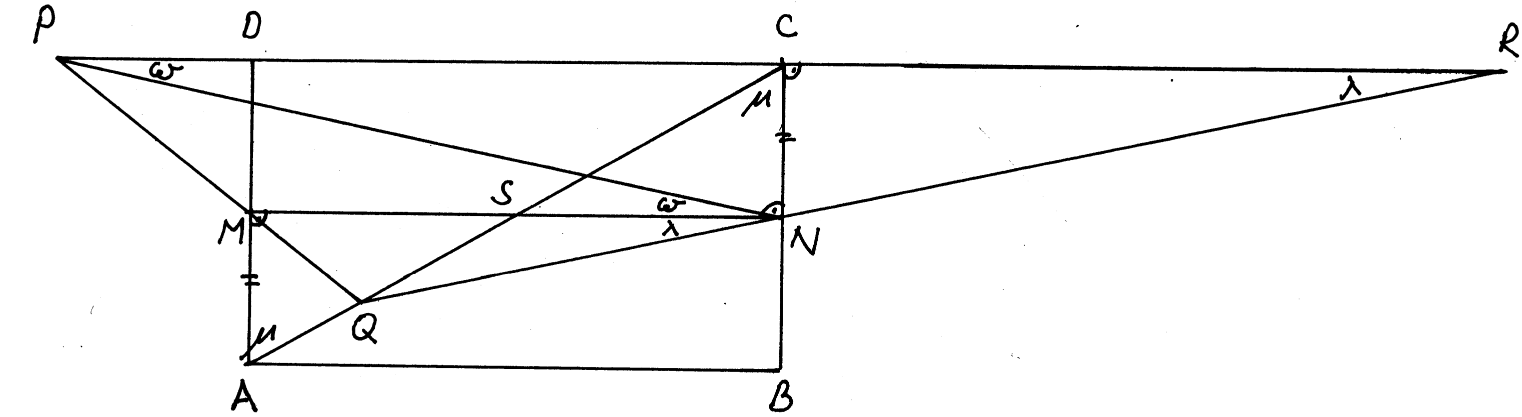
$$M = 3 \cdot P_{\Delta BCS} = 3 \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{SM}}{2} = 3 \cdot \frac{a \cdot 2\overline{MT}}{2} = 3a \cdot \overline{MT} = 3 \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3},$$

$$M = 72\sqrt{3}cm^2.$$

Površina piramide je $P = B + M = 108\sqrt{3}cm^2$.

(#) U pravougaonika $\square ABCD$ tačka M je sredina strane AD, a N je sredina strane BC. Neka je $\{Q\} = p(P,M) \cap p(A,C)$. Dokazati da je $\measuredangle QNM = \measuredangle MNP$, gde je P proizvoljna tačka na pravoj $p(C,D)$ takva da je $C-D-P$.

Rj.



Označimo sa $\{S\} = AC \cap MN$, $\lambda = \measuredangle QNM$ i $\omega = \measuredangle MNP$.
Treba dokazati da je $\lambda = \omega$.

$\square ABCD$ pravougaonik, M sredina AD, N sredina BC

$\Rightarrow AM \cong AD \cong BN \cong CN$ i kako je $p(A,D) \parallel p(B,C)$

$\Rightarrow \square ABNM$ i $\square MNCD$ paralelogrami

a kako je $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDA = 90^\circ$ to su $\square ABNM$ i $\square MNCD$ pravougaonici

$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle MAC = \measuredangle NCA = \mu$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \mu \\ AM \cong NC \\ \measuredangle AMS \cong \measuredangle SNC = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle SMA \cong \triangle SNC \;\Downarrow\; MS \cong SN \text{ tj.}$$

S je sredina duži MN

Označimo sa $\{R\} = p(Q,N) \cap p(P,C)$.

$p(M,N) \parallel p(P,R)$ i $p(Q,R)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle QNM \cong \measuredangle NRP = \lambda$

$p(M,N) \parallel p(P,R)$ i $p(P,N)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle MNP \cong \measuredangle NPR = \omega$

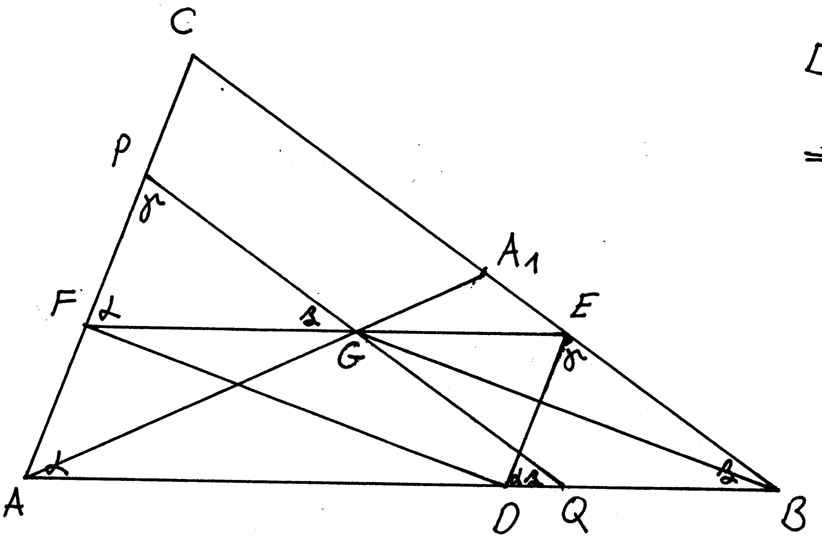
$p(M,N) \parallel p(P,R) \xRightarrow{TT} \frac{QC}{QS} = \frac{CR}{SN}$ i $\frac{QC}{QS} = \frac{PC}{SM} \Rightarrow \frac{RC}{CP} = \frac{SN}{SM} = 1$ tj. $RC \cong PC$

$$\left.\begin{array}{l} PC \cong RC \\ \measuredangle PCN \cong \measuredangle RCN = 90^\circ \\ CN \cong CN \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle PCN \cong \triangle RCN \;\Downarrow\; \measuredangle NPC \cong \measuredangle NRC \Rightarrow \lambda = \omega$$

q.e.d.

U trougao $\triangle ABC$ upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

Rj.



$\square ADEF$ paralelogram

$\Rightarrow p(A,D) \parallel p(E,F)$

i $p(A,F) \parallel p(D,E)$

Kroz tačku G povucimo pravu paralelnu pravoj $p(B,C)$ koja siječe stranice AC i AB redom u tačkama P i Q.

$p(G,E) \parallel p(Q,B)$ i $p(Q,G) \parallel p(E,B) \Rightarrow \square QBEG$ paralelogram

$\Rightarrow GQ \cong BE$

$$p(B,C) \parallel p(P,Q) \xrightarrow{TT} \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{GQ}{GP} \Rightarrow \frac{GQ}{GP} = 1 \text{ tj. } PG = GQ$$

$p(B,C) \parallel p(P,Q)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQP \cong \measuredangle ABC = \beta$

$p(A,B) \parallel p(E,F)$ i $p(Q,P)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQP \cong FGP = \beta$

tj. $\measuredangle AQC \cong \measuredangle FGP = \beta$

$p(A,B) \parallel p(F,E)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle CFE = \alpha$

$p(A,C) \parallel p(D,F)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle EDB = \alpha$

tj. $\measuredangle CFE \cong \measuredangle EDB = \alpha$ pa je i $\measuredangle FPG \cong \measuredangle DEB = \gamma$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle PFG \cong \measuredangle EDB = \alpha \\ \measuredangle FGP \cong \measuredangle DBE = \beta \\ \measuredangle GPF \cong \measuredangle BED = \gamma \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sličn. UUU}} \triangle FGP \sim \triangle DBE$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DB}{FG} = \frac{BE}{PG} \xrightarrow{BE = GQ = PG} \frac{DB}{FG} = 1 \text{ tj. } DB = FG$$

