6 Elementarni zadaci: Osnovni konstruktivni zadaci.

Elementarna pitanja:

1. Četverougao je tetivni akko...
2. Kako glasi prvi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (zbir dva naspremna ugla...).
3. Kako glasi drugi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (uglovi koji gledaju na...).
4. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (... $SA \cdot SC = SB \cdot SD$).

1. Data je prava p, tačka A i oštar ugao α. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku A ($A \notin p$) i siječe datu pravu p pod uglom α.

2. Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno.)

3. Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B i C datog trougla.

4. Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

5. Konstruisati pravougli trougao $\triangle ABC$ ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuzi c.

6. Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8\,cm$, $BC = 6\,cm$, $CD = 5\,cm$ i $AD = 7\,cm$. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

Sličnost trouglova i Talesova teorema

Definicija sličnosti trouglova

Dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su slična ako su im sva tri ugla redom podudarna i ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne tj. $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. ♢

Stav 1 (slič. UUU)

Ako u dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imamo sva tri ugla redom podudarna tada su ta dva trougla slična. ♢

Stav 2 (slič. SSS)

Ako u trouglovima $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imamo tri stranice redom proporcionalne tada su ta dva trougla slična. ♢

Stav 3 (slič. SUS)

Ako dva trougla imaju dvije stranice proporcionalne i podudaran ugao između njih tada su ta dva trougla slična. ♢

Stav 4 (slič. SSU)

Ako dva trougla imaju dvije stranice proporcionalne i podudaran ugao nasprem veće stranice tada su ta dva trougla slična. ♢

7. U trouglu $\triangle ABC$ date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B', C') || p(B, C)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom.

8. U trouglu $\triangle ABC$ date su dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AF}$. Dokazati da je tada $p(E, F) || p(B, C)$.

9. U pravoulom trouglu $\triangle ABC$, duž CD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

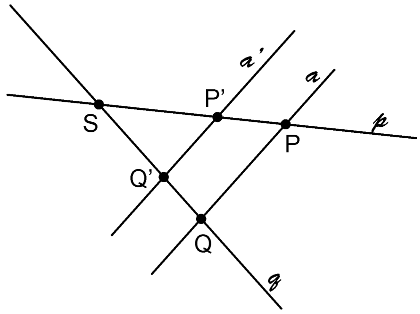
10. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

11. Neka su AC i BD dvije duži koje se sijeku u tački S. Dokazati da je četverougao $ABCD$ tetivni akko je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

Posljedica zadatka: Potreban i dovoljan uslov da četverougao bude tetivni je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

Talesova teorema

Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i q u tačkama P, Q i P' i Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi
$\dfrac{SP}{SP'} = \dfrac{SQ}{SQ'} = \dfrac{PQ}{P'Q'}$. ◊



Posljedice Talesova teorema

$$\frac{SP'}{SQ'} = \frac{SP}{SQ}, \qquad \frac{SP}{P'P} = \frac{SQ}{Q'Q}, \qquad \frac{SP'}{P'P} = \frac{SQ'}{Q'Q}, \qquad \frac{SP}{PQ} = \frac{SP'}{P'Q'}$$

Obrat Talesove teoreme

$$\frac{SP}{SP'} = \frac{SQ}{SQ'} = \frac{PQ}{P'Q'} \quad \Rightarrow \quad a \| a'.$$

12. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je $\triangle PAI$ jkk, da važi poredak $P - M - S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $pp[P,S)$ i kruga k dokazati da je $\triangle AMP \sim \triangle NAP$ i da je $\triangle PIN \sim \triangle PMI$.

13. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da je $C_1D = \frac{1}{2}h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

14. Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da je $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

15. Neka je S tačka izvan kruga, prava $p(S,T)$ tangenta na krug u tački T i neka prava SCD siječe krug u tačkama C i D. Dokazati da je $ST^2 = SC \cdot SD$.
Napomena: Proizvod $SC \cdot SD$, gdje je tačka S unutar ili izvan kružnice i prava SCD siječe krug u tačkama C i D, zovemo stepen ili potencija tačke S u odnosu na datu kružnicu.

16. U četverouglu $\square ABCD$ dijagonale se sijeku u tački S. Ako je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$, $\measuredangle ABD = 60°$ i $\measuredangle DAC = 50°$ odrediti ugao $\measuredangle ADC$.

17. Neka je S centar kružnice opisane oko trougla ABC, M tačka takva da je $M - A - B$. Ako je $MA \cdot MB = MC^2$, odrediti $\measuredangle SCM$.

18. Dokazati da težišnica trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

19. Dokazati da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu trougla u omjeru druge dvije stranice.

20. Neka je C proizvoljna tačka kružnice k, a B tačka na prečniku AA_1 kružnice takva da je $AC = BA_1$. Dokazati da se u trouglu $\triangle ABC$ simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku u istoj tački.

21. Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

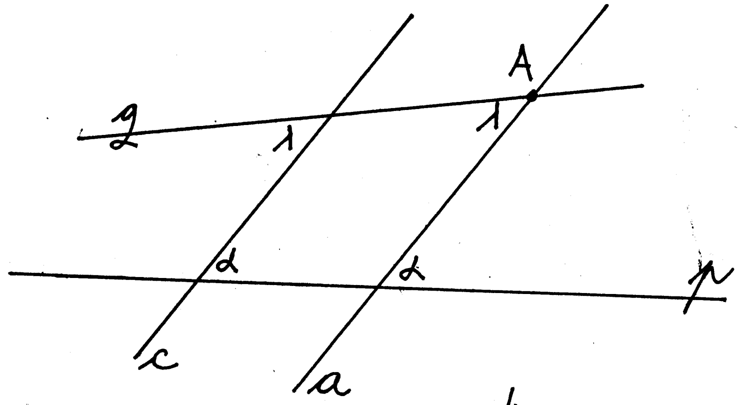
22. Dokazati da je rastojanje proizvoljne tačke kružnice od njene tetive jednako geometriskoj sredini rastojanja od te tačke do tangenti u krajnjim tačkama iste tetive.

Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (van date prave) i siječe datu pravu pod datim uglom.

Rj.

Analiza

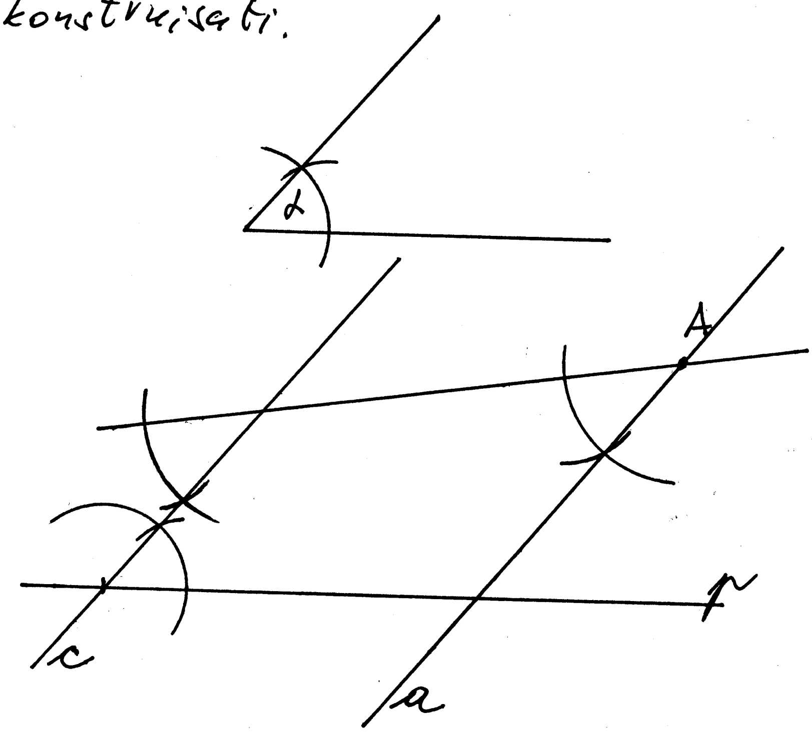
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku $A \in p$, i siječe pravu p pod uglom α.
Neka je c proizvoljna prava koja siječe pravu p pod uglom α. Primjetimo da je $a \parallel c$.



Ako sa g označimo proizvoljnu pravu koja siječe prave a i c i koja sadrži tačku A, dobićemo jednake uglove λ na transferzali, pa pravu a sad nije teško konstruisati.

