Pregleda teorema, tvrdnji i primjera

iz predmeta Furijeova i Wavelet analiza

I Definicija Furijeovog reda i lagani rezultati

Definicija 1.1

Skup $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *zovemo jedinična kružnica ili jednodimenzionalna torus grupa.*

Tvrdnja 1.2

$\mathbb{T}$ *je multiplikativna Abelova grupa (*$\mathbb{T}$ *je kompaktan skup).*

Komentar 1.3

Neka je funkcija f *definisana na* $\mathbb{T}$. *Tada*

a) f *je* 2π *periodična funkcija.*

Ako je još f *integrabilna, tada*

b) $\int_0^{2\pi} f(e^{ix})d\sigma(x) = \int_A^{2\pi+A} f(e^{ix})d\sigma(x)$, *za* $\forall A \in \mathbb{R}$;

c) $\int_0^{2\pi} f(e^{i(x+a)})d\sigma(x) = \int_0^{2\pi} f(e^{ix})d\sigma(x)$ *(nepromjenljivost translacije);*

d) $\int_0^{2\pi} f(e^{-ix})d\sigma(x) = \int_0^{2\pi} f(e^{ix})d\sigma(x)$;

e) $\int_a^b f(e^{ix})d\sigma(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(e^{ix})d\sigma(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(e^{ix})d\sigma(x)$.

Tvrdnja 1.4

Preslikavanje

$$p : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ (\mathbb{R}\, modulo\, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{T}$$

$$x \longrightarrow e^{ix}$$

je izomorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *na multiplikativnu grupu* $\mathbb{T}$.

Tvrdnja 1.5 (Jensenova nejednakost)

Neka je μ *mjera takva da* $\mu(\Omega) = 1$. *Ako je* $f \in L^1(\Omega)$ *realna funkcija,* $a < f(x) < b$ *za* $\forall x \in \Omega$ *i* φ *konveksna funkcija na* (a, b) *tada*

$$\varphi\Big(\int_\Omega f\, d\mu\Big) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\, d\mu.$$

(Dokaz se može naći u knjizi Real and Complex Analysis, Walter Rudin, na str. 62.)

Tvrdnja 1.6

$1 \leq p < q \leq \infty \quad \Rightarrow \quad$ *a)* $L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$;

b) $\|f\|_p \leq \|f\|_q$, $\forall f \in L^q(\mathbb{T})$.

($L^p(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : \int_\mathbb{T} |f(e^{ix})|^p d\sigma(x) < \infty\}$, $\quad \|f\|_p = (\int_\mathbb{T} |f(e^{ix})|^p d\sigma(x))^{\frac{1}{p}}$,
$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{e^{ix}\in\mathbb{R}} |f(e^{ix})| \overset{def}{=} \sup\{|f(e^{ix})| : f(e^{ix}) < \infty,\ e^{ix} \in \mathbb{T}\}$, $\|\widehat{f}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(n)|$)

Tvrdnja 1.7

Neka su dati nizovi kompleksnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Svaki trigonometriski red*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n cos\, nx + b_n sin\, nx), \ x \in \mathbb{R}$$

se može zapisati u eksponencijalnom obliku

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

i obrnuto.

Definicija 1.8

Funkciji $f \in L^1(\mathbb{T})$ *pridružujemo sljedeći red koji zovemo Furijeov red*

$$f(e^{ix}) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}.$$

Koeficijente $c_n(f)$ *zovemo Furijeovi koeficijenti i oni su definisani sa*

$$\widehat{f}(n) = c_n(f) = \int_{\mathbb{T}} f(e^{ix}) e^{-inx} d\sigma(x), \ n \in \mathbb{Z}.$$

Definicija 1.9

Trigonometriski polinom je konačna suma oblika

$$P_N(e^{ix}) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikx}, \ a_k \in \mathbb{C}.$$

Tvrdnja 1.10

$c_n(P_N) = a_n$, ako je $n \leq N$.