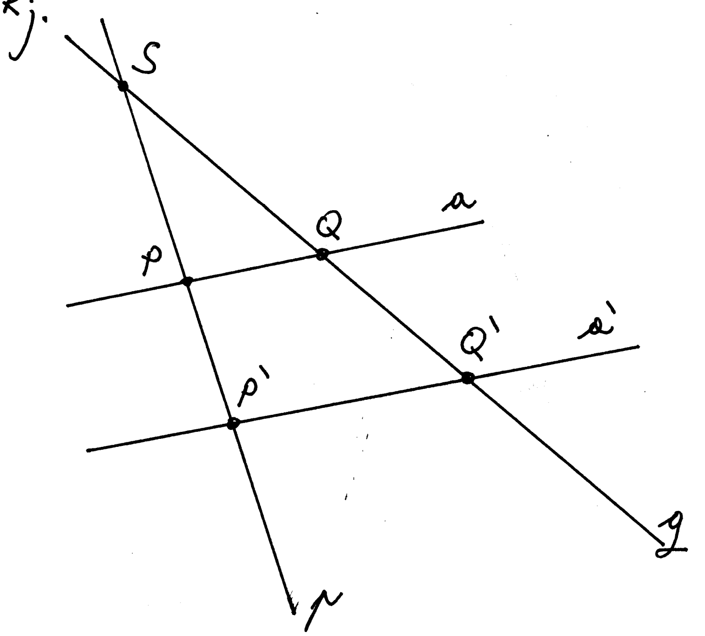
$p(D,B) \parallel p(F,G)$ i $DB \cong FG \Rightarrow \square BGFD$ paralelogram

q.e.d.

2. Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i q u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave dokazati da je $\frac{SP}{SQ}=\frac{SP'}{SQ'}$,

$\frac{SP'}{PP'}=\frac{SQ'}{QQ'}$, $\frac{SP}{PP'}=\frac{SQ}{QQ'}$ i $\frac{SP'}{P'Q'}=\frac{SP}{PQ}$.

Rj.



Prema talesovoj teoremi znamo da je

$$\frac{SP'}{SP}=\frac{SQ'}{SQ}=\frac{P'Q'}{PQ}$$

a) $\frac{SP'}{SP}=\frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SQ}{SP}=\frac{SQ'}{SP'}$

$\Rightarrow \frac{SP}{SQ}=\frac{SP'}{SQ'}$ q.e.d.

b) $\frac{SP'}{SP}=\frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP}{SP'}=\frac{SQ}{SQ'} \Rightarrow \frac{SP}{SP'}-1=\frac{SQ}{SQ'}-1$

$\Rightarrow \frac{SP-SP'}{SP'}=\frac{SQ-SQ'}{SQ'} \Rightarrow \frac{PP'}{SP'}=\frac{QQ'}{SQ'} \Rightarrow \frac{SP'}{PP'}=\frac{SQ'}{QQ'}$ q.e.d.

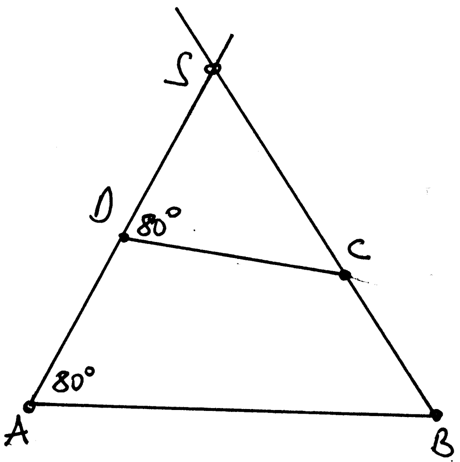
c) $\frac{SP'}{SP}=\frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP'}{SP}-1=\frac{SQ'}{SQ}-1 \Rightarrow \frac{SP'-SP}{SP}=\frac{SQ'-SQ}{SQ}$

$\Rightarrow \frac{PP'}{SP}=\frac{QQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP}{PP'}=\frac{SQ}{QQ'}$ q.e.d.

d) $\frac{SP'}{SP}=\frac{P'Q'}{PQ} \Rightarrow \frac{SP'}{P'Q'}=\frac{SP}{PQ}$ q.e.d.

3. Dat je konveksan četvorougao $\square ABCD$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SA : SD = SB : SC$ i $\measuredangle BAD = 80^\circ$ izračunati $\measuredangle ADC$.

Rj.



Kako je $SA : SD = SB : SC \overset{OTT}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$.

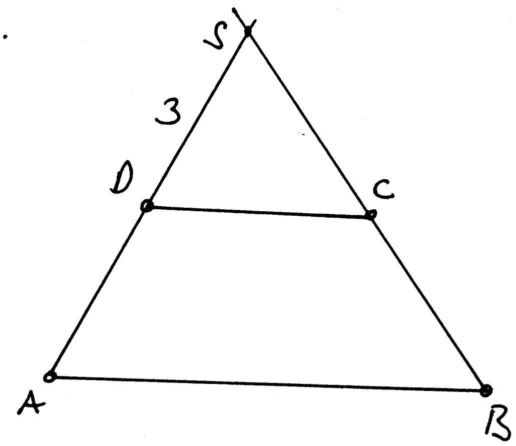
$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle CDS = 80^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle ADC = 100^\circ$

4. Dat je trapez $\square ABCD$ kod koga se osnovice AB i CD odnose kao $2:1$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SD = 3$ cm izračunati AD.

Rj.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$$

$$p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{TT}{\Rightarrow} \frac{SA}{SD} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$$

$SA = 2SD$

$SA = 6\text{ cm} \Rightarrow AD = 3\text{ cm}$

5. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a \cdot b$.

Rj.