Konstrukcija

1. p, $A \notin p$, α
2. proizvoljnu pravu c takvu da siječe pravu p pod uglom α
3. proizvoljnu pravu g takvu da siječe prav da sadrži tačku A.
4. pravu a: $A \in a$ i $a \parallel c$



Dokaz

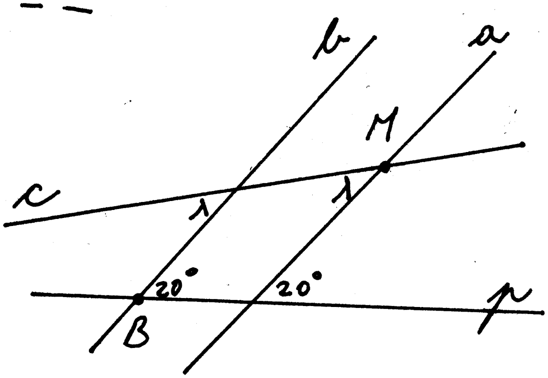
Da dobijena prava prolazi kroz datu tačku i da siječe datu pravu pod datim uglom slijedi iz konstrukcije i osobina podudarnosti uglova na transferzali

Diskusija

Jedinstvenost rješenja slijedi iz 5 Euklidovog aksioma.

(#) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od 20°. (Ugao od 20° konstruisati približno tačno).

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku M i siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je B proizvoljna tačka na pravoj p. Kroz tačku B nije teško konstruisati pravu b koja siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku M i siječe pravu b.

Primjetimo da su prave a i b paralelne i da je c transferzala pa imamo dva ugla λ na pravoj c.

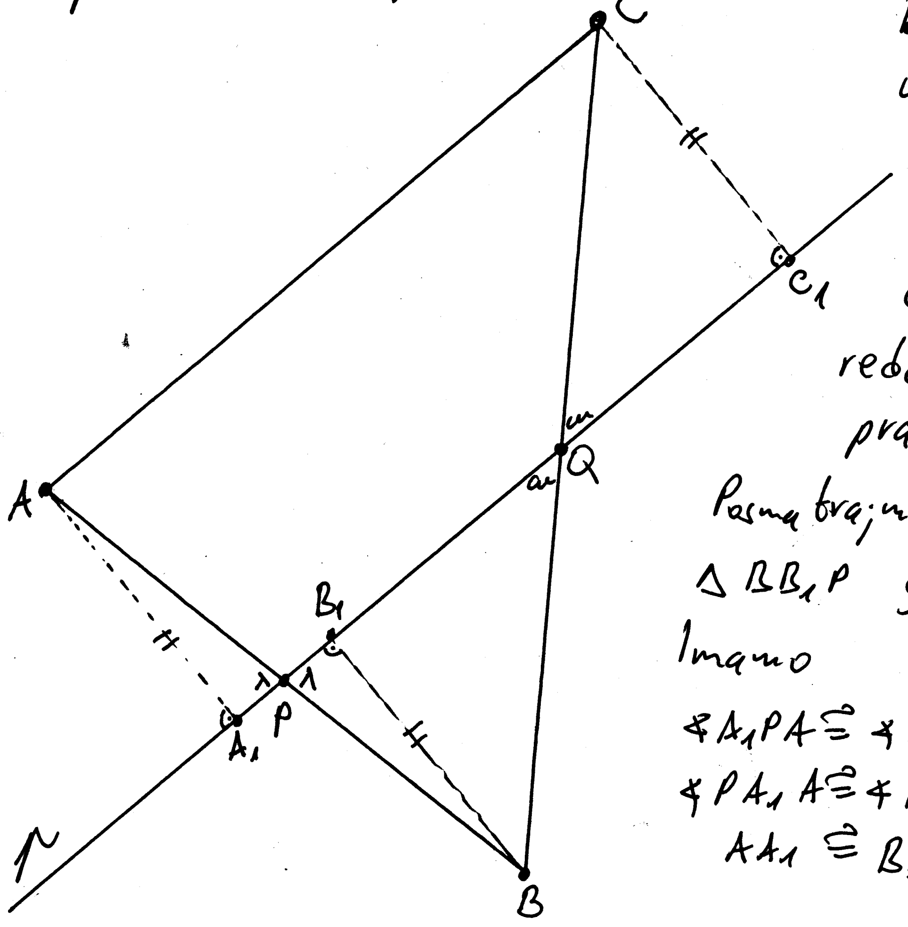
Prema tome, B je proizvoljna tačka pa pravu b možemo konstruisati, c je proizvoljna prava kroz tačku M pa i traženu pravu a možemo konstruisati.

(#) Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B, C datog trougla.

Rj.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je p tražena prava koja je podjednako udaljena od vrhova A, B i C trougla ΔABC, i neka je poredak tački kao na slici. Označimo sa A_1, B_1 i C_1 ortogonalne projekcije redom tački A, B i C na pravu p.



Posmatrajmo trouglove ΔAA_1P i ΔBB_1P gdje je $\{P\} = p \cap AB$.

Imamo

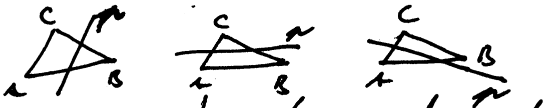
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle A_1PA \cong \measuredangle B_1PB = \lambda \\ \measuredangle PA_1A \cong \measuredangle PB_1B = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P \Rightarrow AP \cong BP$$

Slično, posmatrajmo ΔB_1BQ i ΔC_1CQ (gdje je $\{Q\} = p \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle B_1QB \cong \measuredangle C_1QC = \omega \\ \measuredangle BB_1Q \cong \measuredangle CC_1Q = 90^\circ \\ BB_1 \cong CC_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta BB_1Q \cong \Delta CC_1Q \Rightarrow BQ \cong CQ.$$

Prema tome možemo primjetiti da prava p prolazi kroz središte stranica AB i BC pa je možemo konstruisati.

<u>Diskusija</u>

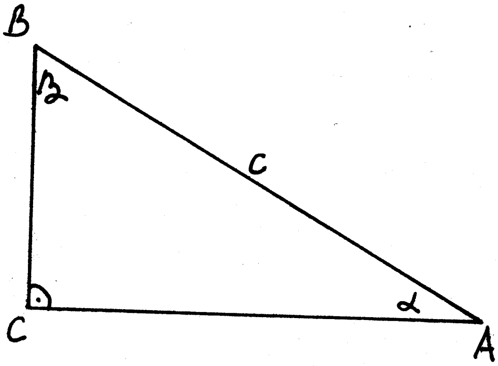


Zadatak ima tri rješenja, tj. možemo konstruisati tri različite prave koje su jednako udaljene od vrhova A, B i C datog trougla

(#) Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

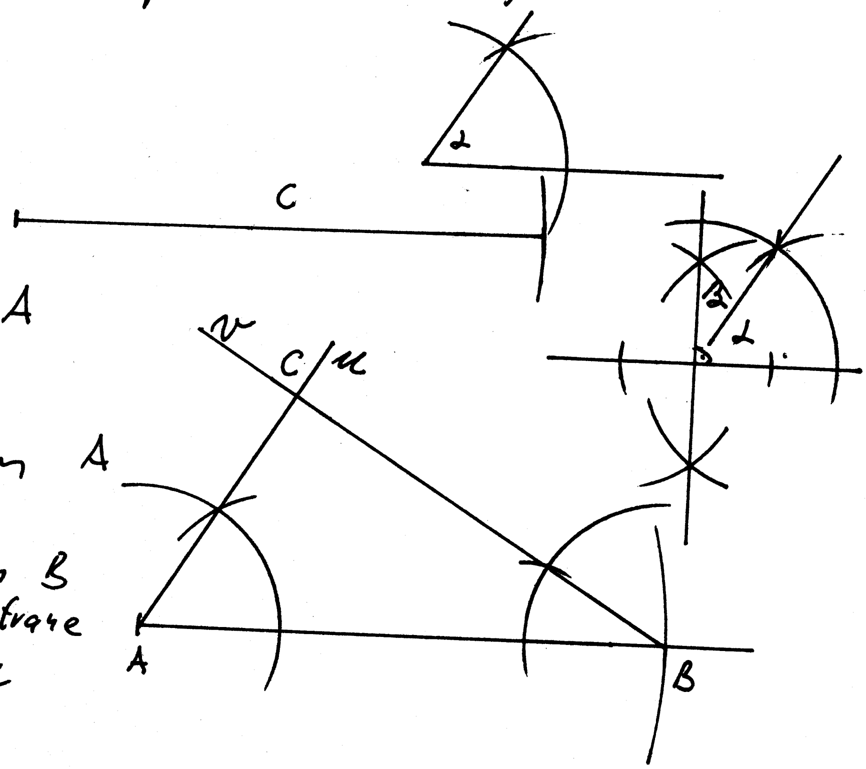
R: **Analiza**

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC pravougli trougao koji ima dat ugao α i dužinu hipotenuze c. U trouglu su poznata dva ugla (90° i α) pa možemo izračunati ugao β po formuli $\beta = 90^\circ - \alpha$. $(\alpha+\beta+90^\circ=180^\circ)$ Kako imamo hipotenuzu c i dva nalegla ugla na njoj, pomoću pravila USU nije teško konstruisati traženi trougao