Propozicija 1.11

a) $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

b) $f_\omega \stackrel{def}{=} f(e^{i(x-\omega)}) \quad \Rightarrow \quad c_n(f_\omega) = e^{-in\omega} c_n(f)$.

Tvrdnja 1.12

$f \in L^1(\mathbb{T})$, $\quad f_j \in L^1(\mathbb{T})$, $j = 1, 2, 3, ...,$ $\quad$ *i* $\quad \|f_j - f\|_1 \to 0$, $(j \to \infty)$ *(drugim riječima* $f_j \stackrel{L^1(\mathbb{T})}{\to} f$ *)*

$\Rightarrow \quad c_n(f_j) \to c_n(f)$ *uniformno na* $\mathbb{Z}$, $(j \to \infty)$.

Tvrdnja 1.13

$f \in L^1(\mathbb{T})$, $c_0(f) = 0$, $\forall e^{ix} \in \mathbb{T}$ *definišimo* $F(e^{ix}) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^x f(e^{i\omega}) d\omega$

$\Rightarrow \quad F$ *neprekidna na* $\mathbb{T}$, *2π periodična i vrijedi* $c_n(F) = \frac{1}{in} c_n(f)$, $n \neq 0$.

Teorema 1.14 (Besselova nejednakost)

$f \in L^2(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ *konvergira* $\quad$ *i* $\quad \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$

Propozicija 1.15

Prostor $L^2(\mathbb{R}^d)$ ima sljedeće osobine:

(i) $L^2(\mathbb{R}^d)$ je vektorski prostor;

(ii) $f(x)\overline{g(x)}$ je integrabilna kadgod $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, i vrijed Cauchey-Schwartz-ova nejednakost $|(f,g)| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$. ($(f,g)$ je unutrašnji proizvod, $(f,g) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, kadgod je $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$);

(iii) Ako $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ fiksiramo, preslikavanje $f \to (f,g)$ je linearno po f, i također $(f,g) = \overline{(g,f)}$;

(iv) Vrijedi nejednakost trougla $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

(Dokaz se može naći u knjizi Real Analysis, Elias Stein i Rami Shakarchi, na str. 157.)

Teorema 1.16

Prostor $L^2(\mathbb{R}^d)$ je potpun u svojoj metrici.

(Dokaz se može naći u knjizi Real Analysis, Elias Stein i Rami Shakarchi, na str. 159.)

Teorema 1.17

Prostor $L^2(\mathbb{R}^d)$ je separabilan, u smislu da postoji prabrojiva familija $\{f_k\}$ elemenata u $L^2(\mathbb{R}^d)$ takva da njihova linearna kombinacija je gusta u $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(Dokaz se može naći u knjizi Real Analysis, Elias Stein i Rami Shakarchi, na str. 160.)

Teorema 1.18 (Riesz-Fischer-ova teorema)

$a_n \in l^2(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ : \ a_n \in \mathbb{C}, \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \infty\}$

$\Rightarrow \quad \exists f \in L^2(\mathbb{T})$ *takva da* $c_n(f) = a_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad$ *i*

$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = \|f\|_2^2$ *(Parsevalova jednakost).*

Posljedica 1.19

$f \in L^2(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2.$

Posljedica 1.20

Funkcija čiji su Furijeovi koeficijenti dati niz $a_n \in l^2(\mathbb{Z})$ je jedinstven.

Teorema 1.21

Sljedeće familije funkcija su guste u $L^1(\mathbb{R}^d)$:

(i) Jednsotavne funkcije;

(ii) Stepene funkcije;

(iii) Neprekidne funkcije sa kompaktnim nosačem.

(Dokaz se može naći u knjizi Real Analysis, Elias Stein i Rami Shakarchi, na str. 71.)

