6 Elementarni zadaci: Osnovni konstruktivni zadaci.

Elementarna pitanja:
1. Četverougao je tetivni akko...
2. Kako glasi prvi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (zbir dva naspremna ugla...).
3. Kako glasi drugi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (uglovi koji gledaju na...).
4. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (... $SA \cdot SC = SB \cdot SD$).

1. Data je prava p, tačka A i oštar ugao α. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku A ($A \notin p$) i siječe datu pravu p pod uglom α.

2. Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno.)

3. Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B i C datog trougla.

4. Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

5. Konstruisati pravougli trougao $\triangle ABC$ ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuzi c.

6. Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8\,cm$, $BC = 6\,cm$, $CD = 5\,cm$ i $AD = 7\,cm$. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

Sličnost trouglova i Talesova teorema

Definicija sličnosti trouglova
Dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su slična ako su im sva tri ugla redom podudarna i ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne tj. $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. ◊

Stav 1 (slič. UUU)
Ako u dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imamo sva tri ugla redom podudarna tada su ta dva trougla slična. ◊

Stav 2 (slič. SSS)
Ako u trouglovima $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imamo tri stranice redom proporcionalne tada su ta dva trougla slična. ◊

Stav 3 (slič. SUS)
Ako dva trougla imaju dvije stranice proporcionalne i podudaran ugao između njih tada su ta dva trougla slična. ◊

Stav 4 (slič. SSU)
Ako dva trougla imaju dvije stranice proporcionalne i podudaran ugao nasprem veće stranice tada su ta dva trougla slična. ◊

7. U trouglu $\triangle ABC$ date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B', C')||p(B, C)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom.

8. U trouglu $\triangle ABC$ date su dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AF}$. Dokazati da je tada $p(E, F)||p(B, C)$.

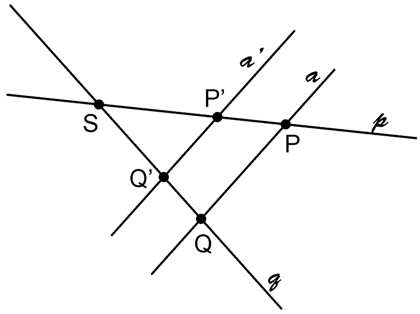
9. U pravoulom trouglu $\triangle ABC$, duž CD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

10. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

11. Neka su AC i BD dvije duži koje se sijeku u tački S. Dokazati da je četverougao $ABCD$ tetivni akko je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.
Posljedica zadatka: Potreban i dovoljan uslov da četverougao bude tetivni je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

Talesova teorema

Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i q u tačkama P, Q i P' i Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi
$\frac{SP}{SP'} = \frac{SQ}{SQ'} = \frac{PQ}{P'Q'}$. $\Diamond$



Posljedice Talesova teorema

$$\frac{SP'}{SQ'} = \frac{SP}{SQ}, \quad \frac{SP}{P'P} = \frac{SQ}{Q'Q}, \quad \frac{SP'}{P'P} = \frac{SQ'}{Q'Q}, \quad \frac{SP}{PQ} = \frac{SP'}{P'Q'}$$

Obrat Talesove teoreme

$$\frac{SP}{SP'} = \frac{SQ}{SQ'} = \frac{PQ}{P'Q'} \quad \Rightarrow \quad a\|a'.$$

12. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je $\triangle PAI$ jkk, da važi poredak $P - M - S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $pp[P, S)$ i kruga k dokazati da je $\triangle AMP \sim \triangle NAP$ i da je $\triangle PIN \sim \triangle PMI$.

13. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da je $C_1D = \frac{1}{2}h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

14. Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da je $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

15. Neka je S tačka izvan kruga, prava $p(S, T)$ tangenta na krug u tački T i neka prava SCD siječe krug u tačkama C i D. Dokazati da je $ST^2 = SC \cdot SD$.
Napomena: Proizvod $SC \cdot SD$, gdje je tačka S unutar ili izvan kružnice i prava SCD siječe krug u tačkama C i D, zovemo stepen ili potencija tačke S u odnosu na datu kružnicu.

16. U četverouglu $\square ABCD$ dijagonale se sijeku u tački S. Ako je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$, $\measuredangle ABD = 60°$ i $\measuredangle DAC = 50°$ odrediti ugao $\measuredangle ADC$.

17. Neka je S centar kružnice opisane oko trougla ABC, M tačka takva da je $M - A - B$. Ako je $MA \cdot MB = MC^2$, odrediti $\measuredangle SCM$.

18. Dokazati da težišnica trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

19. Dokazati da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu trougla u omjeru druge dvije stranice.

20. Neka je C proizvoljna tačka kružnice k, a B tačka na prečniku AA_1 kružnice takva da je $AC = BA_1$. Dokazati da se u trouglu $\triangle ABC$ simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku u istoj tački.

21. Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

22. Dokazati da je rastojanje proizvoljne tačke kružnice od njene tetive jednako geometriskoj sredini rastojanja od te tačke do tangenti u krajnjim tačkama iste tetive.