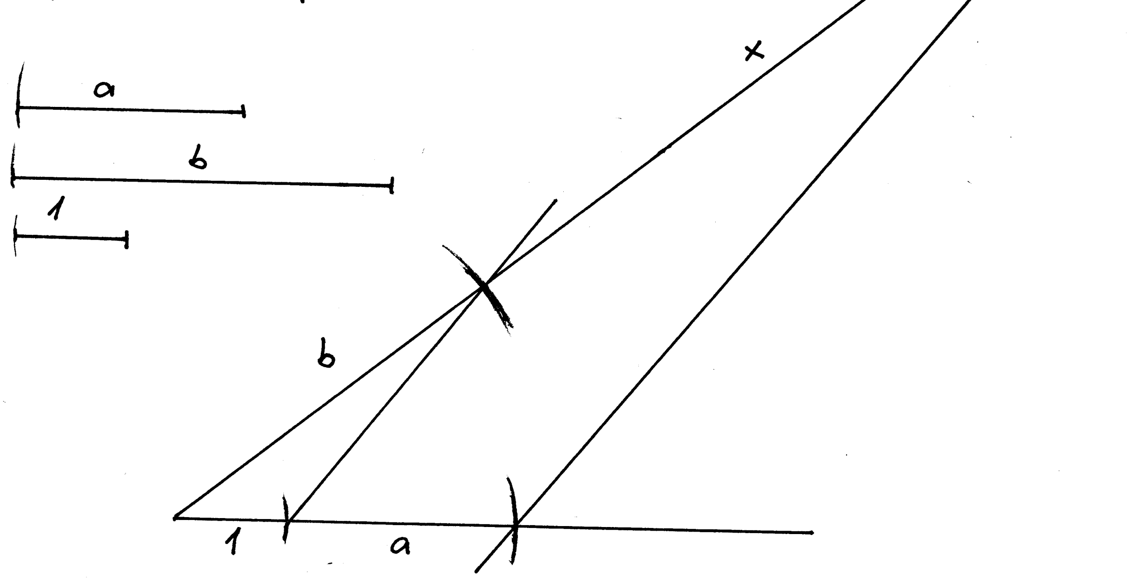
$x = a \cdot b$

$\frac{x}{b} = a$

$\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$

$\frac{a}{1} = \frac{x}{b}$

$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$

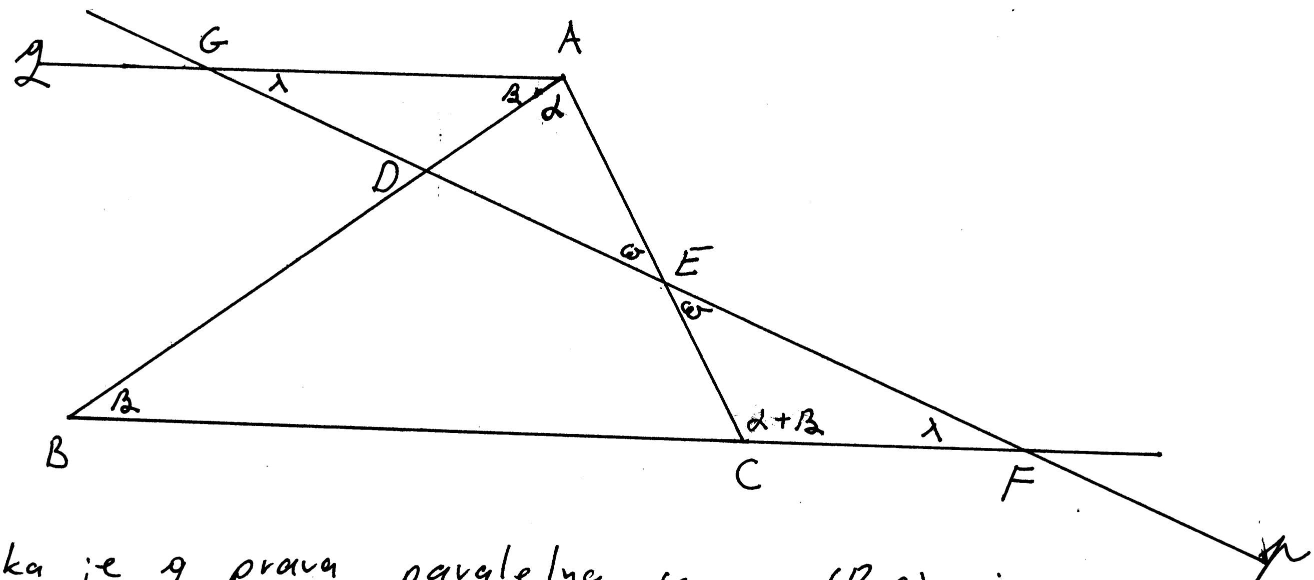


(#) (Menelaus-ova teorema)
Neka je dat trougao ΔABC i neka prava p siječe stranice trougla AB, BC i AC (po potrebi produžiti stranice) redom u tačkama D, E i F. Tada je

$$\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=1.$$

Dokazati.

Rj.



Neka je g prava paralelna sa $p(B,C)$ i $\{G\}=p\cap g$

$p(B,C)\parallel p(A,G)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAG=\beta$

$p(B,C)\parallel p(A,G)$ i $p(F,G)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BFD \cong \measuredangle AGD=\lambda$

$\measuredangle BAC=\alpha \Rightarrow \measuredangle EAG=\alpha+\beta$

$\measuredangle FCD$ vanjski ugao $\Delta ABC \Rightarrow \measuredangle FCE=\alpha+\beta$.

Posmatrajmo ΔECF i ΔEAG

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle AGE \cong \measuredangle CFE=\lambda\\ \measuredangle GEA \cong \measuredangle FEC=\omega \text{ (unakrsni uglovi)}\\ \measuredangle EAG \cong \measuredangle ECF=\alpha+\beta\end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \Delta EAG \sim \Delta ECF$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AG}{CF}=\frac{AE}{CE}$$

tj. $\frac{AG}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=1$ ...(*)

Posmatrajmo ΔDAG i ΔBFD

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle AGD \cong \measuredangle BFD=\lambda\\ \measuredangle GDA \cong \measuredangle FDB \text{ (unakrsni)}\\ \measuredangle DAG \cong \measuredangle DBF=\beta\end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \Delta AGD \sim \Delta BFD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AG}{BF} \Rightarrow \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{AG}=1 \text{ ...(**)}$$

Iz (*) i (**) $\Rightarrow \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=1$

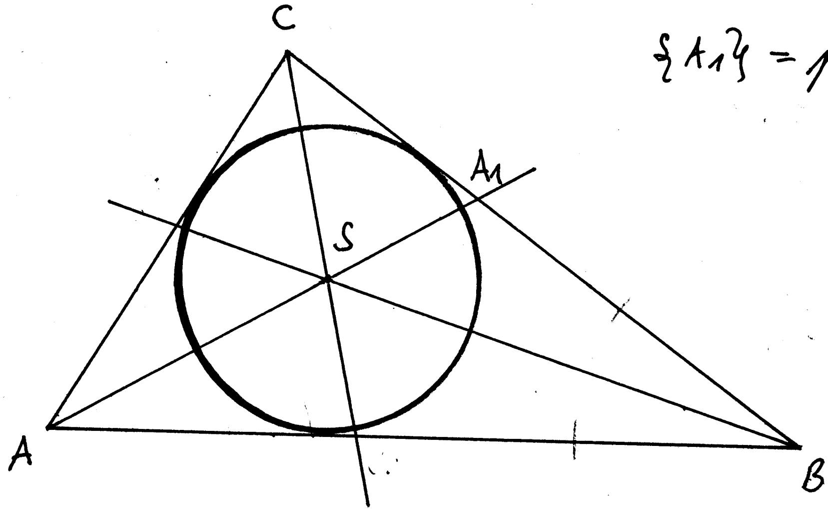
q.e.d.

Neka je AA_1 simetrala ugla kod A trougla $\triangle ABC$ a S centar upisane kružnice. Dokazati da je $AS : SA_1 = (AB + AC) : BC$

Rj.

Označimo sa S centar upisane kružnice trougla

$\{A_1\} = p(A,S) \cap BC$



Dokažimo da je

$$\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB+AC}{BC}.$$

$$\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB}{BA_1} \quad \ldots(*) \qquad \frac{AS}{SA_1} = \frac{AC}{CA_1} \quad \ldots(**) \qquad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC\frac{BA_1}{CA_1} \text{ i } AC = AB\frac{CA_1}{BA_1}$$

$$(*)+(**) \Rightarrow 2\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB}{BA_1} + \frac{AC}{CA_1} = \frac{AB\cdot\frac{BC}{BA_1} + AC\cdot\frac{BC}{CA_1}}{BC} =$$

$$= \frac{AB\cdot\frac{BA_1+CA_1}{BA_1} + AC\frac{BA_1+CA_1}{CA_1}}{BC} = \frac{AB\left(1+\frac{CA_1}{BA_1}\right) + AC\left(1+\frac{BA_1}{CA_1}\right)}{BC}$$

$$= \frac{AB + AC + AB\frac{CA_1}{BA_1} + AC\frac{BA_1}{CA_1}}{BC} = \frac{2AB + 2AC}{BC}$$

tj. $2\frac{AS}{SA_1} = 2\frac{AB+AC}{BC} \Rightarrow \frac{AS}{SA_1} = \frac{AB+AC}{BC}$

q.e.d.