Teorema 1.22 (Mercerov teorem ili Riman-Lebegova lema na $\mathbb{T}$)
$f \in L^1(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad c_n(f) \to 0,\ kad\ |n| \to \infty.$

Teorema 1.23 (Opšti oblik Riman-Lebegove leme)
$f \in L^1([a,b]),\ -\infty \leq a < b \leq \infty,$ $\quad$ *h ograničena, mjerljiva funkcija, definisana na* $\mathbb{R}$ *takva da* $\lim\limits_{c \to \pm\infty} \frac{1}{c} \int\limits_0^c h(t)dt = 0$ *(uslov prosječnosti)*

$\Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(t)h(\omega t)dt \to 0,\ kad\ \omega \to \pm\infty.$

Posljedica 1.24
$f \in L^1(\mathbb{T})$
$\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{T}} f(e^{ix}) cos\, nx\, d\sigma(x) \to 0 \quad i \quad \int_{\mathbb{T}} f(e^{ix}) sin\, nx\, d\sigma(x) \to 0,\ kad\ |n| \to \infty.$

Tvrdnja 1.25 (Jordanova nejednakost)
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi}x \leq sin\, x \leq x.$

Teorema 1.26
$f \in L^1(\mathbb{T}) \quad i \quad \dfrac{f(e^{ix})}{x} \in L^1(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=-M}^{N} c_n(f) \to 0,\ kad\ M\ i\ N\ nezavisno$ $\to \infty.$

Definicija 1.27
Kažemo da funkcija f *zadovoljava Lipschitzov uslov stepena* $\alpha > 0$ *u tački* e^{ic} *ako* $\exists M > 0\ i\ \delta > 0$ *takvi da*

$$|f(e^{i(c+x)} - f(e^{ic})| < M|x|^\alpha,\ |x| < \delta.$$

Posljedica 1.28
$f \in L^1(\mathbb{T}),\ f$ *zadovoljava Lipšicom uslov u tački* $e^{ic} \quad \Rightarrow \quad f(e^{ic}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inc}.$

Zadatak 1.29
Izračunati Furijeov red funkcije

$$f(e^{ix}) = \begin{cases} -1, & \text{ako je } x \in (-\pi, 0) \\ 1, & \text{ako je } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Rješenje: $c_0(f) = 0,\ c_n(f) = \frac{1-(-1)^n}{in\pi}$ *za* $n \neq 0,\ f(e^{ix}) \sim \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin(2n-1)x}{2n-1}.$

Zadatak 1.30
Izračunati Furijeov red funkcije

$$g(e^{ix}) = \begin{cases} x + \pi, & \text{ako je } x \in (-\pi, 0) \\ x - \pi, & \text{ako je } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Rješenje: $c_0(g) = 0,\ c_n(g) = \frac{i}{n}$ *za* $n \neq 0,\ g(e^{ix}) \sim -2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, nx}{n}.$

Zadatak 1.31

f relana funkcija $\quad\Rightarrow\quad c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$ *(iz čega vidimo da je $c_0(f)$ realan broj).*

Zadatak 1.32

Izračunati Furijov red funkcije $h(e^{ix}) = (1 - re^{ix})^{-1}$, gdje je $0 < r < 1$.
Rješenje: $c_0(h) = 1$, $c_n(h) = r^n$ za $n \neq 0$, $h(e^{ix}) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^n e^{inx}$.

Teorema 1.33 (princip lokalizacije)

$f, g \in L^1(\mathbb{T})$, $f(e^{ix}) = g(e^{ix})$ za gotovo svako $x \in [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$
$\Rightarrow$ *za g.s. $x \in (a, b)$ oba reda $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ i $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g)e^{inx}$ ili konvergiraju istoj vrijednosti ili oba reda divergiraju.*

Teorema 1.34

$$f \in L^1(\mathbb{T}) \quad i \quad \frac{f(e^{ix}) + f(e^{-ix})}{x} \in L^1(\mathbb{T}) \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \to 0, \text{ kad } N \to \infty.$$

Da li je bezuslovno tačno da $\sum_{n=-N}^{M} c_n(f) \to 0$, kad M i N nezavisno $\to \infty$.

(Ova stranica je ostavljena prazna.)