Konstrukcija

1. α, c $(\alpha < 90^\circ)$
2. $\beta = 90^\circ - \alpha$
3. pp p sa početnom tačkom A
4. $k(A, c) \cap p = \{B\}$
5. pp u sa početnom tačkom A takvu da je $\measuredangle BAu = \alpha$
6. pp v sa početnom tačkom B koja se nalazi sa iste strane $p(A,B)$ sa koje je i pp u takva da je $\measuredangle AB\vec{v} = \beta$
7. $u \cap v = \{C\}$
8. ΔABC



Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu hipotenuze c jednaku dužini date duži slijedi iz Analize i Konstrukcije.

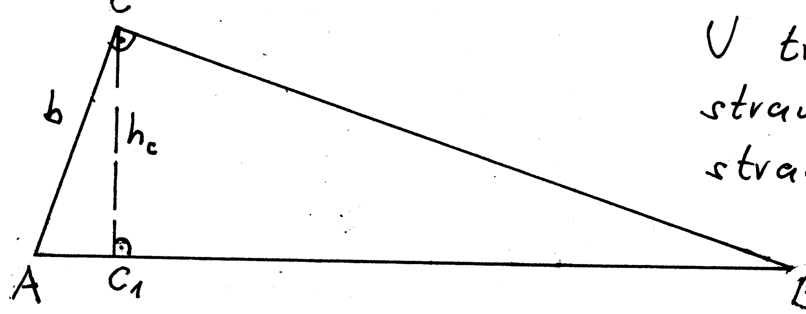
Diskusija

Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

(#) Konstruisati pravougli trougao ΔABC ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuzi c.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data kateta b, visina h_c i neka je ΔABC traženi pravougli trougao.

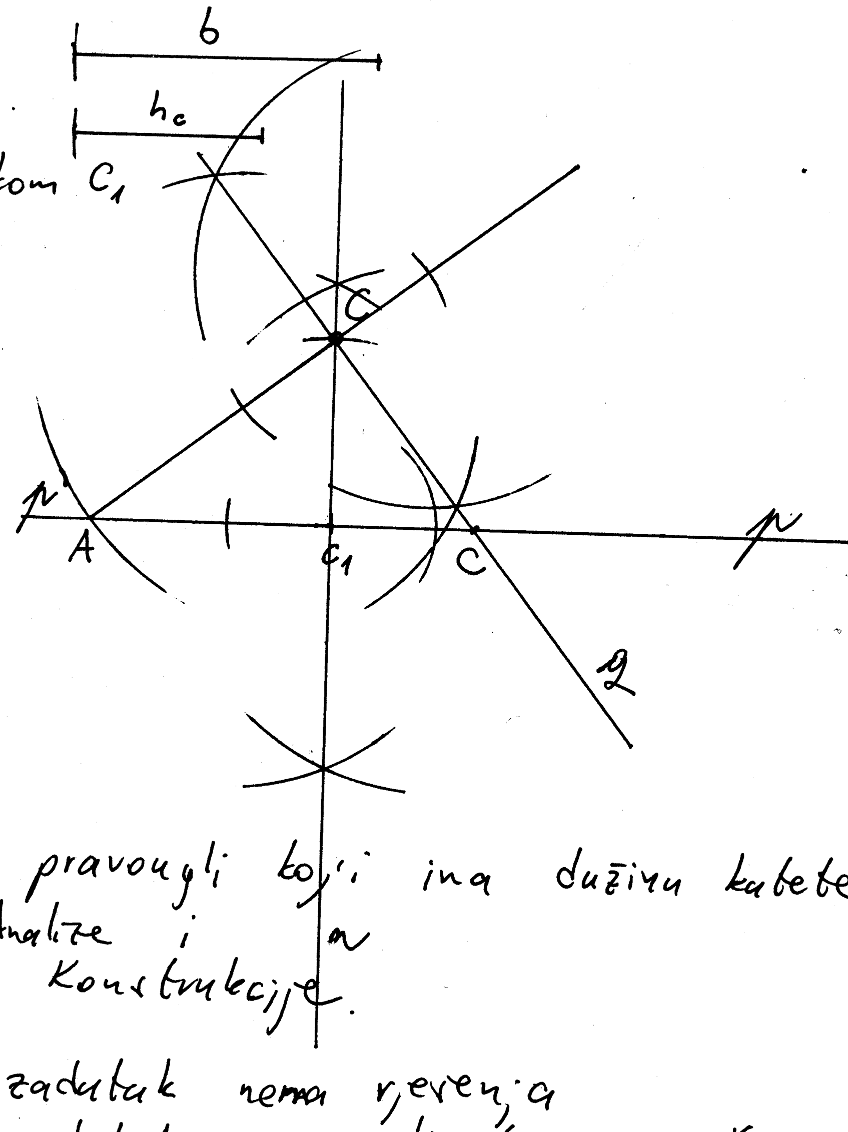


$CC_1 = h_c$

U trouglu ΔAC_1C imamo dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati. Kako je poznato da je ugao $\measuredangle ACB = 90°$ to ćemo tačku B dobiti na presjeku $p(A, C_1)$ i prave koja sadrži C i okomita je na $p(A, C)$. Pa ΔABC možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. b, h_c
2. polupravu p' sa početnom tačkom C_1
3. n, $n \ni C_1$ i $n \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. pravu p, $p \supseteq p'$
7. pravu q, $q \ni C$ i $q \perp p(A,C)$
8. $p \cap q = \{C\}$
9. ΔABC



Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu katete b i visinu h_c slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Za slučaj kad je $b \leq h_c$ zadatak nema rješenja

Za slučaj kad je $b > h_c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

(7) Konstruisati četverougao □ABCD ako su date dužine njegovih stranica AB = 8 cm, BC = 6 cm, CD = 5 cm i AD = 7 cm. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

Rj. Kako ne znamo ni jedan ugao u četverouglu i znam samo stranice četverougla, četverougao ne možemo konstruisati.

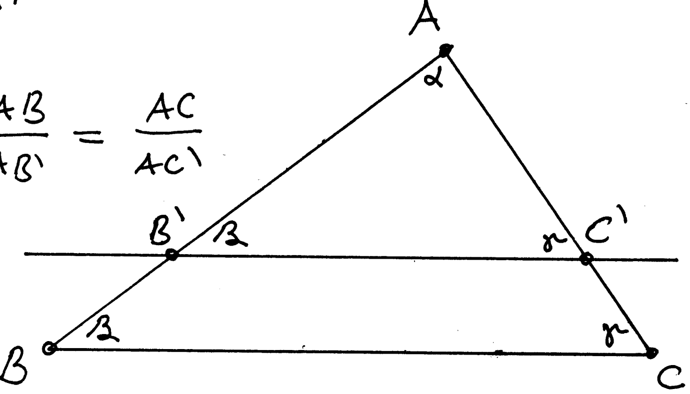
U četverougao se može upisati krug

$$AB + CD = BC + AD$$ (četverougao je tangentni)

(#) U trouglu ΔABC date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B',C') \parallel p(A,B)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom. Dokazati i obrnuto, ako su date dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$ tada je $p(E,F) \parallel p(B,C)$.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ B' \in AB,\ C' \in AC \\ p(B',C') \parallel p(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$



$p(B,C) \parallel p(B',C')$ i $p(B,A)$ je transferzala $\Rightarrow \measuredangle CBA \cong \measuredangle C'B'A = \beta$