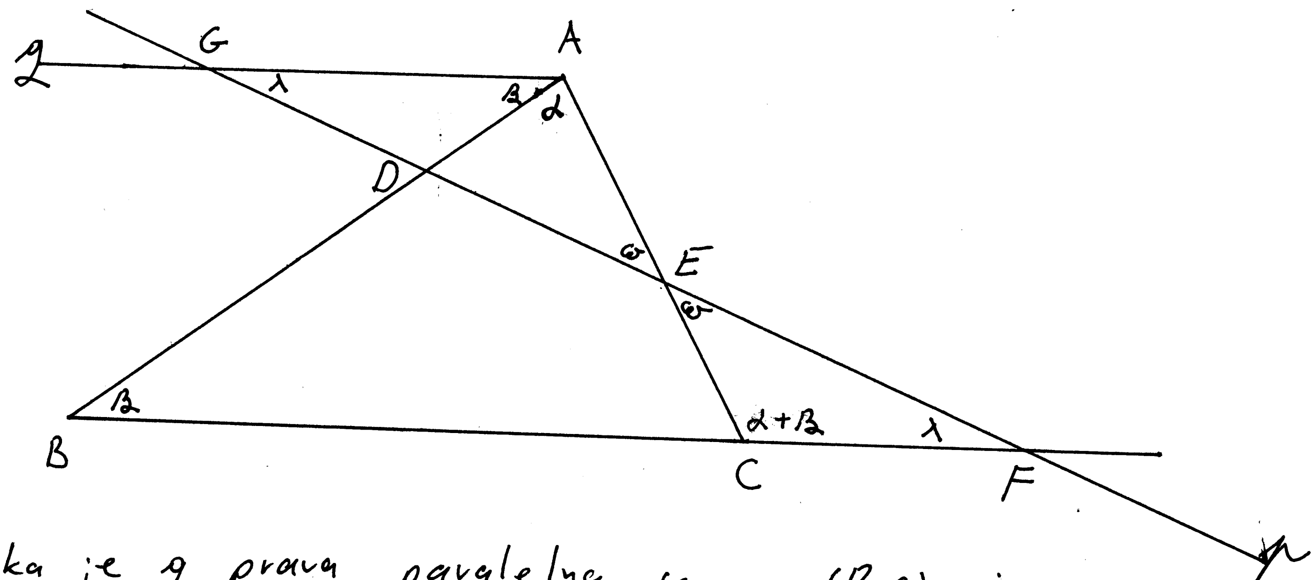
(Menelaus-ova teorema)

Neka je dat trougao ΔABC i neka prava p siječe stranice trougla AB, BC i AC (po potrebi produžiti stranice) redom u tačkama D, E i F. Tada je

$$\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=1.$$

Dokazati.

Rj.



Neka je q prava paralelna sa $p(B,C)$ i
$\{G\}=p\cap q$

$p(B,C)\parallel p(A,G)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAG=\beta$

$p(B,C)\parallel p(A,G)$ i $p(F,G)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle BFD \cong \sphericalangle AGD=\lambda$

$\sphericalangle BAC=\alpha \Rightarrow \sphericalangle EAG=\alpha+\beta$

$\sphericalangle FCD$ vanjski ugao $\Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle FCE=\alpha+\beta$.

Posmatrajmo ΔECF i ΔEAG

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AGE \cong \sphericalangle CFE=\lambda\\ \sphericalangle GEA \cong \sphericalangle FEC=\omega \text{ (unakrsni uglovi)}\\ \sphericalangle EAG \cong \sphericalangle ECF=\alpha+\beta\end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \Delta EAG\sim\Delta ECF$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AG}{CF}=\frac{AE}{CE}$$

tj. $\dfrac{AG}{CF}\cdot\dfrac{CE}{AE}=1 \quad \ldots(*)$

Posmatrajmo ΔDAG i ΔBFD

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AGD \cong \sphericalangle BFD=\lambda\\ \sphericalangle GDA \cong \sphericalangle FDB \text{ (unakrsni)}\\ \sphericalangle DAG \cong \sphericalangle DBF=\beta\end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \Delta AGD\sim\Delta BFD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AG}{BF} \Rightarrow \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{AG}=1 \quad \ldots(**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow \dfrac{AD}{BD}\cdot\dfrac{BF}{CF}\cdot\dfrac{CE}{AE}=1$

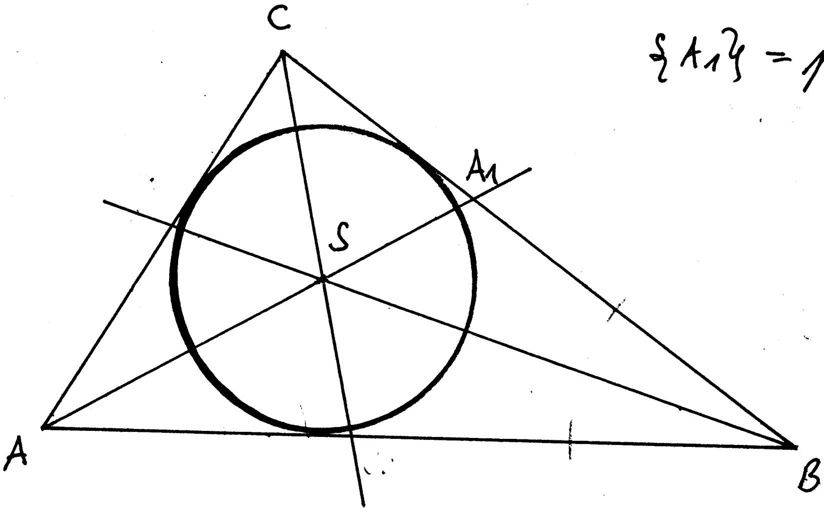
q.e.d.

(#) Neka je AA_1 simetrala ugla kod A trougla ΔABC a S centar upisane kružnice. Dokazati da je $AS : SA_1 = (AB + AC) : BC$

Rj.

Označimo sa S centar upisane kružnice trougla

$\{A_1\} = p(A,S) \cap BC$



Dokažimo da je

$$\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB+AC}{BC}.$$

$$\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB}{BA_1} \quad \ldots (*), \qquad \frac{AS}{SA_1} = \frac{AC}{CA_1} \quad \ldots (**), \qquad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC\frac{BA_1}{CA_1} \text{ i } AC = AB\frac{CA_1}{BA_1}$$

$$(*) + (**) \Rightarrow 2\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB}{BA_1} + \frac{AC}{CA_1} = \frac{AB \cdot \frac{BC}{BA_1} + AC \cdot \frac{BC}{CA_1}}{BC} =$$

$$= \frac{AB \cdot \frac{BA_1 + CA_1}{BA_1} + AC\frac{BA_1 + CA_1}{CA_1}}{BC} = \frac{AB\left(1 + \frac{CA_1}{BA_1}\right) + AC\left(1 + \frac{BA_1}{CA_1}\right)}{BC}$$

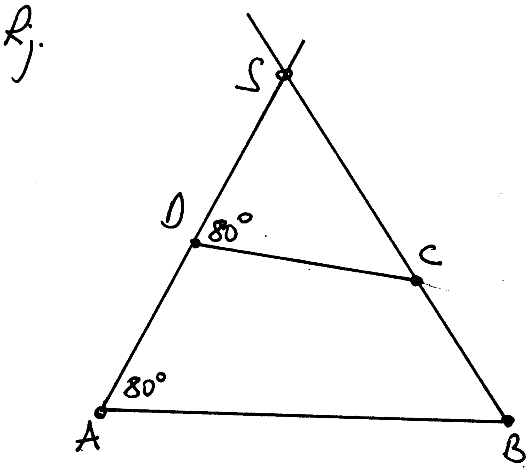
$$= \frac{AB + AC + AB\frac{CA_1}{BA_1} + AC\frac{BA_1}{CA_1}}{BC} = \frac{2AB + 2AC}{BC}$$

tj. $2\frac{AS}{SA_1} = 2\frac{AB+AC}{BC} \Rightarrow \frac{AS}{SA_1} = \frac{AB+AC}{BC}$

q.e.d.

3. Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SA : SD = SB : SC$ i $\sphericalangle BAD = 80^\circ$ izračunati $\sphericalangle ADC$.

Rj.



Kako je $SA : SD = SB : SC \overset{OTT}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$.

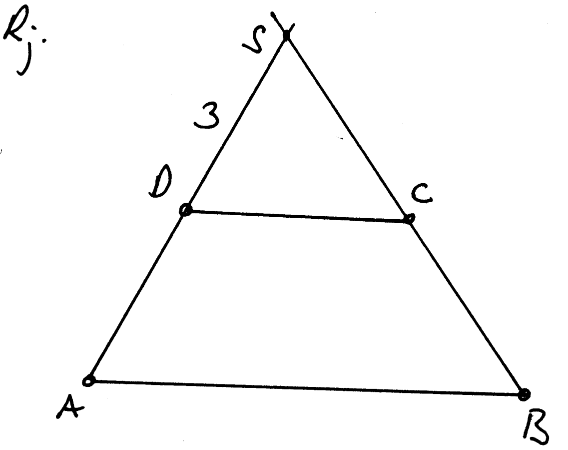
$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D)$ transferzala

$\Rightarrow \sphericalangle CDS = 80^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle ADC = 100^\circ$

4. Dat je trapez $\square ABCD$ kod koga se osnovice AB i CD odnose kao $2:1$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SD = 3$ cm izračunati AD.