II Furijeova transformacija

Tvrdnja 2.1

Ako je $g(x)$ p-periodična funkcija definisana na $\mathbb{R}$ tada Furijeov red funkcije $g \in L^1([-p,p])$ je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{in\frac{\pi x}{p}}$$

gdje su Furijeovi koeficijenti

$$c_n(f) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\frac{\pi x}{p}}\,dx,\ n \in \mathbb{Z}.$$

(ili ekvivalentno $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{in\frac{2\pi x}{p}}$ gdje je $c_n(g) = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-in\frac{2\pi x}{p}}\,dx,\ n \in \mathbb{Z}$).

Definicija 2.2

Furijeovu transformaciju funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ definišemo kao $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$.

(Pitanje: Odakle ova definicija? Šta nam je pomoglo da dođemo do nje?)

Teorema 2.3

$f, g \in L^1(\mathbb{R}),\quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow$

a) $|\widehat{f}(\omega)| \le \|f\|_1$;
b) $(c_1 f + c_2 g)\widehat{\ }(\omega) = c_1\widehat{f}(\omega) + c_2\widehat{f}(\omega)$;
c) $\widehat{f}$ *neprekidna i ograničena na* $\mathbb{R}$;
d) $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx$ *(promjena kape).*

Teorema 2.4

$f \in L^1(\mathbb{R}),\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

a) $g(x) = f(x)e^{i\alpha x} \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(t) = \widehat{f}(t-\alpha)$;
b) $g(x) = f(x-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)e^{-i\alpha t}$;
c) $g(x) = \overline{f(-x)} \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$;
d) $g(x) = f(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(t) = \frac{1}{|\alpha|}\widehat{f}(\frac{t}{\alpha})$ *(skaliranje).*

Teorema 2.5

a) $f_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} f \quad \Rightarrow \quad \widehat{f_n} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \widehat{f}$;
(konvergira tačkasto) (konvergira uniformno)
b) $f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}$ *uniformno neprekidna na* $\mathbb{R}$.

(Tvrdnja pod b) se može dokazati na dva načina).

Teorema 2.6 (neprekidnost u srednjem)

$f \in L^p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < \infty,\ h \in \mathbb{R},\ f_h(x) \overset{def}{=} f(x+h) \quad \Rightarrow \quad \|f - f_h\|_p \to 0,$ *kad* $h \to 0$.

Teorema 2.7 (Riman-Lebegova lema)

$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{f} \to 0,\ kad\ |\omega| \to \infty.$

(Teorema se može dokazati na dva načina).

Teorema 2.8 (Opšti oblik Riman-Lebegove leme)

$f \in L^1([a,b]),\ -\infty \le a < b \le \infty,$ *h ograničena, mjerljiva funkcija, definisana na* $\mathbb{R}$ *takva da* $\lim\limits_{c\to\pm\infty} \frac{1}{c}\int\limits_0^c h(x)dx = 0$ *(uslov prosječnosti)*

$\Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)h(\omega x)dx \to 0,\ kad\ \omega \to \pm\infty.$

Posljedica 2.9

$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) cos\, \omega x\, dx \to 0 \quad i \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) sin\, \omega x\, dx \to 0,\ kad\ \omega \to \pm\infty.$

Teorema 2.10

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad i \quad \tfrac{f(x)}{x} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \lim_{A,B\to\infty} \int_{-A}^{B} \widehat{f}(\omega)d\omega = 0.$$

Zadatak 2.11

Jedinična stepena funkcija definiše se na sljedeći način

$$U(x) = \chi_{[0,\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \ge 0 \\ 0, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}.$$

Neka je $a > 0$ *i* $f(x) = e^{-ax}U(x)$*. Izračunati* $\widehat{f}(\omega)$*. Za* $a = 1$ *da li je* $\widehat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$*?*

Rješenje: $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$*, za* $a = 1$ *imamo da* $\widehat{f}(\omega) \notin L^1(\mathbb{R})$*.*