$p(B,C) \parallel p(B',C')$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A = \gamma$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ABC \cong \measuredangle AB'C' = \beta \\ \measuredangle BCA \cong \measuredangle B'C'A = \gamma \\ \measuredangle BAC \cong \measuredangle B'AC' = \alpha \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta AB'C'$$

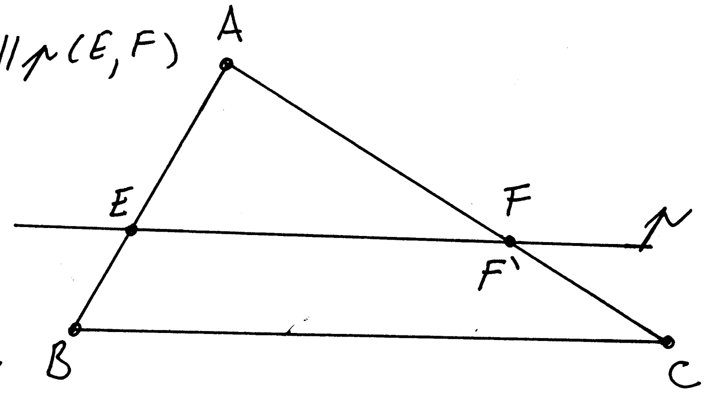
$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

q.e.d.

obrnuto:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ E \in AB,\ F \in AC \\ \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \end{array}\right\} \Rightarrow p(B,C) \parallel p(E,F)$$



Kroz tačku E povucimo pravu p tako da je $p \parallel p(B,C)$.
Neka je $p \cap AC = \{F'\}$.
Na osnovu prethodnog dijela dokaza imamo

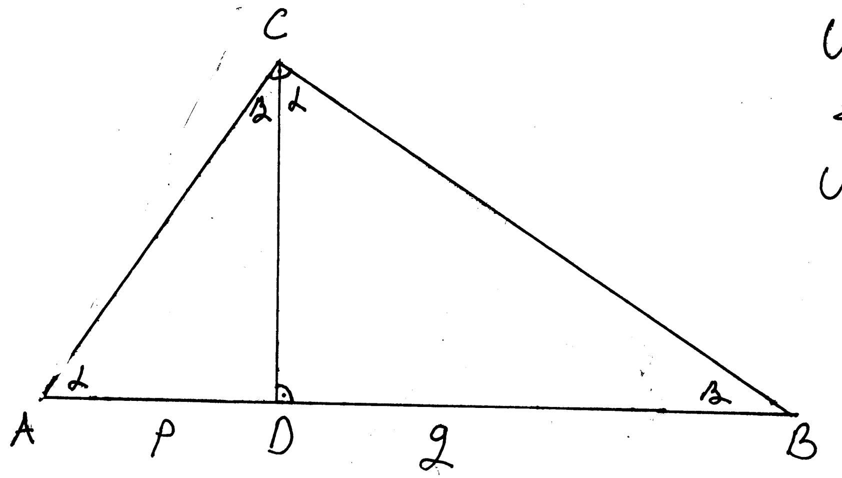
$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF'}$. Kako je još $F \in AC$, $F' \in AC$ i $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$

$\Rightarrow F' \equiv F$ pa $p(E,F) \parallel p(B,C)$

q.e.d.

U pravouglom trouglu ΔABC, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

Rj.



Uvedimo oznake

$\measuredangle CAD = \alpha$; $\measuredangle ABC = \beta$

U ΔADC kako je

$\measuredangle DAC = \alpha$, $\measuredangle ADC = 90^\circ$

$\Rightarrow \measuredangle ACD = \beta$

Slično $\measuredangle DCB = \alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ADC = \measuredangle CDB = 90^\circ \\ \measuredangle CAD = \measuredangle BCD = \alpha \\ \measuredangle DCA = \measuredangle DBC = \beta \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ADC \sim \Delta CDB$$

$$\Downarrow$$

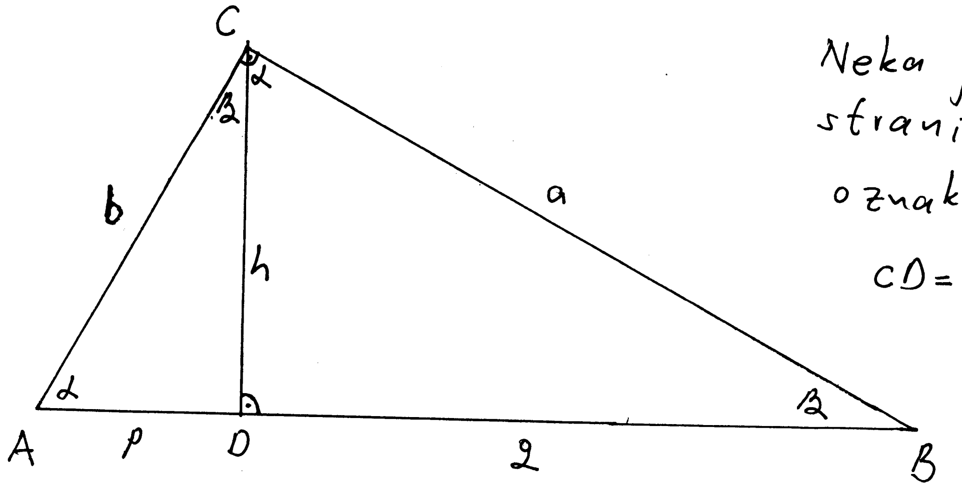
$$\frac{CD}{q} = \frac{p}{CD} \Rightarrow CD^2 = pq$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{pq}$$

q.e.d.

(#) U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\measuredangle CAB=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

$c=p+q$

U ΔADC, $\measuredangle ADC=90^\circ$, $\measuredangle CAD=\alpha \Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\measuredangle BDC=90^\circ$, $\measuredangle DBC=\beta \Rightarrow \measuredangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle ADC=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle CAD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \ldots(2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

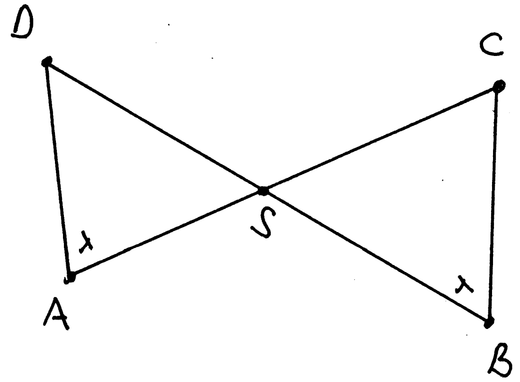
$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

\# Neka su AC i BD dvije duži koje se sijeku u tački S. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ tetivni akko je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

Rj. potreban uslov

„$\Leftarrow$": Pretpostavimo da je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$ i dokažimo da je četverougao $\square ABCD$ tetivni.



$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ASD = \sphericalangle CSB \\ \dfrac{SA}{SD} = \dfrac{SB}{SD} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{sličnost SUS}}$$

$$\Rightarrow \triangle ASD \sim \triangle BSC$$

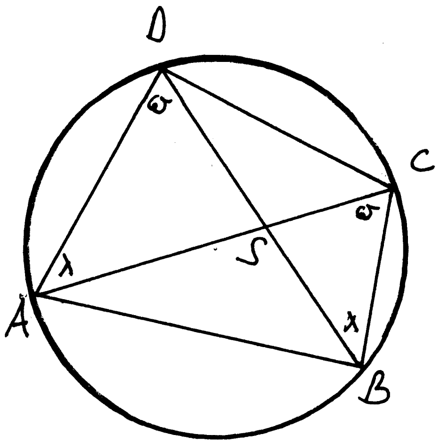
$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle DAS \cong \sphericalangle CBS = \lambda$$

i kako ova dva ugla gledaju na zajedničku stranicu $\Rightarrow \square ABCD$ je tetivni četverougao.

dovoljan uslov

„$\Rightarrow$": Pretpostavimo da je četverougao $\square ABCD$ tetivni. Dokažimo da vrijedi $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.