Rj.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$$

$$p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{TT}{\Longrightarrow} \frac{SA}{SD} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$$

$SA = 2SD$

$SA = 6\text{ cm} \Rightarrow AD = 3\text{ cm}$

5. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a.b$.

Rj.

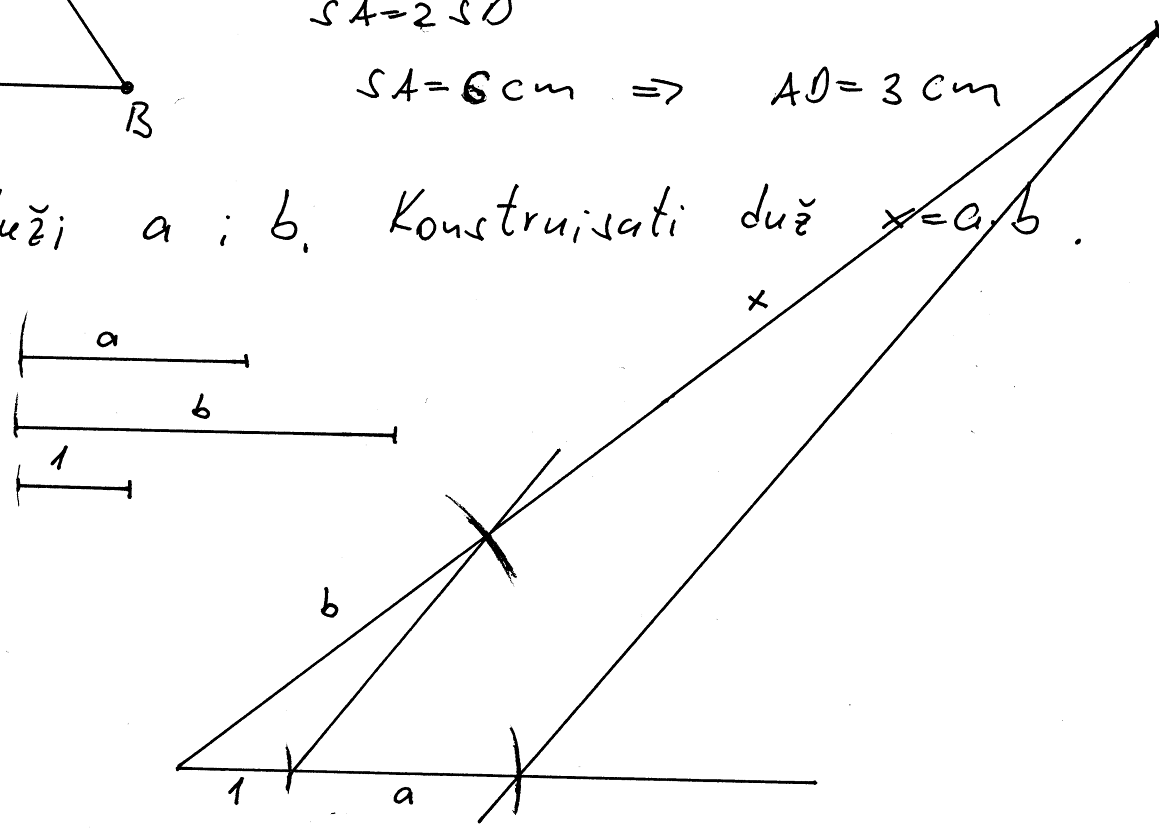
$x = a.b$

$\frac{x}{b} = a$

$\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$

$\frac{a}{1} = \frac{x}{b}$

$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$



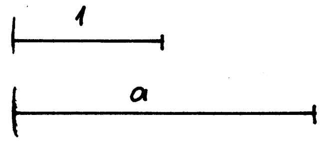
6. Data je duž a. Konstruisati duž $x=a^2$.

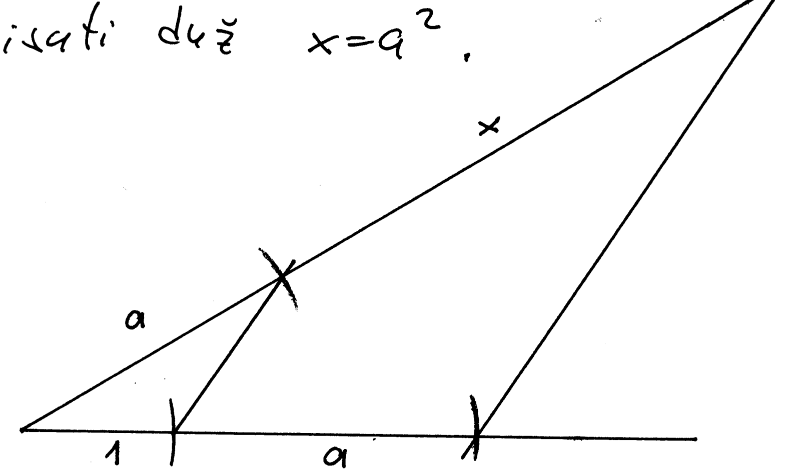
Rj. $x=a^2$

$x=a\cdot a$

$\frac{x}{a}=\frac{a}{1}$

$\frac{1}{a}=\frac{a}{x}$





7. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x=a^2+b^2$.

Up. $x=a^2+b^2$

$x=x_1+x_2$ gdje su $x_1=a^2$, $x_2=b^2$.

8. Date su duži a i b. Konstruisati duž x ako se zna da je $x:(b-a)=(b-a):(b+a)$.

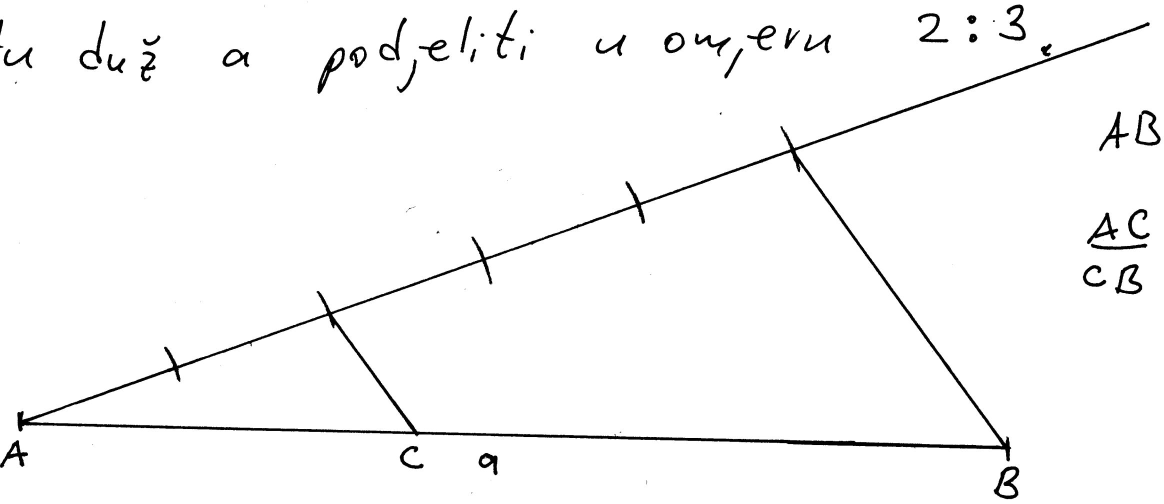
Uputa:

Ako stavimo $b-a=c$, $b+a=d$ imamo

$$\frac{x}{c}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c}=\frac{c}{x}.$$

9. Datu duž a podijeliti u omjeru 2:3.

Rj.