Zadatak 2.12

Pokazati da $\int\limits_0^\infty \frac{|sin\, x|}{x} dx \ge \infty.$

Zadatak 2.13

Neka je data karakteristična funkcija intervala $[-a,a]$

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } |x| \le a \\ 0, & \text{ako je } |x| > a \end{cases},\ a > 0.$$

Ovu funkciju nekad zovemo i pravougaoni puls. Izračunati $\widehat{\chi}_{[-a,a]}(\omega)$*. Za* $a = 1$ *da li je* $\widehat{\chi}_{[-a,a]}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$*?*

Rješenje: $\widehat{\chi}_{[-a,a]}(\omega) = \frac{2sin\, \omega a}{\omega}$*, za* $a = 1$ *imamo* $\widehat{\chi}_{[-a,a]}(\omega) \notin L^1(\mathbb{R})$*.*

Zadatak 2.14

Šešir funkcija definiše se na sljedeći način $k(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$*. Izračunati* $\widehat{k}(\omega)$*.*

Rješenje: $\widehat{k}(\omega) = \frac{4sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2} = (\frac{sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}})^2$*, za* $\omega \neq 0$ *i* $\widehat{f}(0) = 1$*.*

Zadatak se može uraditi i na drugi način (zadatak 3.5).

Zadatak 2.15

Izračunati $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx$.

Rješenje: $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Zadatak 2.16

Gausova funkcija je definisana na sljedeći način $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Izračunati* $\widehat{f}(\omega)$.

Rješenje: $\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

Zadatak 2.17

Izračunati Furijeovu transformaciju Laplace funkcije $g(x) = e^{-ax^2}$.

Rješenje: $\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Zadatak se može uraditi i na drugi način (zadatak 3.6).

Zadatak 2.18

Izračunati Furijeovu transformaciju funkcije $h(x) = e^{-|x|}$. *Provjeriti da li* $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\omega)\,d\omega = 1$*?*

Rješenje: $\widehat{h}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, *jest.*

***Korolar 2.19**

$f \in L^1(\mathbb{R})$ *i zadovoljava Lipschitz-ov uslov u tački* t

$$\Rightarrow \qquad f(t) = \lim_{A,B\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{B} \widehat{f}(\omega) e^{it\omega}\,d\omega.$$

(Ova stranica je ostavljena prazna.)

III Furijeova transformacija i diferenciranje. Furijeova transformacija i integrali.

Teorema 3.1 (Diferencijabilnost)

a) $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *i* $g(x) = -ixf(x) \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}$ *diferencijabilna i* $(\widehat{f}(\omega))' = \widehat{g}(\omega)$;

b) $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, f *neodređen integral od* $f' \quad \Rightarrow \quad (f')\widehat{\ }(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$.

Opažanje 3.2

$f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, ..., n$, $f^{(k)}$ *nestaje u beskonačnosti za* $k = 0, 1, ..., n \quad \Rightarrow$

$$\widehat{f}(\omega) = o(\frac{1}{|\omega|^n}).$$

Teorema 3.3 (diferenciranje pod znakom integrala)

$h(t, \omega_0)$ *integrabilna funkcija po* t *na* $\mathbb{R}$ *za neko* $\omega_0 \in [a, b]$, $\exists \ \frac{\partial h}{\partial \omega}$ *na* $\mathbb{R} \times [a, b]$
i $\exists g \in L^1(\mathbb{R})$ *t. d.* $|\frac{\partial h}{\partial \omega}| < g(t)$ *za* $\forall \omega \in [a, b]$

$\Rightarrow \quad F(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(t, \omega)\, dt$ *je diferencijabilna i vrijedi* $F'(\omega) = \dfrac{dF}{d\omega} = \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \omega} h(t, \omega)\, dt.$

Teorema 3.4 (transformacija integrala i djeljenje sa $i\omega$)

$xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $\quad \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$, $\quad g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$

$\Rightarrow \quad g(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $\quad \widehat{g}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{i\omega}$, *za* $\omega \neq 0$ *i* $\widehat{g}(0) = -\int\limits_{\mathbb{R}} xf(x)dx.$

Zadatak 3.5

Izračunati Furijeovu transformaciju Kapa funkcije $f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ *(koristeći teoremu 3.4).*

Rješenje: $\widehat{f}(\omega) = \left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$, *za* $\omega \neq 0$ *i* $\widehat{f}(0) = 1$.

