7 Elementarni zadaci: Kocka i piramida

Elementarna pitanja:

1. Kako glasi formula za računanje površine kocke? $[6a^2]$
2. Kako glasi formula za računanje zapremine kocke? $[a^3]$
3. Kako glasi formula za računanje površine piramide? $[P_{omotaca} + P_{baze}]$
4. Kako glasi formula za računanje zapremine piramide? $[\frac{1}{3}P_{baze} \cdot H]$
5. Kako glasi formula za računanje površine tetraedra? $[4\frac{a^2\sqrt{3}}{4}]$
6. Kako glasi formula za računanje zapremine tetraedra? $[\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}]$

1. Iz predmeta oblika kocke istesan je pravilan tetraedar tako da su ivice (bridovi) tetraedra ujedno dijagonale strana kocke. Odrediti:
(a) Koliko je puta smanjena površina tijela?
(b) Koliko je puta smanjena zapremina tijela?

2. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tačke M i N su središta ivica AB i BC. Kako se odnose:
(a) zapremine;
(b) površine;
kocke i piramide $MBNB_1$?

3. Neka je $SABCD$ pravilna usparavna četverostran a piramida (S - vrh piramide) čija je zapremina $V = 36\,\text{cm}^3$. Ako je tačka O centar osnove (baze) $ABCD$ date piramide, tačka F središte ivice CD i $\{E\} = AF \cap BD$, izračunati zaprennnu piramide $SOEFC$.

4. Ivica jednakoivične četverostrane piramide $SABCD$ je a. Tačke A_1, B_1, C_1, D_1 su središta bočnih ivica redom a tačka O je podnožje visine piramide. Izračunaj površinu i zapreminu tijela $OA_1B_1C_1D_1S$.

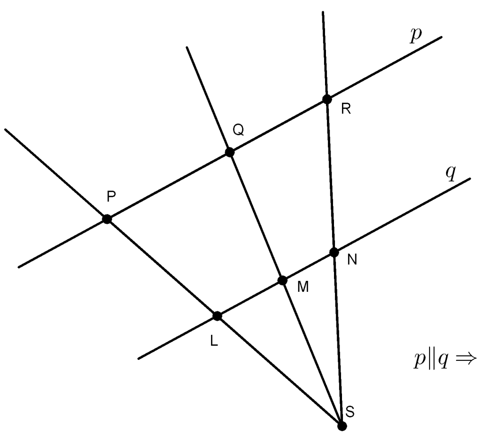
5. Ivice AB, AC i AD trostrane uspravne piramide su međusobno normalne. Izračunati zapreminu piramide ako su površine strana ABC, ACD i ADB redom jednake $12\,\text{cm}^2$, $16\,\text{cm}^2$ i $24\,\text{cm}^2$.

6. Kocka ivice a presječena je jednom ravni koja sadrži dijagonalu jedne strane kocke i središta dviju ivica suprotne strane. Izračunati površinu tog presjeka.

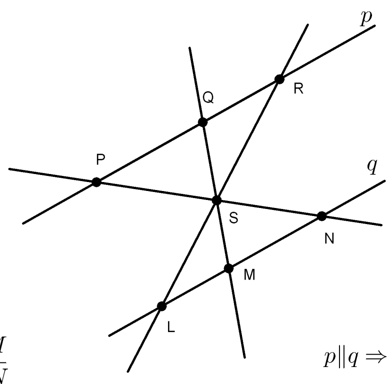
7. Bočna strana pravilne trostrane piramide je nagnuta prema bazi piramide pod uglom od $60°$. Težište baze je udaljeno od bočne strane $3\,\text{cm}$. Naći površinu i zapreminu piramide.

Sličnost trouglova i Talesova teorema (nastavak)

Neke posljedice stavova o sličnosti trouglova:



$$p \| q \Rightarrow \frac{PQ}{QR} = \frac{LM}{MN}$$



$$p \| q \Rightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{PR}{LN}$$

8. U pravougaoniku $\square ABCD$ tačka M je sredina stranice AD, a N je sredina strane BC. Neka je $\{Q\} = p(P, M) \cap p(A, C)$. Dokazati da je $\measuredangle QNM = \measuredangle MNP$, gdje je P proizvoljna tačka na pravoj $p(C, D)$ takva da je $C - D - P$.

9. U trougao $\triangle ABC$ upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

10. Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom prave p i q u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave dokazati da je $\frac{SP}{SQ} = \frac{SP'}{SQ'}$, $\frac{SP'}{PP'} = \frac{SQ'}{QQ'}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{SQ}{QQ'}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{SP}{PQ}$.

11. Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SA : SD = SB : SC$ i $\measuredangle BAD = 80^\circ$ izračunati $\measuredangle ADC$.

12. Dat je trapez $\square ABCD$ kod koga se osnovice AB i CD odnose kao 2:1. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SD = 3\,\mathrm{cm}$ izračunati AD.

13. **(Menelaus-ova teorema)** Neka je dat trougao $\triangle ABC$ i neka prava p siječe stranice trougla AB, BC i AC (po potrebi produžiti stranice) redom u tačkama D, E i F. Tada je $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$. Dokazati.

14. Neka je AA_1 simetrala ugla kod A trougla $\triangle ABC$, a I centar upisane kružnice. Dokazati da je $AI : IA_1 = (AB + AC) : BC$.

Konstrukcija duži i Homotetija

15. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a \cdot b$.

16. Data je duž a. Konstruisati duž $x = a^2$.

17. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a^2 + b^2$.

18. Date su duži a i b. konstruisati duž x ako se zna da je $x : (b - a) = (2b - a) : (b + a)$.

19. Datu duž a podjeliti u omjeru 2:3.

20. Datu duž b podjeliti u omjeru 1:3.

21. Dati su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ čije su odgovarajuće stranice proporcionalne u omjeru 2:1. Ako je $\measuredangle ABC = 80^\circ$ izračunati uglove $\measuredangle A'B'C'$ i $\measuredangle B'A'C'$.

22. Na stranicama AB i AC trougla $\triangle ABC$ uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 2 : 3$. Ako je $P_{\triangle ADE} = 2\,cm^2$ odrediti $P_{\triangle ABC}$.

23. Na stranicama AB i AC trougla $\triangle ABC$ uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 4 : 3$. Ako je $O_{\triangle ADE} = 8\,cm$ odrediti $O_{\triangle ABC}$

24. Data je tačka A i duž MN. Duž MN preslikati homotetično s centrom u tački A i koeficijentom

(a) $k = 2$

(b) $k = -\frac{2}{3}$

25. Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačka O u unutrašnjosti trougla. Trougao preslikati homotetično sa centrom u tački O i koeficijentom

(a) $k = \frac{2}{5}$

(b) $k = \frac{1}{3}$

Ako je $P_{\triangle ABC} = 56\,cm^2$ i $O_{\triangle ABC} = 30\,cm$ izračunati P i O novodobijenog trougla.

26. Data je kružnica k i tačka A. Preslikati datu kružnicu homotetično sa centrom u A i koeficijentom

(a) $k = -\frac{1}{2}$

(b) $k = \frac{2}{3}$

Odrediti omjer površina i obima kružnica.

27. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

28. U pravoulom trouglu $\triangle ABC$, duž CD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

29. Konstruisati duž $\sqrt{3}$.

30. Data je duž a. Konstruisati duž $\sqrt{a}$.

31. Konstruisati duž $x = \frac{\sqrt{ab}}{a}$, ako su a i b date duži.