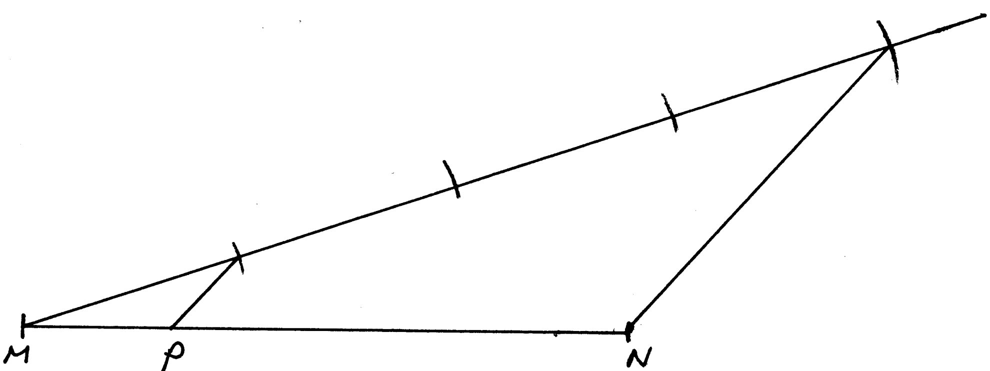


$AB=a$

$\frac{AC}{CB}=\frac{2}{3}$

10. Datu duž b podijeliti u omjeru 1:3.

Rj.



$MN=b$

$\frac{MP}{PN}=\frac{1}{3}$

11. Dati su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ čije su odgovarajuće stranice proporcionalne u omjeru $2:1$. Ako je $\measuredangle ABC = 80^\circ$ izračunati uglove $\measuredangle A'B'C'$ i $\measuredangle B'A'C'$.

Rj.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \xRightarrow{\text{sli\v{c}. SSS}} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

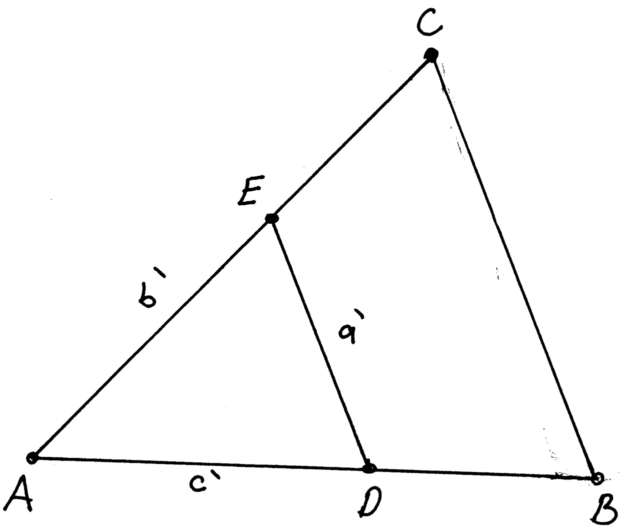
$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 80^\circ$$

Uglovi u trouglovima su podudarni, a kako ne znamo $\measuredangle BAC$ to ne možemo odrediti $\measuredangle B'A'C'$.

12. Na stranicama AB i AC trougla ΔABC uzete su tačke D i E takve da je $AD:DB = AE:EC = 3:2$. Ako je $P_{\Delta ADE} = 2\ cm^2$ odrediti $P_{\Delta ABC}$.

Rj.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{3} = \frac{BC}{DE}$$

(jasno je da $p(D,E) \parallel p(B,C)$)

$AD = \frac{3}{5} AB$, $AE = \frac{3}{5} AC$

i $DE = \frac{3}{5} BC$.

$$s' = \frac{AD + AE + DE}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3}{5} s$$

$$P_{\Delta ADE} = \sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}$$

$$P_{\Delta ADE} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 P_{\Delta ABC} \Rightarrow P_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{25}{9} = \frac{50}{9}\ cm^2$$

13. Na stranicama AB i AC trougla ΔABC uzete su tačke D i E takve da je $AD:DB = AE:EC = 4:3$. Ako je $O_{\Delta ADE} = 8$ cm odrediti $O_{\Delta ABC}$.

Rj. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{4}{3} \Rightarrow p(D,E) \parallel p(B,C) \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{7}{4} = \frac{BC}{ED}$

$AD = \frac{4}{7} AB$, $AE = \frac{4}{7} AC$, $DE = \frac{4}{7} BC$

$$O_{\Delta ADE} = a' + b' + c' = \frac{4}{7} O_{\Delta ABC} \Rightarrow O_{\Delta ABC} = \frac{7}{4} \cdot 8 = 14 \text{ cm}$$

Homotetija

$\mathcal{H}_{A,k}(M) \to M'$

Homotetija $\mathcal{H}_{A,k}$ (gdje je A centar homotetije, a k koeficijent homotetije) je transformacija ravni koja svakoj tački M u ravni pridružuje neku tačku M' tako da su tačke A, M i M' kolinearne pričemu:

a) za $k>0$ vrijedi poredak $A-M-M'$ ili $A-M'-M$ (M i M' su sa iste strane tačke A), $\dfrac{AM'}{AM} = k$.

b) za $k<0$ tačka A je između M i M'

$$\frac{AM'}{AM} = |-k|$$

(Udaljenost M' do A je $AM' = |k| \cdot AM$)

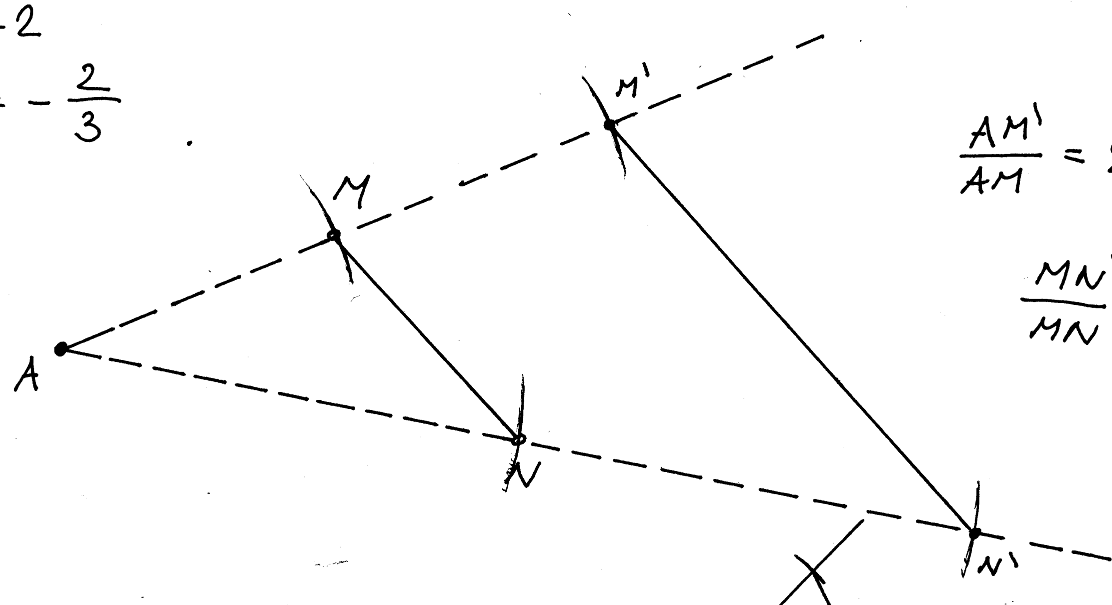
14. Data je tačka A i duž MN. Duž MN preslikati homotetično s centrom u tački A i koeficijentom

a) $k=2$

b) $k=-\dfrac{2}{3}$

Rj.