Zadatak je već rađen na jedan način (zadatak 2.14).

Zadatak 3.6

Ako je $g(x) = e^{-bx^2}$, $b > 0$, *izračunati* $\widehat{g}(\omega)$ *(uz pomoć teoreme 3.3).*

Rješenje: $\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$.

Zadatak je već rađen na jedan način (zadatak 2.17).

Zadatak 3.7

Izračunati Furijeovu transformaciju funkcije $h(x) = xe^{-x^2}$ *(uz pomoć teoreme 3.1b).*

Rješenje: $\widehat{h}(\omega) = -i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\omega e^{\frac{-\omega^2}{4}}$.

Zadatak 3.8

Izračunati Furijeovu transformaciju funkcije $g(x) = xe^{-|x|}$ *(uz pomoć teoreme 3.1a).*

Rješenje: $\widehat{g}(\omega) = \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}$.

(Ova stranica je ostavljena prazna.)

IV Formula inverzije.

Teorema 4.1 ($sin\frac{x}{2}$ **može biti zamjenjena sa** $\frac{x}{2}$ **kad** $n \to \infty$)

$f \in L^1([0,\pi])$, $r \in (0,\pi]$ $\quad\Rightarrow\quad$ *pod pretpostavkom da limes* $\exists$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^r f(x)\frac{sin(n+\frac{1}{2})x}{sin\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^r f(x)\frac{sin(n+\frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}}\,dx$$

U dodatku, funkcija $\frac{sin(n+\frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}}$ *ima Riman-Lebegovu osobinu*

$$\lim_{n\to\infty}\int_r^\pi f(x)\frac{sin(n+\frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}}\,dx = 0.$$

Zadatak 4.2

Izračunati $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{sin(n+\frac{1}{2})x}{sin\frac{x}{2}}\,dx,\ n \in \mathbb{Z}.$

Rješenje: 2π

Zadatak 4.3

Izračunati $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{sin\,x}{x}\,dx.$

Rješenje: $\frac{\pi}{2}$

Tvrdnja 4.4

Postoji funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$ *takva da* $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Npr. $f(x) = e^x\chi_{(-\infty,0]}(x)$, $g(x) = e^{-x}\chi_{[0,+\infty)}(x)$, $h(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

Lema 4.5

$$f \in L^1(\mathbb{R}),\ S_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega \quad\Rightarrow$$

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (f(x+t)+f(x-t))\frac{sin\,At}{t}\,dt.$$

Lema 4.6

$$f \in L^1(\mathbb{R}),\ S_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega \qquad \Rightarrow$$

$$S_A(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right)\frac{sin\,At}{t}\,dt.$$

Teorema 4.7

$$f \in L^1(\mathbb{R}),\ g_x(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x),\ \int_0^{\delta} \left|\frac{g_x(t)}{t}\right| dt < \infty \quad (\delta > 0) \qquad \Rightarrow$$

$$f(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega$$

Tvrdnja 4.8

$$K_\delta \overset{def}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi}{\delta}x^2} \qquad \Rightarrow \qquad i)\ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x)\,dx = 1;$$

$$ii)\ \forall\eta > 0,\ \int_{|x|>\eta} K_\delta(x)\,dx \to 0,\ kad\ \eta \to 0.$$

Teorema 4.9

$$f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega\ \ za\ g.s.\ x.$$

Uputa: $g(x) \overset{def}{=} e^{-\frac{\delta}{4\pi}x^2}e^{ixy}$, *y fiksiran,* $\delta > 0$, $\quad \widehat{g}(\omega) = K_\delta(\omega - y)$,

Tvrdnja

Tvrdnja

Tvrdnja

Tvrdnja

Tvrdnja