$$\left.\begin{array}{ll} \sphericalangle DAS \cong \sphericalangle CBS = \lambda & \text{(nad tetivom } CD) \\ \sphericalangle ASD \cong \sphericalangle CSB & \text{(unakrsni uglovi)} \\ \sphericalangle ADS \cong \sphericalangle BCS = \omega & \text{(nad tetivom } AB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{sličnost UUU}} \triangle ASD \sim \triangle BSC$$

$$\Downarrow$$

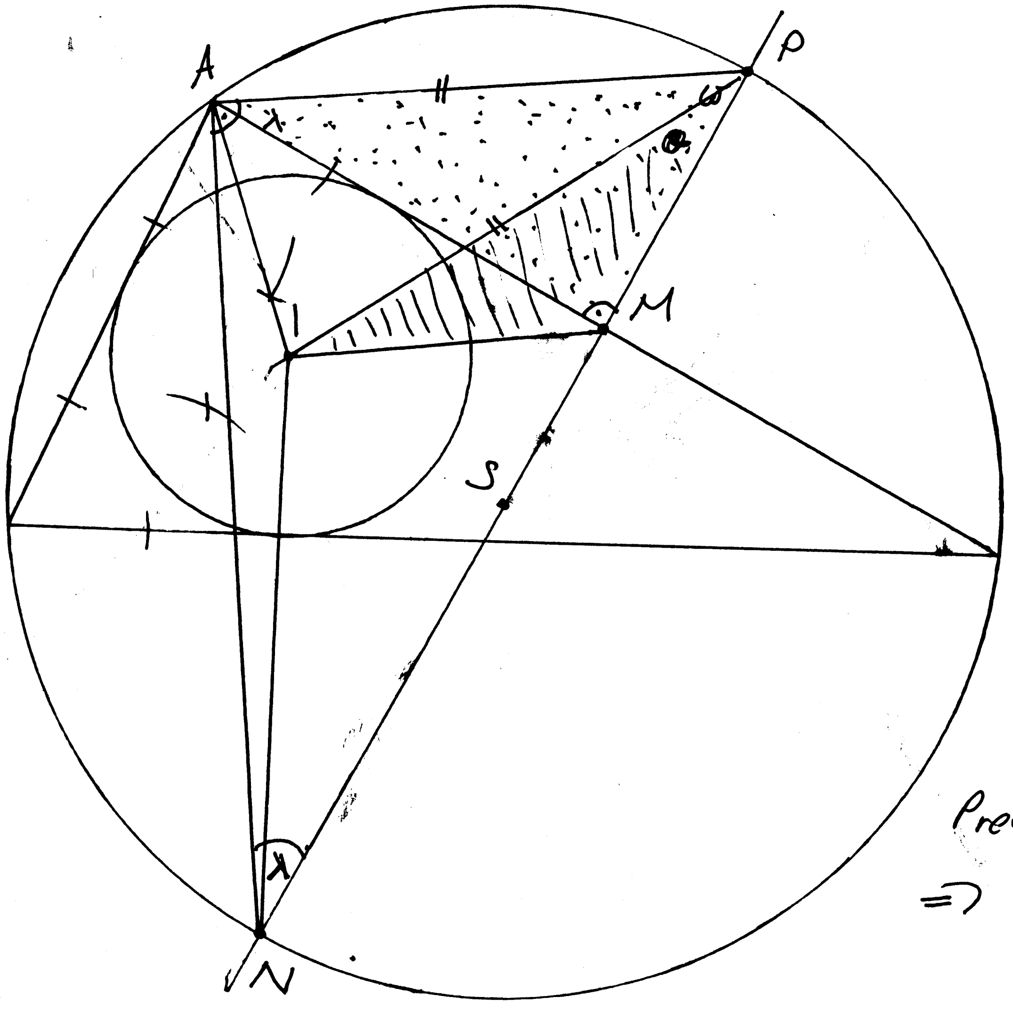
$$\frac{SA}{SB} = \frac{SD}{SC} \Rightarrow SA \cdot SC = SB \cdot SD$$

q.e.d.

<u>Napomena</u>: Potreban i dovoljan uslov da četverougao bude tetivni $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC, M središte stranice AC i neka je tačka P na luku $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je ΔPAI jkk, da važi poredak P-M-S i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $p[P, S)$ i kruga k dokazati da je $\Delta AMP \sim \Delta NAP$ i da je $\Delta PIM \sim \Delta PMI$.

R.:



Posmatrajmo ΔAMP i NAP. Ugao $\measuredangle APM \cong \measuredangle APN = \omega$ im je zajednički, imaju po jedan ugao od $90°$ tj.

$\measuredangle AMP = \measuredangle NAP = 90°$

($\measuredangle NAP$ je ugao nad prečnikom). Prema tome i treći ugao im je podudaran

$\measuredangle PAM \cong \measuredangle ANP = \lambda$.

Prema sličnosti UUU

$\Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta NAP$

$\Downarrow$ q.e.d.

$$\frac{AP}{NP} = \frac{MP}{AP}$$

Kako je ΔAPI jkk to je $AP \cong PI$.

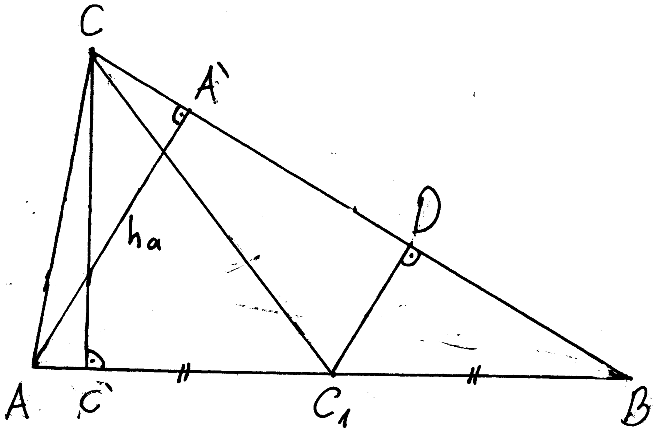
Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{PI}{NP} = \dfrac{MP}{IP} \\ \measuredangle IPN \cong \measuredangle MPI = \theta \\ \text{(zajednički ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(sličn. SUS)}} \Delta PIN \sim \Delta PMI$$

q.e.d.

(#) Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i poznata je težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da $C_1D = \frac{1}{2} h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

Rj.



Prvo primjetimo da je C_1 sredina duži AB.

Kako je $AA' \perp BC$ i $C_1D \perp BC$ to je $p(A, A') \parallel p(C_1, D)$.

Primenom Talesove teoreme sad možemo zaključiti da je $\dfrac{AB}{C_1B} = \dfrac{AA'}{C_1D}$.

Kako je $\dfrac{AB}{C_1B} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow AB = 2C_1B$.

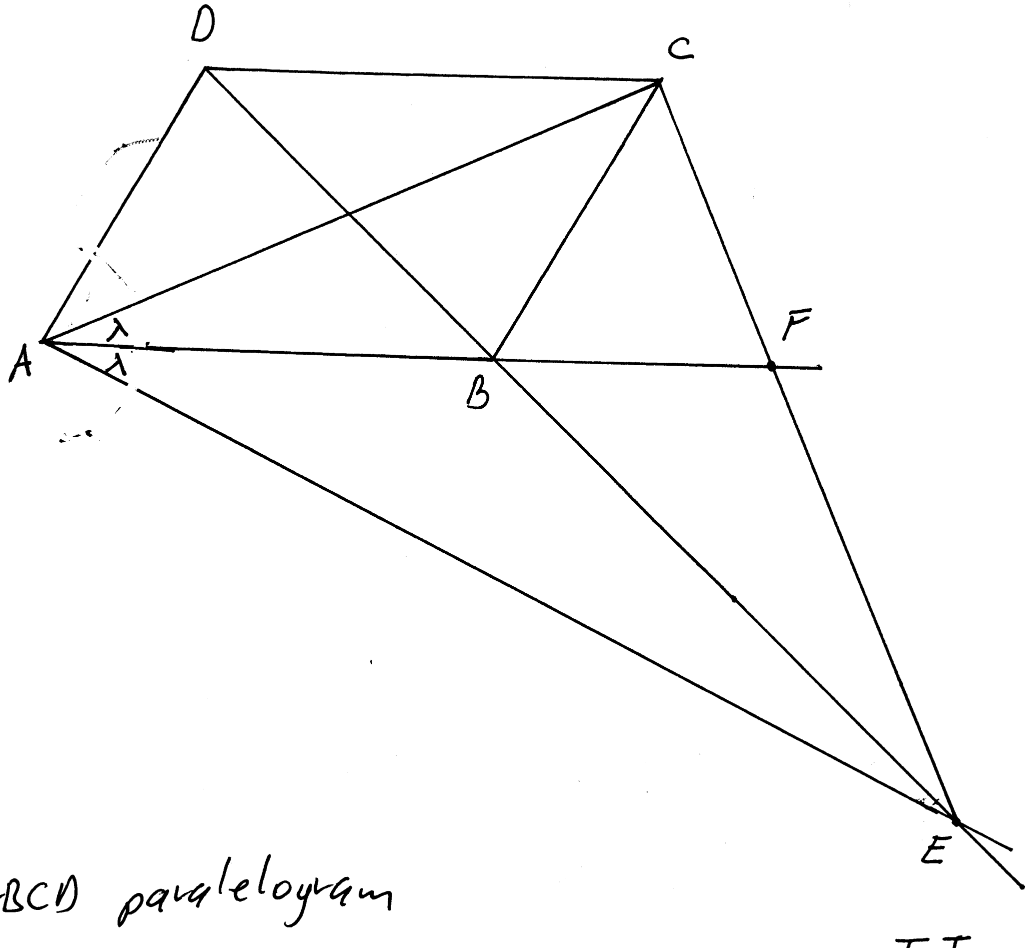
Možemo zaključiti $\dfrac{AA'}{C_1D} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow 2C_1D = AA'$