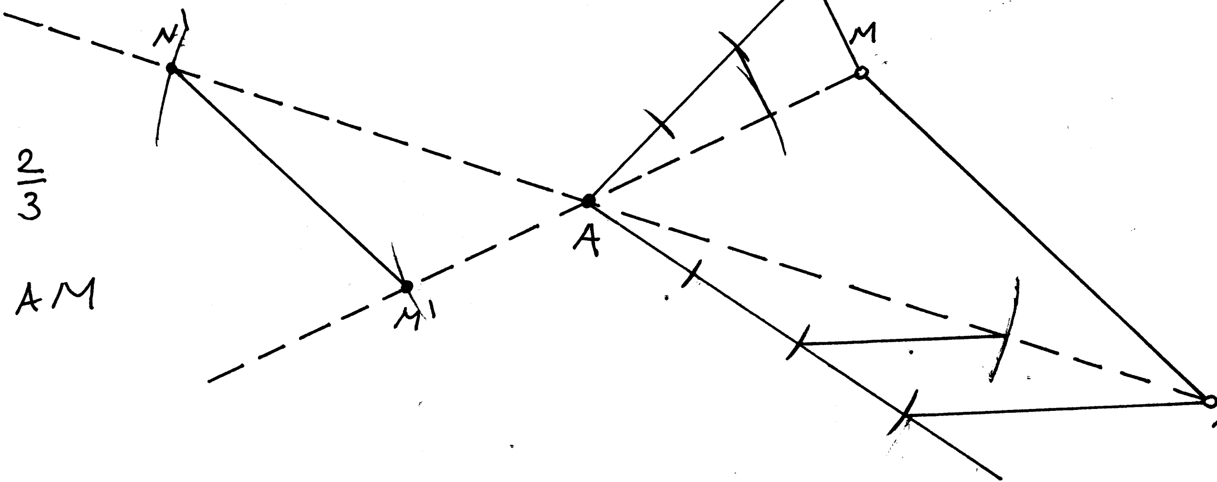
a)



$$\frac{AM'}{AM} = 2$$

$$\frac{M'N'}{MN} = 2$$

b)



$$\frac{AM'}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$AM' = \frac{2}{3} AM$$

Primjetite da:
homotetija sa koeficijentom -1 je centralna simetrija
homotetija sa koeficijentom 1 je identitet

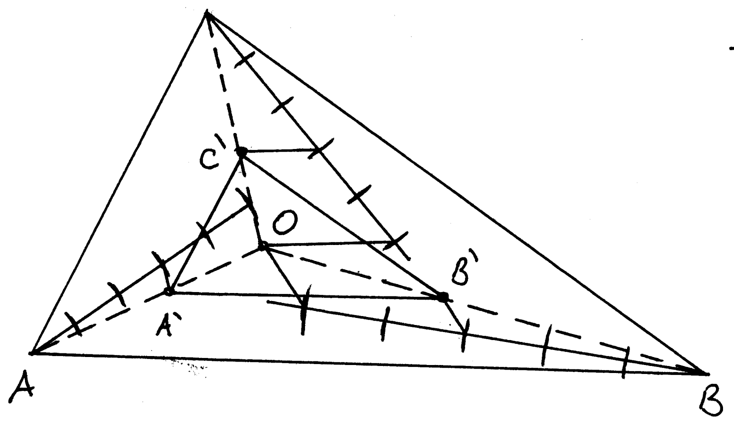
(15.) Dat je ΔABC i tačka O u unutrašnjosti trougla. Trougao preslikati homotetično sa centrom u tački O i koeficijentom

a) $k = \frac{2}{5}$

b)^v $k = \frac{1}{3}$.

Ako je $P_{\Delta ABC} = 56\ cm^2$ i $O_{\Delta ABC} = 30\ cm$ izračunati P i O novodobijenog trougla.

Rj. a)



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{2}{5}$$

Na osnovu 13 zadatka:

$$\frac{P_{\Delta A'B'C'}}{P_{\Delta ABC}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$P_{\Delta A'B'C'} = \frac{4}{25} \cdot 56 = \frac{224}{25}\ cm^2$$

Na osnovu 14 zadatka

$$\frac{O_{\Delta A'B'C'}}{O_{\Delta ABC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow O_{\Delta A'B'C'} = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12\ cm.$$

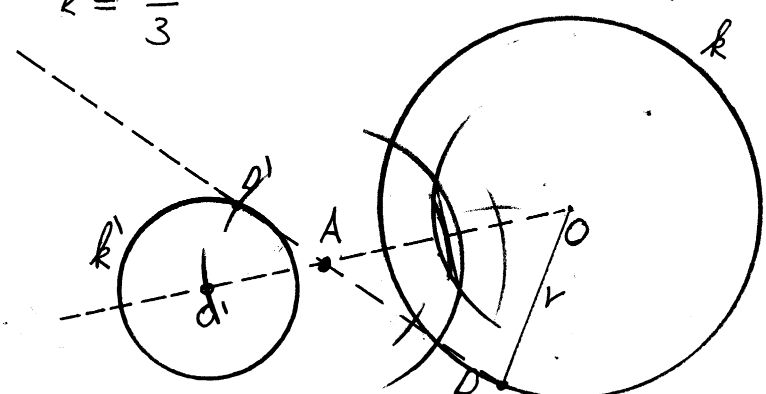
(16.) Data je kružnica k i tačka A. Preslikati datu kružnicu homotetično sa centrom u A i koeficijentom

a) $k = -\frac{1}{2}$

b)^v $k = \frac{2}{3}$

Odrediti omjer površina i obima kružnica.

Rj. a)



$O = 2r\pi$

$O' = 2r'\pi$

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{AO'}{AO} = \frac{r'}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{O'}{O} = |k|$$

$P = r^2\pi$

$P' = r'^2\pi$

$$\frac{P'}{P} = \frac{r^2\pi}{r'^2\pi}$$

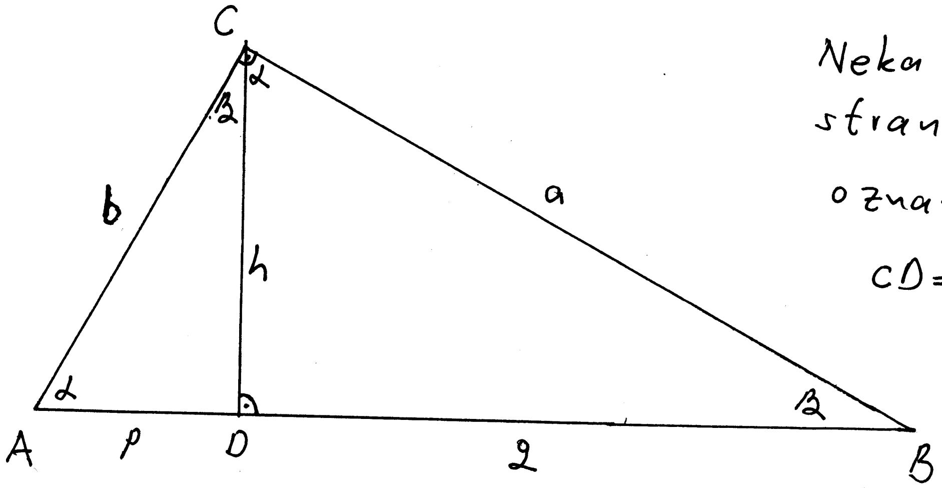
$$\frac{P'}{P} = |k|^2$$

Primjetite da:

- obimi homotetičnih figura se odnose kao $|k|$
- površine homotetičnih figura se odnose kao k^2
- izometrična preslikavanja (identitet, osna simetrija, centralna simetrija) čuvaju dužinu
- homotetija čuva uglove

17. U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\sphericalangle CAB=\alpha$ i $\sphericalangle ABC=\beta$.

$c=p+q$

U ΔADC, $\sphericalangle ADC=90^\circ$, $\sphericalangle CAD=\alpha \Rightarrow \sphericalangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\sphericalangle BDC=90^\circ$, $\sphericalangle DBC=\beta \Rightarrow \sphericalangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADC=90^\circ\\ \sphericalangle CAB=\sphericalangle CAD=\alpha\\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ACB=\sphericalangle CDB=90^\circ\\ \sphericalangle CAB=\sphericalangle BCD=\alpha\\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \ldots(2)$$

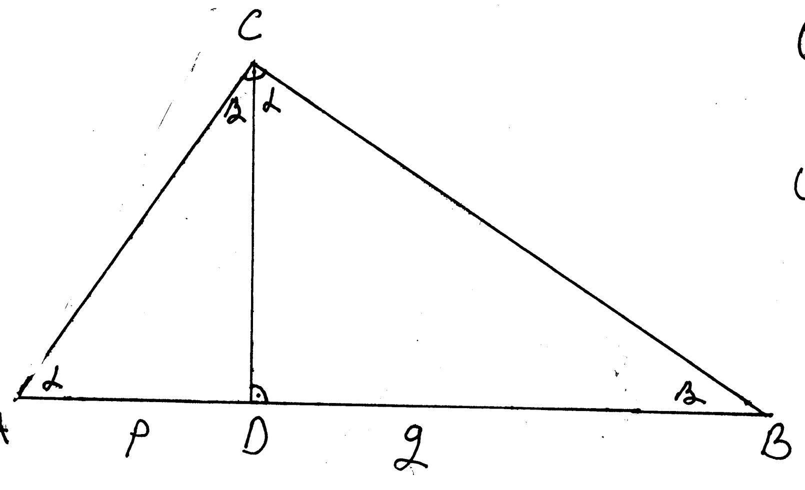
$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

18. U pravouglom trouglu ΔABC, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD=p$, $BD=q$ dokazati da je $CD=\sqrt{pq}$.

Rj.



Uvedimo oznake

$\measuredangle CAD=\alpha$; $\measuredangle ABC=\beta$

U ΔADC kako je

$\measuredangle DAC=\alpha$, $\measuredangle ADC=90^\circ$

$\Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

Slično $\measuredangle DCB=\alpha$.

$$\left.\begin{aligned}\measuredangle ADC&=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAD&=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle DCA&=\measuredangle DBC=\beta\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ADC \sim \Delta CDB$$

$$\Downarrow$$

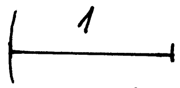
$$\frac{CD}{q}=\frac{p}{CD} \Rightarrow CD^2=pq$$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{pq}$$

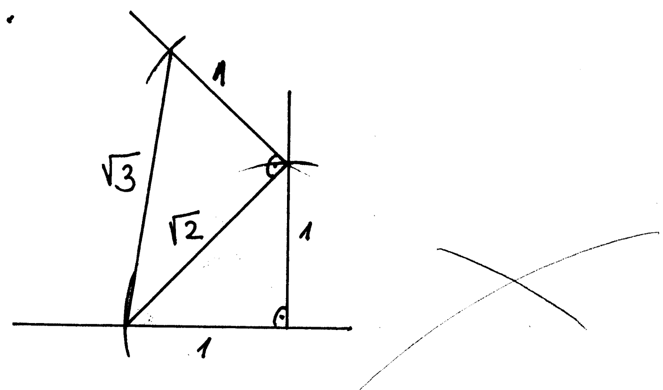
q.e.d.

19. Konstruisati duž $\sqrt{3}$.

Rj.

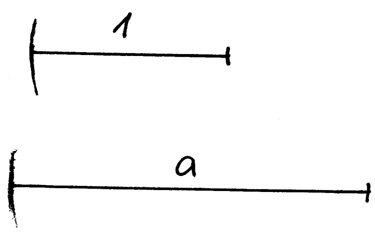


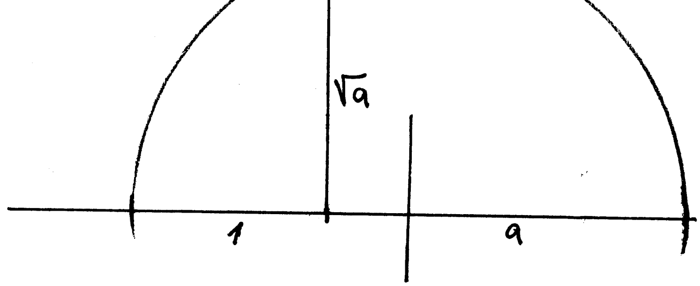
jedinična duž



20. Data je duž a. Konstruisati duž $\sqrt{a}$.

Rj.





21. Konstruisati duž $x = \frac{\sqrt{ab}}{a}$, ako su a i b date duži.

Rj.

$$x = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

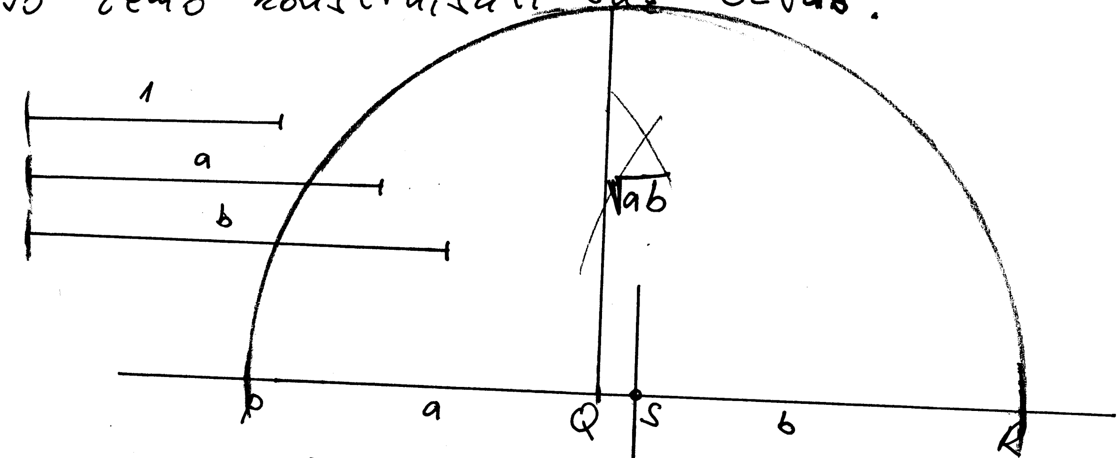
$$c = \sqrt{ab}$$

$$x = \frac{c}{a}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{c}{a}$$

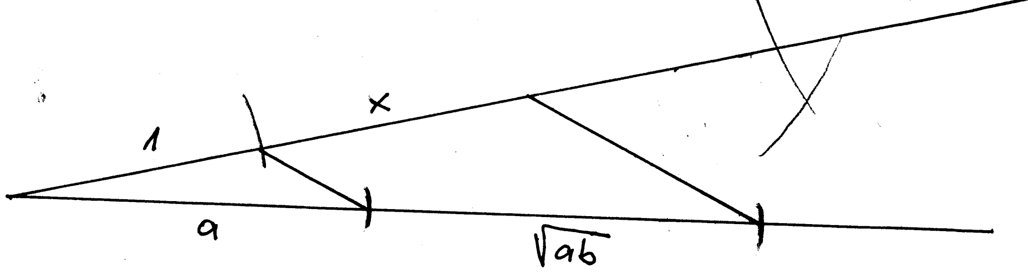
$$\frac{a}{c} = \frac{1}{x}$$

Prvo ćemo konstruisati duž $c = \sqrt{ab}$.



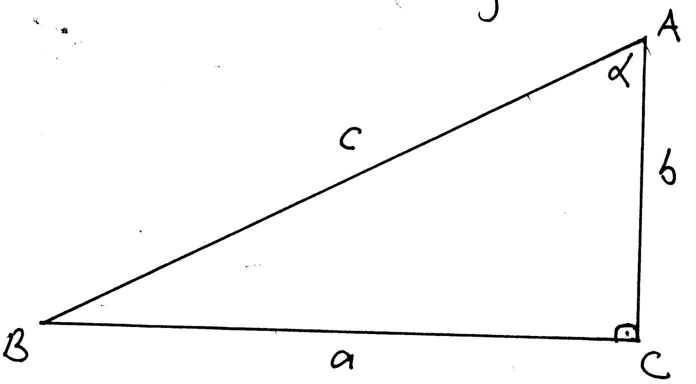
$PQ = a$
$QR = b$

S - centar kružnice



Trigonometrija

U pravouglom trouglu ΔABC sa kracima a, b, hipotenuzom c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$ definišemo



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$$

22. (Kosinusna teorema)

Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Rj. Sa $CD = h$ označimo visinu spuštenu na stranicu $AB = c$.
Označimo sa p duž AD a sa q duž DB.