$$\Rightarrow \quad C_1D = \frac{1}{2} h_a$$

q.e.d.

(#) Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

Rj.



$\square ABCD$ paralelogram

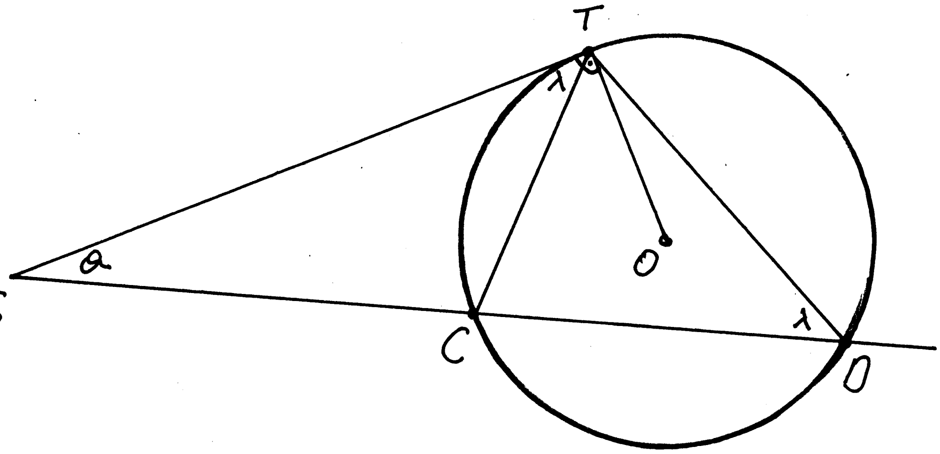
$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{T.T.}{\Rightarrow} \frac{EC}{EF} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{BF}$ ...(*)

Kako je $CD \cong AB \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$

q.e.d.

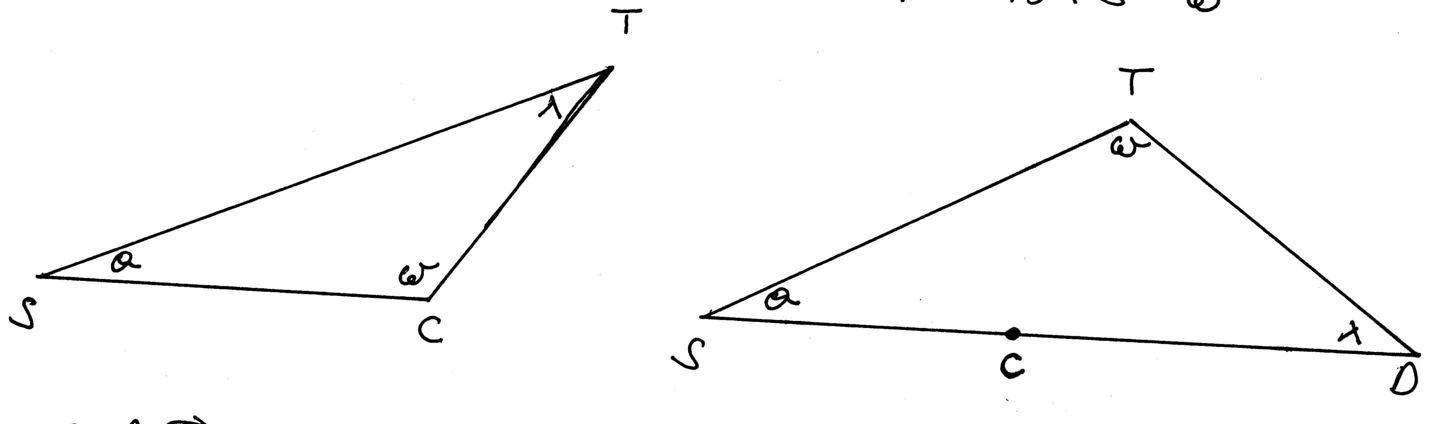
(#) Neka je S tačka izvan kruga, prava p(S,T) tangenta na krug u tački T i neka prava SCD siječe krug u tačkama C i D. Dokazati da je $ST^2 = SC \cdot SD$.

Rj.



Ugao između tangente i tetive jednak je periferiskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow \measuredangle CTS \cong \measuredangle SDT = \lambda$.

Dalje imam $\measuredangle DST = \alpha \Rightarrow \measuredangle SCT \cong \measuredangle DTS = \omega$



$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle TSD \cong \measuredangle TSC = \alpha \\ \measuredangle SDT \cong \measuredangle CTS = \lambda \\ \measuredangle DTS \cong \measuredangle SCT = \omega \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{slič. UUU}} \triangle SDT \sim \triangle SCT$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{ST}{SC} = \frac{SD}{ST}$$

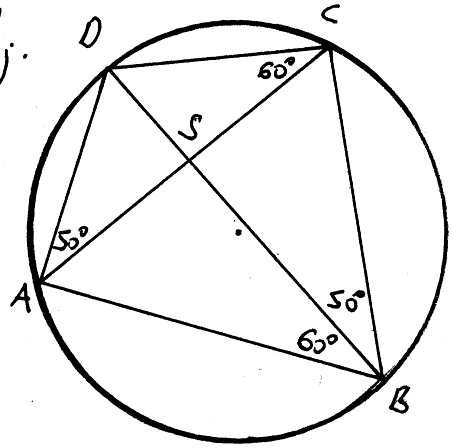
$$\Rightarrow ST^2 = SC \cdot SD$$

q.e.d.

<u>Napomena:</u> Proizvod $SC \cdot SD$ za tačku S, unutar ili izvan kružnice, je konstantan (zavisi samo od položaja tačke S) i ovaj proizvod zovemo POTENCIJAL tačke S u odnosu na datu kružnicu.

(#) U četvorouglu $\square ABCD$ dijagonale se sijeku u tački S. Ako je $SA\cdot SC = SB\cdot SD$, $\measuredangle ABD = 60^\circ$ i $\measuredangle DAC = 50^\circ$ odrediti ugao $\measuredangle ADC$.

Rj.



$SA\cdot SC = SB\cdot SD \Rightarrow \square ABCD$ tetivni

$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = 60^\circ$, $\measuredangle DAC = 50^\circ = \measuredangle DBC$

$\Rightarrow \measuredangle ADC = 70^\circ$

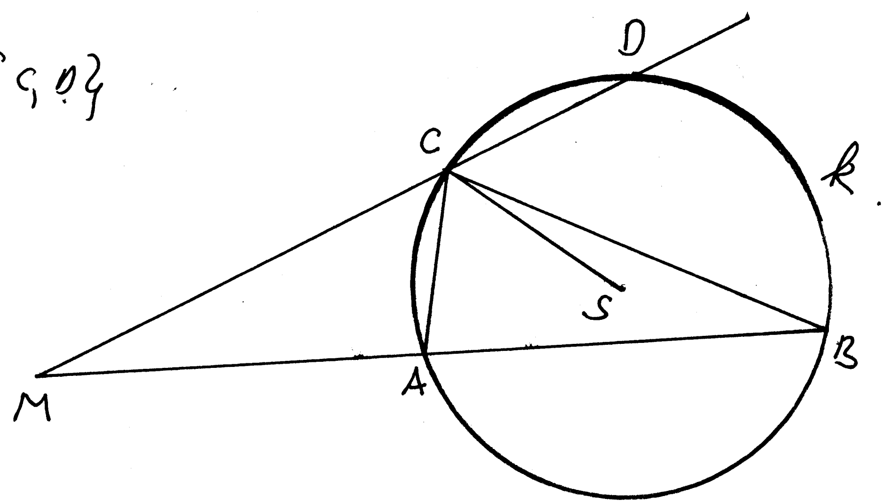
(možemo dobiti kao zbir uglova u $\triangle ACD$ ili kao $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180^\circ$)

(#) Neka je S centar kružnice opisan oko $\triangle ABC$, M tačka takva da je $M-A-B$. Ako je $MA\cdot MB = MC^2$, odrediti $\measuredangle SCM$.

Rj. Neka je

$p(M,C) \cap k = \{C, D\}$

$\measuredangle SCM = ?$



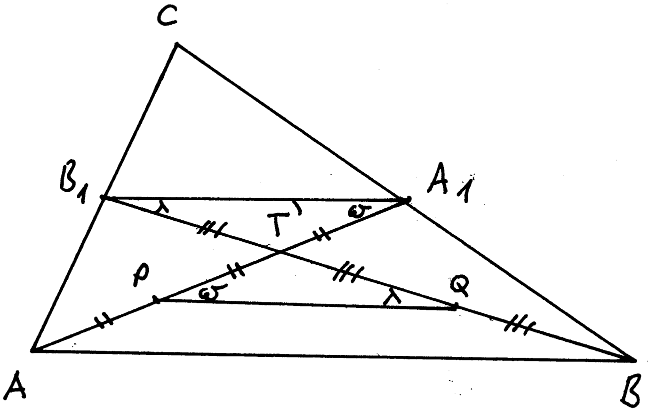
Imamo $MA\cdot MB = MC\cdot MD = MC^2 \Rightarrow MC = MD \Rightarrow C \equiv D$

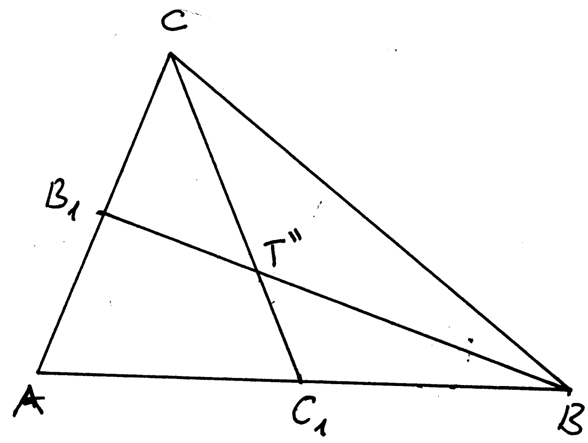
$p(M,C)$ je tangenta na kružnicu k

$\Rightarrow \measuredangle SCM = 90^\circ$.

Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu ΔABC i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija ΔABC pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.

Neka su P i Q sredine redom duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\Delta ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\Delta PQT'$ i $\Delta B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

Pa imamo $\frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}$.

Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.

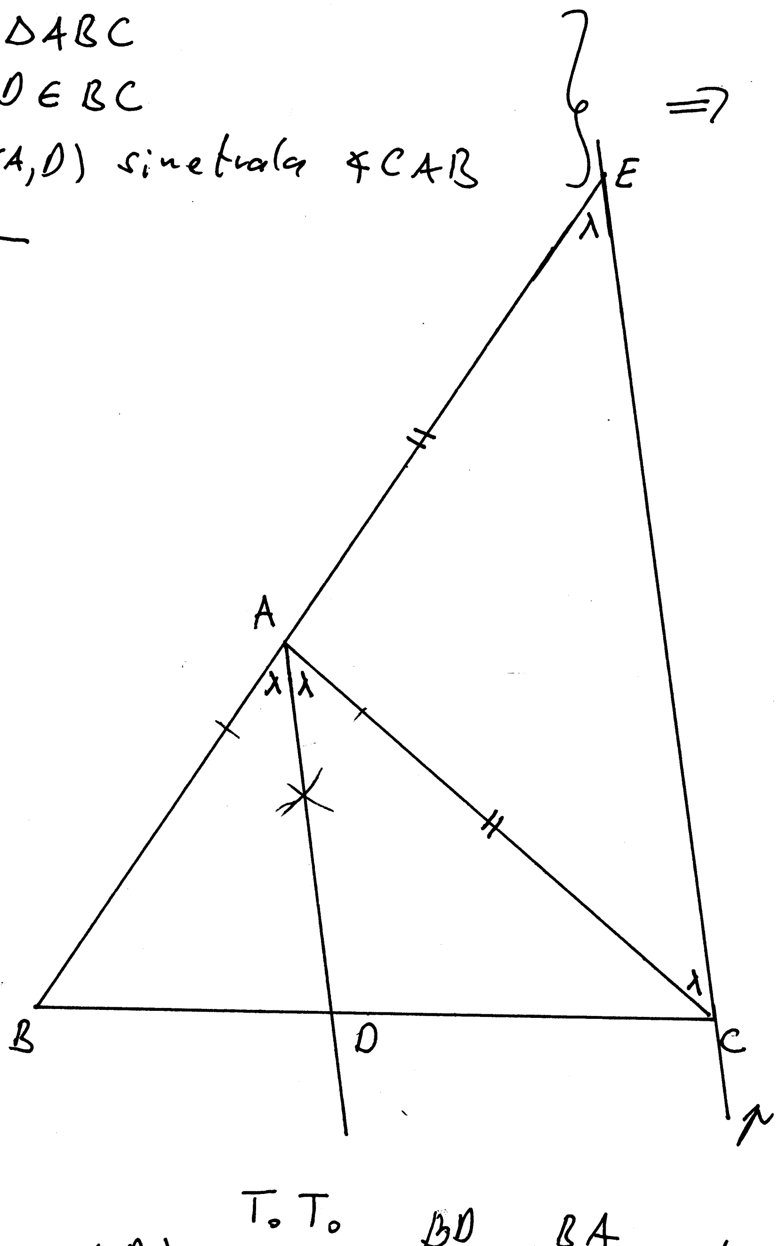
Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

(#) Dokazati da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspramnu stranicu u trouglu u omjeru druge dvije stranice.

Rj.

ΔABC
$D \in BC$
$p(A,D)$ simetrala $\sphericalangle CAB$

$\Big\}\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$



Kroz tačku C povucimo pravu $p \parallel p(A,D)$. $\{E\} = p \cap p(B,A)$

Kako je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD = \lambda$ to je i $\sphericalangle ACE = \lambda$, a kako je $\sphericalangle BAC = 2\lambda$ vanjski ugao ΔACE to $\sphericalangle AEC = \lambda$

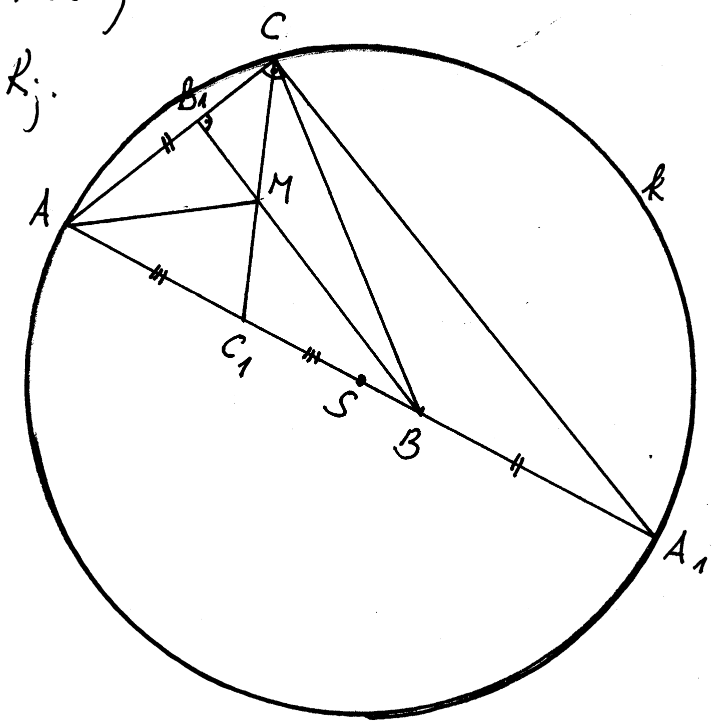
$\Rightarrow \Delta ACE$ jkk ($AC = AE$)

$$p \parallel p(A,D) \overset{T.T.}{\Longrightarrow} \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{tj.} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

<u>Napomena:</u> Zbog jedinstvenosti unutrašnje podjele duži u datom omjeru vidimo da vrijedi i obrnuta tvrdnja tj. ako je tačka D na duži BC takva da je $BD : DC = AB : AC$ tada je prava AD simetrala ugla $\sphericalangle BAC$.

(#) Neka je C proizvoljna tačka kružnice k, a B tačka na prečniku AA_1 kružnice takva da je $AC = BA_1$. Dokazati da se u trouglu $\triangle ABC$ simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku u istoj tački.



Neka je u $\triangle ABC$, CC_1 težišna linija, a BB_1 visina.

$\{M\} = CC_1 \cap BB_1$

Trebamo pokazati da je $p(A,M)$ simetrala ugla $\sphericalangle BAC$.

Dovoljno je pokazati da je

$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{AC_1}{AC}$$

(simetrala ugla dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije)

$\sphericalangle ACA_1 = 90°$ (ugao nad prečnikom)

$$p(B,B_1) \parallel p(A_1,C) \xRightarrow{T_0T_0} \frac{C_1M}{MC} = \frac{C_1B}{BA_1}.$$

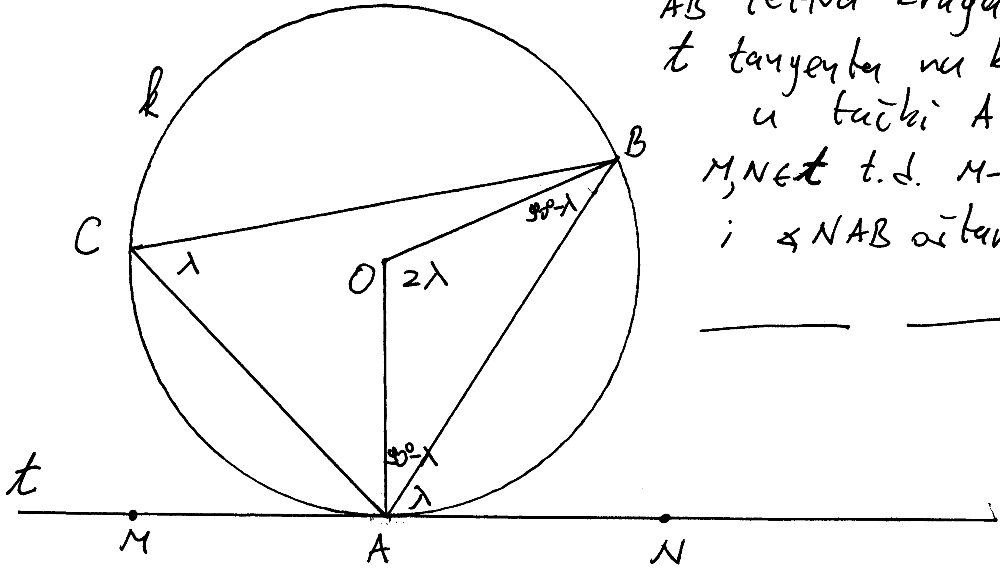
Kako je $C_1B \cong AC_1$ i $BA_1 \cong AC$ to

$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{AC_1}{AC} \Rightarrow p(A,M) \text{ je simetrala ugla}$$

$\Rightarrow$ simetrala ugla kod A,
visina iz B i
težišna linija iz C sijeku se
u istoj tački
q.e.d.

(#) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.



$k(O,r)$ dati krug
AB tetiva kruga
t tangenta na krug u tački A
$M, N \in t$ t.d. $M-A-N$
i $\measuredangle NAB$ oštar

$\Rightarrow \measuredangle NAB \cong \measuredangle ACB$

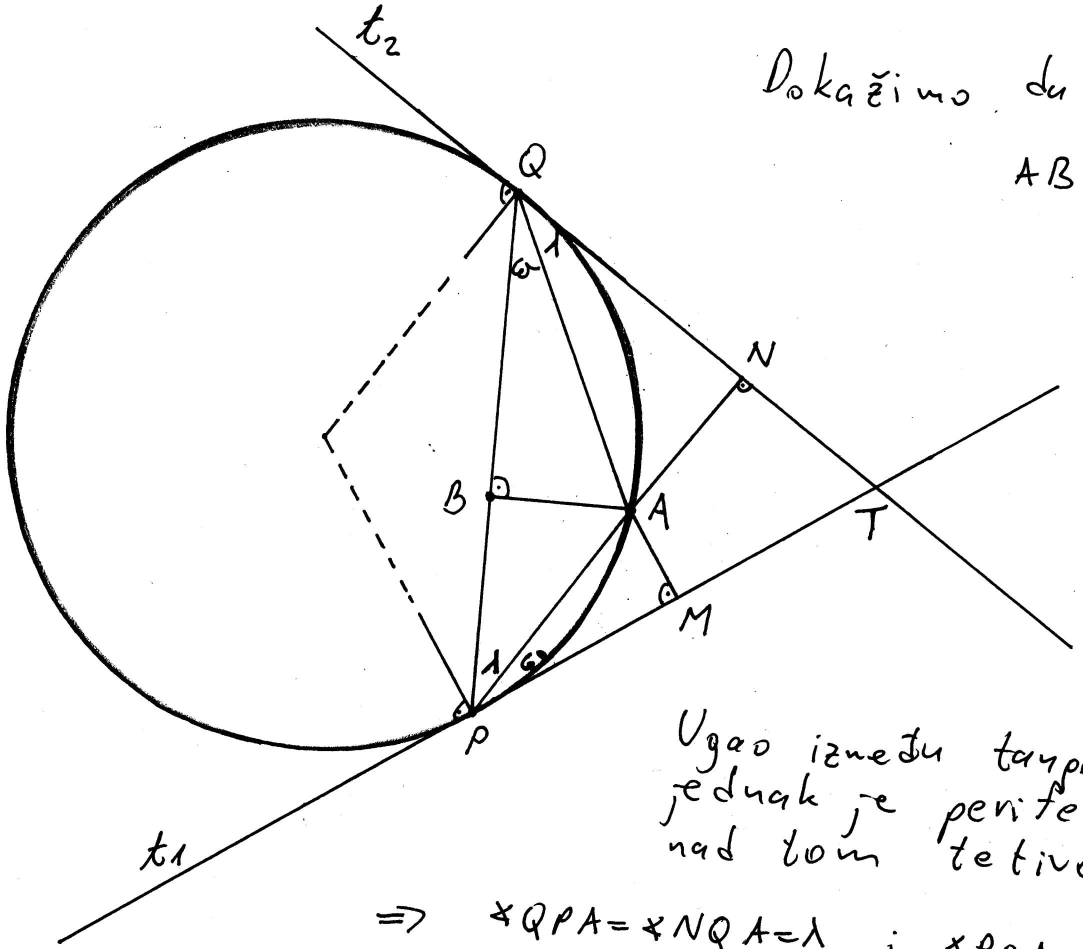
$\measuredangle ACB = \lambda \Rightarrow \measuredangle AOB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle OAB \cong \measuredangle OBA = 90^\circ - \lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \measuredangle BAN = \lambda \Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle BAN = \lambda$

q.e.d.

\# Dokazati da je rastojanje proizvoljne tačke kružnice od njene tetive jednako geometrijskoj sredini rastojanja od te tačke do tangenti u krajnjim tačkama iste tetive.

Rj.



Dokažimo da je

$$AB = \sqrt{MA \cdot AN}.$$

Ugao između tangente i tetive jednak je periferiskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle QPA = \measuredangle NQA = \lambda \quad i \quad \measuredangle PQA = \measuredangle APM = \omega.$$

$\Delta BPA \sim \Delta NQA$ (sličnost UUU)

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AN} = \frac{PA}{QA} \quad \ldots (1)$$

$\Delta PMA \sim \Delta QBA$ (sličnost UUU)

$$\Downarrow$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{PA}{QA} \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AB^2 = AN \cdot AM$$

$$\Downarrow$$

$$AB = \sqrt{AN \cdot AM}$$

q.e.d.